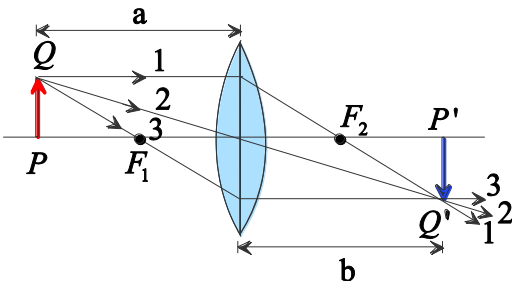
7. OPTIČNI APARATI

7.1 TANKE LEČE

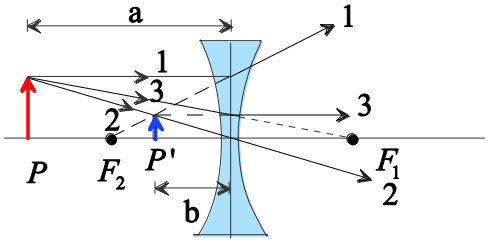
- **Bikonveksna leča:**

f > 0
a > 0
b > 0



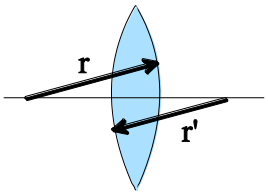
- **Bikonkavna leča:**

f < 0
a < 0
b < 0



- **Računanje goriščne razdalje:**

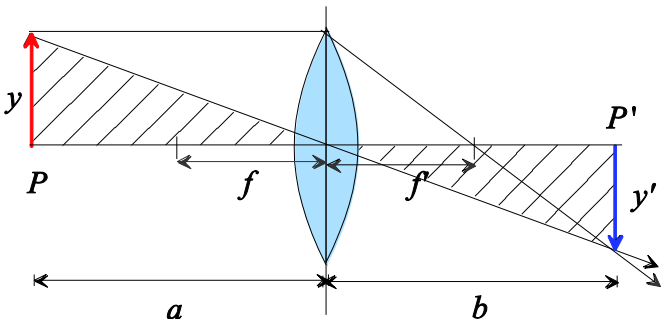
$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)$$



$n \equiv$ lomni količnik stekla
$r, r' \equiv$ krivinska radija obeh površin leče

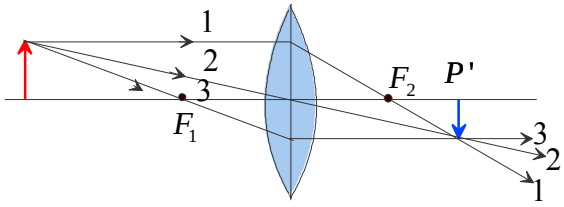
- **Enačba tanke leče:**

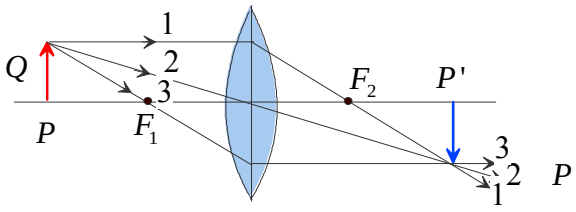
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$



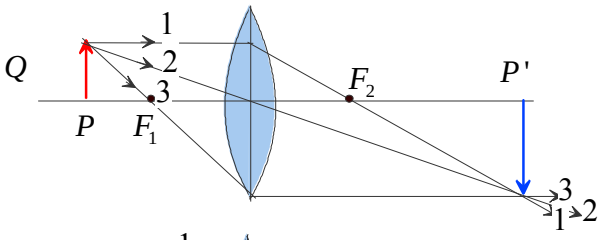
povečava: $\frac{y'}{y}=\frac{b}{a}=\frac{f}{a-f}$

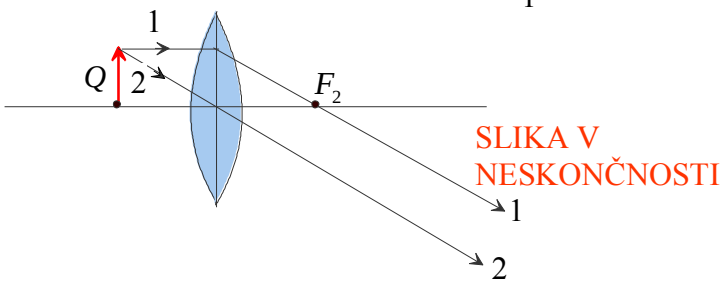
Bikonveksna leča:

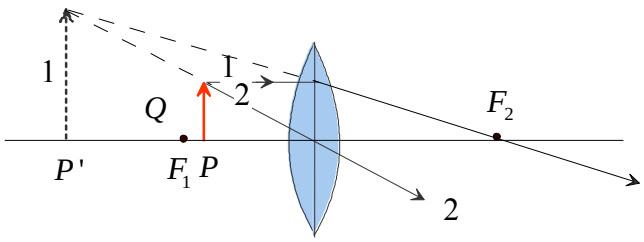




P







SLIKA V
NESKONČNOSTI

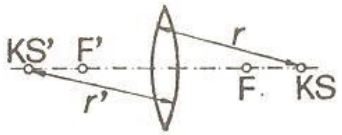
Sistem dveh leč:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{s}{f_1 f_2}$$

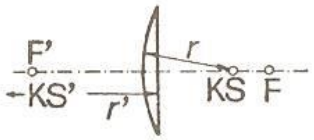
$s \equiv$ razdalja med lečama

f > 0

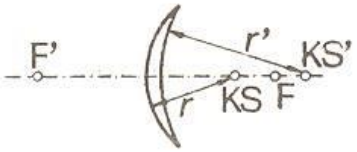
bikonveksna: $r>0,\ r'>0$, $1/f=(n-1)(1/r+1/r')$



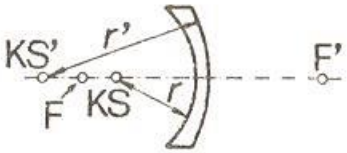
plankonveksna: $r>0,\ r'=\infty$, $1/f=(n-1)/r$



konkavno konveksna: $r>0,\ r'<0$, $1/f=(n-1)(1/r-1/|r'|)$

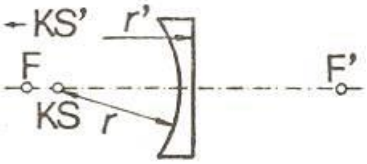


konveksno konkavna: $r<0,\ r'>0$, $1/f=-(n-1)(1/|r|-1/r')$

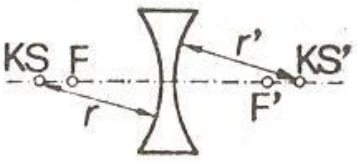


f < 0

plankonkavna: $r<0,\ r'=\infty$, $1/f=-(n-1)/|r|$



bikonkavna: $r<0,\ r'<0$, $1/f=-(n-1)(1/|r|+1/|r'|)$

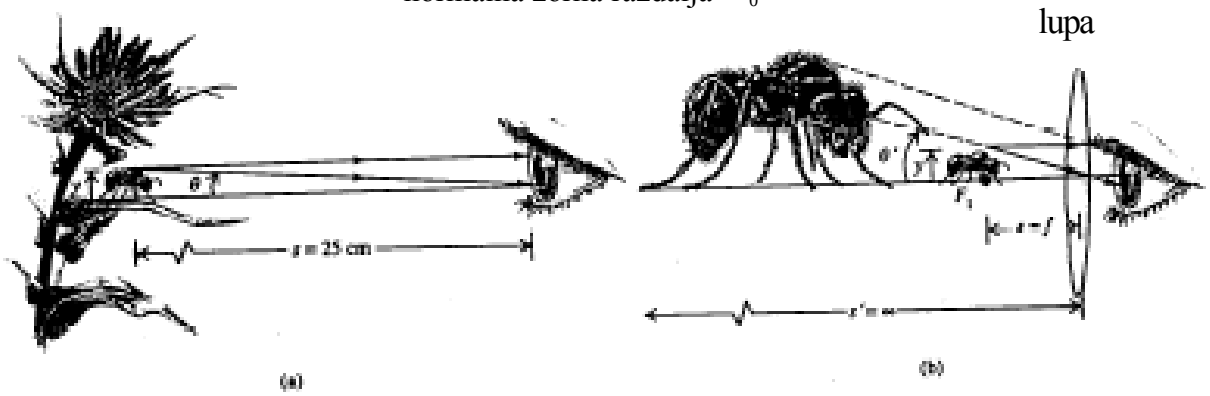


slike: J. Strnad, Fizika II

7.2. LUPA IN MIKROSKOP

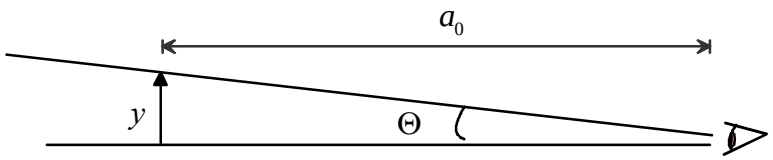
7.2.1 LUPA

normalna zorna razdalja $a_0 = 25\,\mathrm{cm}$

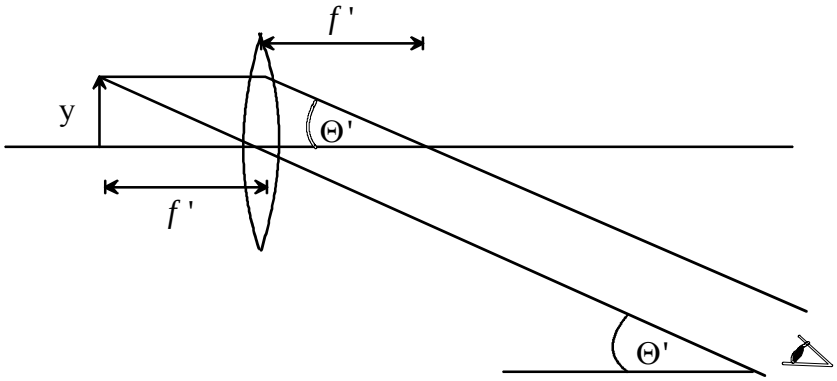


Predmet postaviš v gorišče $\Rightarrow$ povečaš zorni kot

brez lupe:



z lupo:



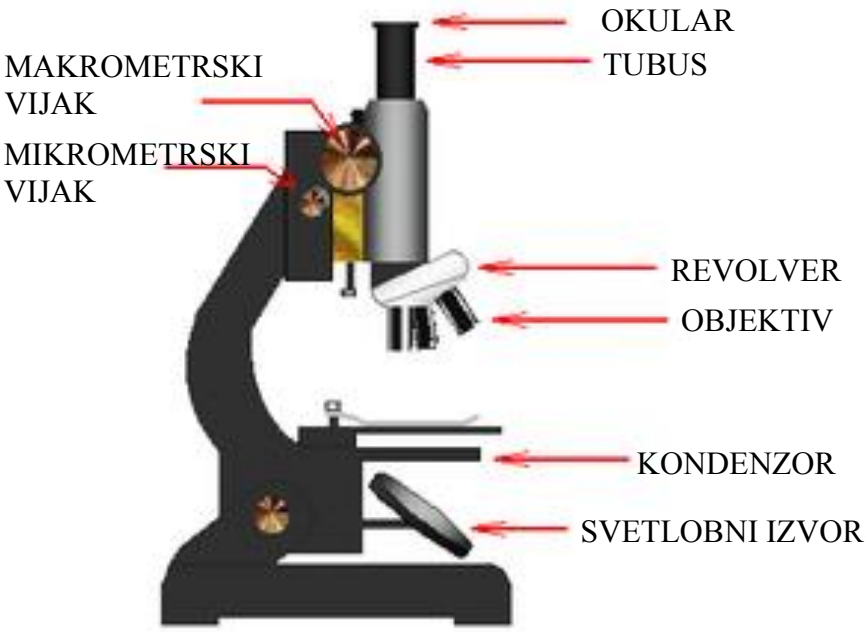
$$tg\,\Theta = \frac{y}{a_0}$$

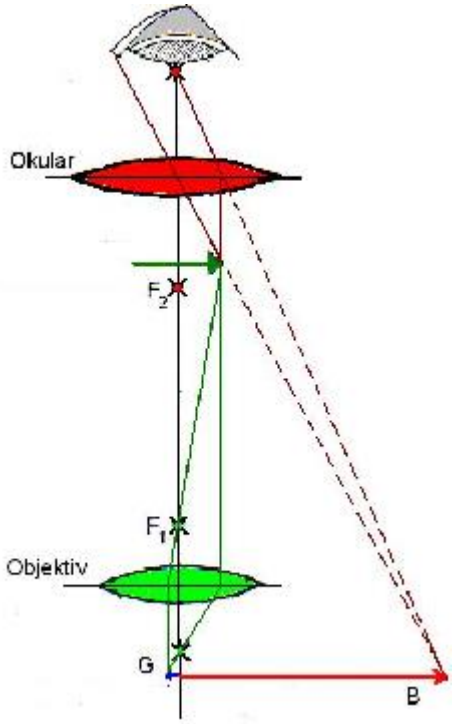
$$tg\,\Theta' = \frac{y}{f'}$$

povečava $N = \dfrac{tg\,\Theta'}{tg\,\Theta} = \dfrac{a_0}{f'}$

7.2.2 OPTIČNI MIKROSKOP

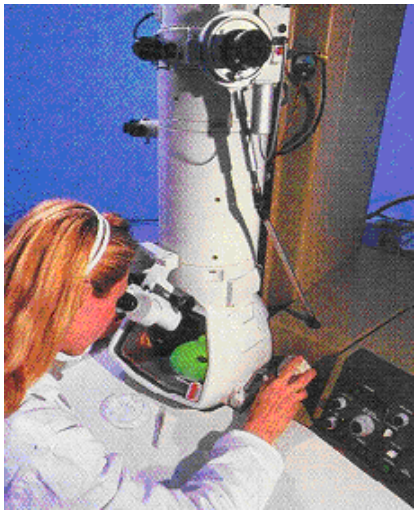
- Okular uporabimo kot lupo





7.2.3 ELEKTRONSKI MIKROSKOP

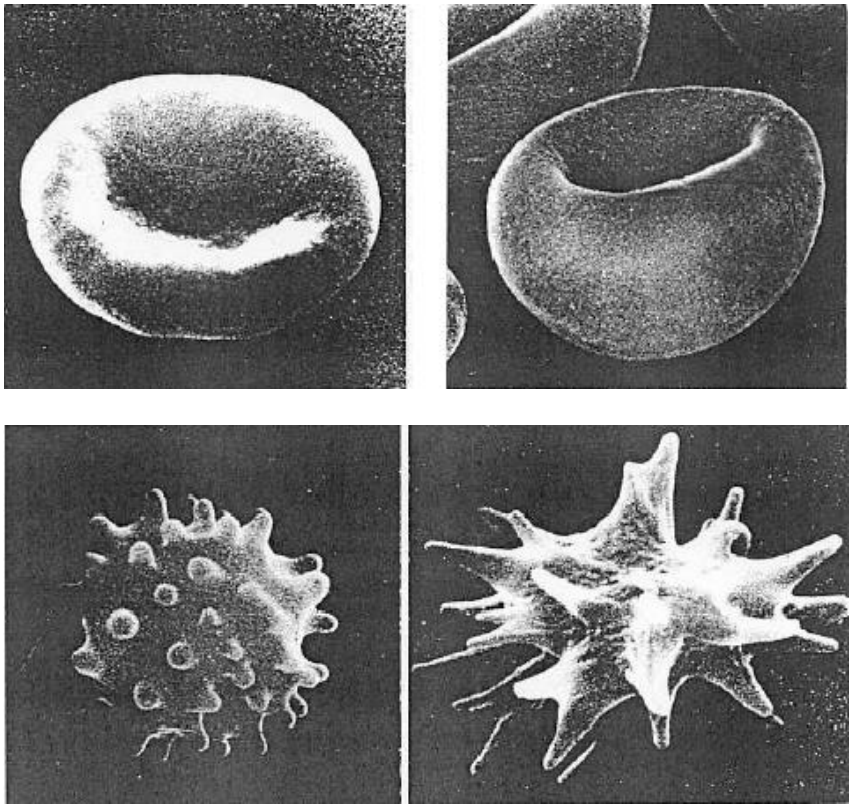
Namesto curka svetlobe uporabimo curek hitrih elektronov. V elektronskem mikroskopu imamo zato namesto običajnih steklenih leč leče, ki ustvarjajo električno in magnetno polje.



Elektronski mikroskop (Serway,1992)

- Slike eritrocitov z elektronskim mikroskopom (Bessis):

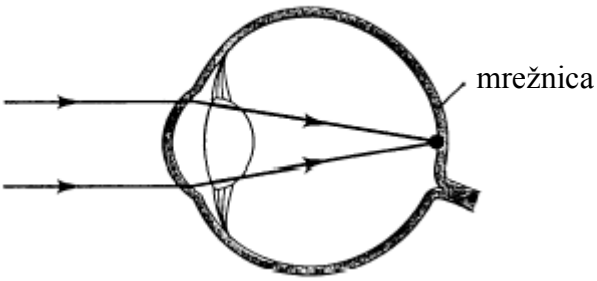
  eritrocit: dimenzija ~ 6 μm



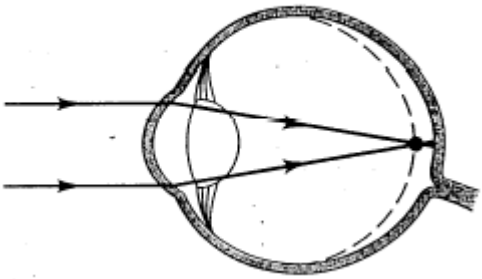
7.3 OKO

Goriščna razdalja $f \approx 2\,\text{cm}$

NORMALNO OKO

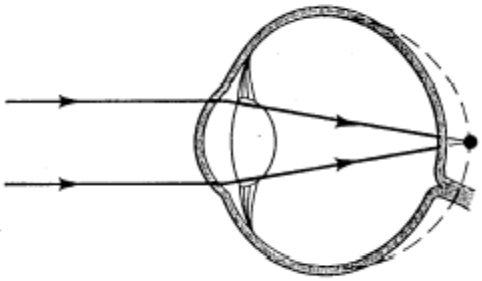


KRATKOVIDNO OKO



Slika ODDALJENIH PREDMETOV nastane pred mrežnico, ker očesna leča ne more imeti dovolj velike goriščne razdalje

DALJNOVIDNO OKO



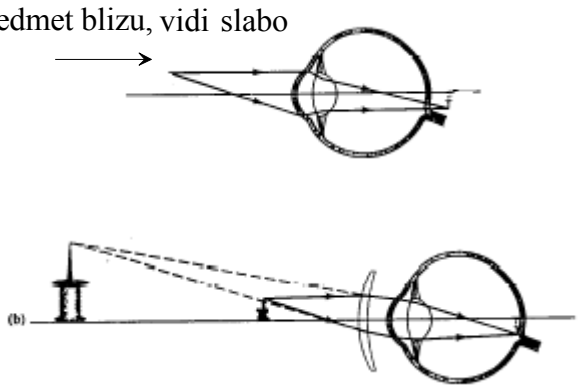
Slika BLJIŽNIH PREDMETOV nastane za mrežnico, ker očesna leča ne more imeti dovolj majhne goriščne razdalje

7.3.1 KOREKCIJA Z OČALI

- **Daljnovidno oko**

  Dobro vidi samo oddaljene predmete

  $f \equiv$ goriščna razdalja očesne leče



Normalna vidna razdalja $a_0 \approx 25\,\mathrm{cm}$.

Brez očal: a > a_0 , da je b normalen

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$

Z očali: a = a_0.

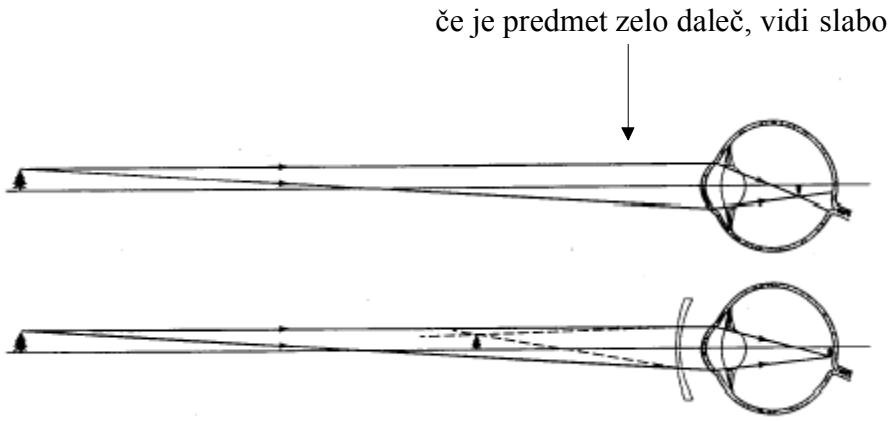
$$\frac{1}{a_0}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}$$

Odštejemo obe enačbi in dobimo:

dioptrija: $\boxed{D=\frac{1}{f'}=\frac{a-a_0}{a_0\,a}>0}$ zbiralna leča

- **Kratkovidno oko**

  Dobro vidi samo bližnje predmete.



Brez očal: $a < a_0$, da je b normalen

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$

Z očali: $a >> a_0$:

$$\frac{1}{\infty}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}$$

Odštejemo obe enačbi in dobimo:

$$-\frac{1}{a}=\frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D=\frac{1}{f'}=-\frac{1}{a}<0}$$

8. RELATIVNOSTNA MEHANIKA IN KVANTNI POJAVI

8.1 DIMENZIJE

Dolžine

DOLŽINA	[metri]
razdalja do najbližje galaksije (v Andromedi)	2×10^{22}
radij naše galaksije	6×10^{19}
razdalja do najbližje zvezde (Alpha Centauri)	4.3×10^{16}
povprečni radij Plutona	5.9×10^{12}
radij Sonca	6.9×10^{8}
radij Zemlje	6.4×10^{6}
višina Mt. Everesta	8.9×10^{3}
povprečna višina človeka	1.7×10^{0}
debelina lista papirja	1×10^{-4}
velikost virusa	1.2×10^{-8}
polmer vodikovega atoma	5×10^{-11} $\sim 10^{-10}$
efektivni polmer protona	1.2×10^{-15} $\sim 10^{-15}$

Mase

OBJEKT	[kilogrami]
naša galaksija	2.2×10^{41}
Sonce	2.0×10^{30}
Zemlja	6.0×10^{24}
Luna	7.4×10^{22}
voda oceanov	1.4×10^{21}
prekooceanska ladja	7.2×10^{7}
slon	4.5×10^{3}
človek	5.9×10^{1}
drobec prahu	6.7×10^{-10}
virus	2.3×10^{-13}
molekula penicilina	5.0×10^{-17}
atom urana	4.0×10^{-26}
proton	1.7×10^{-27}
elektron	9.1×10^{-31}

IZOTOP	MASA [a.e.m.]
H^{1}	$1.00782522 \pm 0.00000002$
C^{12}	12.00000000 (exactly)
Cu^{54}	63.9297568 ± 0.0000035
Ag^{102}	101.911576 ± 0.000024
Cs^{137}	136.907074 ± 0.000095
Pt^{190}	189.959965 ± 0.000026

8.2 MEGLIČNA CELICA, SELEKTOR HITROSTI, MASNI SPEKTROMETER

8.2.1 MEGLIČNA CELICA

Mehanizem delovanja:

zraku z vodno paro sunkovito povečamo prostornino, da se ohladi

⇓

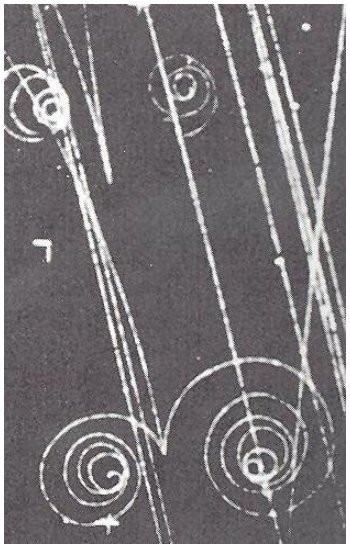
z vodno paro nasičeni zrak postane prenasičen

⇓

vodna para se useda na gibajočih se ionih in tvori vodne kapljice (kondenzacija)

⇓

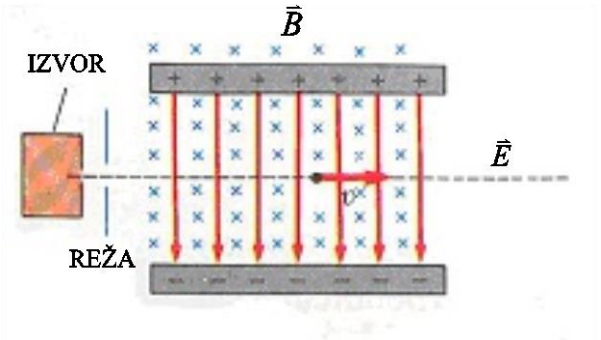
sledovi nabitih delcev lahko tako postanejo **vidni**



$\odot$
$\vec{B}$ magnetno polje

Bubble chamber photograph. The spiral tracks at the bottom of the photograph are an electron – positron pair (left an right respectively), formed by a gamma ray interacting with a hydrogen nucleus. An applied magnetic field causes the electron and the positron to be defected in opposite directions. The track leaving from the cusp between the two spirals is an additional electron knocked out of a hydrogen atom during this interaction. (G. Holton, F.J. Rutherford, F.G. Watson, Project Physics, New York, HRW, 1981) .

8.2.2 SELEKTOR HITROSTI (izbira delcev z enako hitrostjo)



$e\vec{v}\times\vec{B}$ (magnetna sila)

$+e$ (pozitivno nabit delec)

$e\vec{E}$ (električna sila)

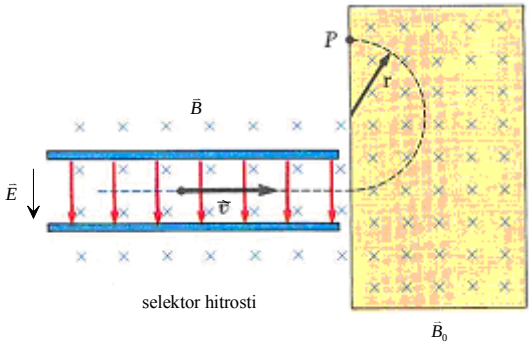
$$evB = eE \Rightarrow \boxed{v = \frac{E}{B}}$$

8.2.3 CIKLOTRON

2 votli elektrodi D_1, D_2 v evakuiranem prostoru. V elektrodah ni električnega polja!

$$\vec{v} \perp \vec{B} \;\Rightarrow\; \text{gibanje po krogu}$$
$$\left(\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}\right) \perp d\vec{s} \Rightarrow dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \;\Rightarrow W_k = \text{konst.}$$

8.2.4 MASNI SPEKTROMETER



Masni spektrometer: nabiti delec gre najprej skozi selektor hitrosti (magnetno polje $\vec{B}$, električno polje $\vec{E}$). Ko vstopi v področje z magnetnim poljem $\vec{B}_0$, se začne nabiti delec gibati po krožnem tiru s polmerom r. Fotografski film zadane v točki P. (iz Serway: Physics)

Selektor hitrosti: $evB = eE \;\Rightarrow\; \boxed{v = \frac{E}{B}}$ (8.2.1)

Newtonov zakon:

$$ma_r = evB_0$$
$$m\frac{v^2}{r} = evB_0$$
$$\Downarrow$$

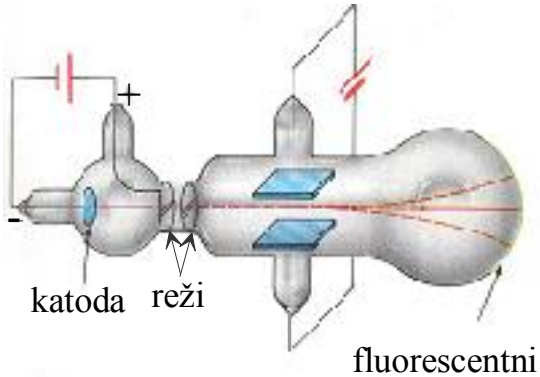
$$\boxed{r = \frac{m v}{e B_0}} \qquad (8.2.2)$$

$$r = \frac{m v}{e B_0} = \frac{m E}{e B_0 B} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{m}{e} = \frac{r B_0 B}{E}}$$, kjer smo upoštevali enačbo (8.2.1)

○ **Thomsonov aparat za merjenje razmerja** $\frac{e}{m}$ (specifični naboj)

katodni žarki ≡ elektroni

Thomson: $\frac{e}{m} \sim 0.77 \cdot 10^{11} \frac{\text{As}}{\text{kg}}$



Odkritelj elektrona
J.J. Thomson (1856-1940)

fluorescentni premaz
na zaslonu

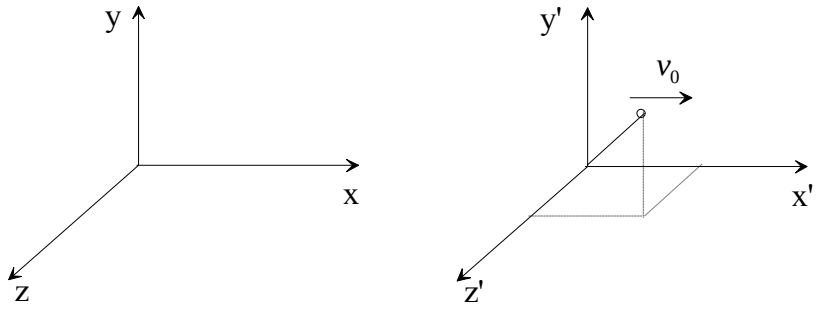
Thomsonov eksperimentalni sistem za merjenje razmerja *e/m* (Serway, 1992).

8.3 POSEBNA TEORIJA RELATIVNOSTI

8.3.1 ČAS V KLASIČNI FIZIKI

- **Predpostavka o univerzalnem času**

$$\boxed{t = t'}$$



- inercialni koordinatni sistem: $\vec{v} = \text{konst.}$
- **inercialni sistem S:** (x, y, z) ≡ mirujoči koordinatni sistem
- **inercialni sistem S':** (x', y', z') ≡ gibajoči se koordinatni sistem (hitrost v_0)

GALILEJEVA TRANSFORMACIJA:

$$x' = x - v_0 t$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

$$v' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(x - v_0 t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - v_0 = v - v_0$$

$$\boxed{v' = v - v_0}$$

- hitrosti se seštevajo (ni zgornje meje!)
- oblika zakonov (Newtonovih zakonov) je **neodvisna** od hitrosti premikanja koordinatnega sistema.

8.3.2 ENAČBE POSEBNE TEORIJE RELATIVNOSTI

A. Einstein (1905 – annus mirabilis)

Dve glavni načeli:

1. **Načelo relativnosti:** fizikalni zakoni imajo enako obliko v vseh inercialnih opazovalnih sistemih.
2. **Hitrost svetlobe** v praznem prostoru $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ je enaka v vseh inercialnih opazovalnih sistemih.

LORENTZOVA TRANSFORMACIJA:

$$x' = \gamma_0 (x - v_0 t) = \gamma_0 \left(x - \frac{v_0}{c_0} c_0 t \right) \tag{8.3.1}$$

$$y' = y \tag{8.3.2}$$

$$z' = z \tag{8.3.3}$$

$$c_0 t' = \gamma_0 \left(c_0 t - \frac{v_0}{c_0} x \right) \tag{8.3.4}$$

$$\boxed{\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c_0^2}}}} \tag{8.3.5}$$

- Vsak inercialni sistem ima svoj **lastni čas.**

OBRATNA LORENTZOVA TRANSFORMACIJA

$$x = \gamma_0 \left(x' + \frac{v_0}{c_0} c_0 t' \right) \tag{8.3.6}$$

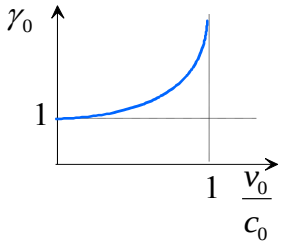
$$y = y' \tag{8.3.7}$$

$$z = z' \tag{8.3.8}$$

$$c_0 t = \gamma_0 \left(c_0 t' + \frac{v_0}{c_0} x' \right) \tag{8.3.9}$$

Zahteva, da preide nova Lorentzova transformacija pri majhnih hitrostih v **GALILEJEVO TRANSFORMACIJO** je izpolnjena:

$$\gamma_0 = \frac{1}{\left(1-\frac{v_0^2}{c_0^2}\right)^{1/2}} \underset{\frac{v_0}{c_0}\to 0}{\cong} 1+\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{c_0^2}+.... \to 1$$



DODATEK: Izpeljava γ_0 (enačba (8.3.5)) in enačbe (8.3.4)

Na osnovi enačb (8.3.1) in (8.3.6):

$$x' = \gamma_0 (x - v_0 t), \qquad (8.3.D1)$$

$$x = \gamma_0 (x' + v_0 t'), \qquad (8.3.D2)$$

in načelo o invariantnosti svetlobne hitrosti

$$c_0 = c_0' \qquad (8.3.D3)$$

lahko izpeljemo vrednost γ_0 kot sledi. Najprej vstavimo x' iz enačbe (8.3.D1) v enačbo (8.3.D2):

$$x = \gamma_0 \left[\gamma_0 (x - v_0 t) + v_0 t'\right] = \gamma_0^2 x - \gamma_0^2 v_0 t + \gamma_0 v_0 t' , \qquad (8.3.D4)$$

torej:

$$\gamma_0 v_0 t' = x\left(1-\gamma_0^2\right) + \gamma_0^2 v_0 t. \qquad (8.3.D5)$$

Iz enačbe (D5) sledi:

$$\boxed{t' = \gamma_0 \left(t - \frac{\left(\gamma_0^2 - 1\right)}{\gamma_0^2 v_0} x \right).} \qquad (8.3.D6)$$

Naredimo še diferencial enačbe (8.3.D6):

$$\mathrm{d}t' = \gamma_0 \left(\mathrm{d}t - \frac{\left(\gamma_0^2 - 1\right)}{\gamma_0^2 v_0} \mathrm{d}x \right) \ . \tag{8.3.D7}$$

V nadaljevanju upoštevamo načelo invariantnosti svetlobne hitrosti $c_0 = c_0'$ (enačba (8.3.D3)) ter diferencialono obliko enačbe (8.3.D1): $\mathrm{d}x' = \gamma_0 \left(\mathrm{d}x - v_0 \, \mathrm{d}t \right)$ in enačbo (8.3.D7) pri računanju hitrosti $v_x' = \mathrm{d}x' / \mathrm{d}t'$, za v_x pa postavimo c_0. Dobimo:

$$c_0' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\gamma_0 \left(\mathrm{d}x - v_0 \mathrm{d}t \right)}{\gamma_0 \left(\mathrm{d}t - \frac{\left(\gamma_0^2 - 1\right)}{\gamma_0^2 v_0} \mathrm{d}x \right)} = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{\left(\gamma_0^2 - 1\right)}{\gamma_0^2 v_0} v_x} = \frac{c_0 - v_0}{1 - \frac{\left(\gamma_0^2 - 1\right)}{\gamma_0^2 v_0} c_0} = c_0 . \tag{8.3.D8}$$

Iz enačbe (8.3.D8) sledi:

$$1 - \frac{\left(\gamma_0^2 - 1\right)}{\gamma_0^2 v_0} c_0 = \frac{c_0 - v_0}{c_0} = 1 - \frac{v_0}{c_0} \ , \tag{8.3.D9}$$

oziroma:

$$\frac{\left(\gamma_0^2 - 1\right)}{\gamma_0^2 v_0} c_0 = \frac{v_0}{c_0} \ . \tag{8.3.D10}$$

Iz enačbe (8.3.D10) lahko izračunamo γ_0:

$$\frac{\gamma_0^2 - 1}{\gamma_0^2} = 1 - \frac{1}{\gamma_0^2} = \frac{v_0^2}{c_0^2} \ , \tag{8.3.D11}$$

$$\frac{1}{\gamma_0^2} = 1 - \frac{v_0^2}{c_0^2} \ ,$$

$$\boxed{\gamma_0^2 = \frac{1}{1 - \frac{v_0^2}{c_0^2}} \ ,} \tag{8.3.D12}$$

oziroma

$$\boxed{\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c_0^2}}} \ .} \tag{8.3.D13}$$

Če vstavimo relacijo (glejte enačbo (8.3.D11))

$$\frac{\gamma_0^2 - 1}{\gamma_0^2} = \frac{v_0^2}{c_0^2}$$

v enačbo (8.3.D6) dobimo:

$$\boxed{t' = \gamma_0 \left(t - \frac{v_0}{c_0^2} x \right),} \qquad (8.3.D14)$$

oziroma enačba (8.3.4):

$$\boxed{c_0 t' = \gamma_0 \left(c_0 t - \frac{v_0}{c_0} x \right)} \qquad (8.3.D15)$$

- **Transformacije hitrosti**

Sledi iz enačb (8.3.1) – (8.3.4):

Infinitezimalna Lorentzova transformacija

$$\mathrm{d}t' = \gamma_0 \left(\mathrm{d}t - \frac{v_0}{c_0^2} \mathrm{d}x \right) \qquad (8.3.10)$$

$$\mathrm{d}x' = \gamma_0 \left(\mathrm{d}x - v_0 \, \mathrm{d}t \right) \qquad (8.3.11)$$

$$\mathrm{d}y' = \mathrm{dy} \qquad (8.3.12)$$

$$\mathrm{d}z' = \mathrm{dz} \qquad (8.3.13)$$

$$v_x' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} \qquad v_y' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} \qquad v_z' = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} \qquad (8.3.14)$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \qquad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \qquad (8.3.15)$$

Iz enačb (8.3.10) – (8.3.15) sledi:

$$v_x^{'}=\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}=\frac{\gamma_0\left(\mathrm{d}x-v_0\mathrm{d}t\right)}{\gamma_0\left(\mathrm{d}t-\frac{v_0}{c_0^2}\mathrm{d}x\right)}=$$

$$=\frac{\mathrm{d}x-v_0\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t-\frac{v_0}{c_0^2}\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-v_0}{1-\frac{v_0}{c_0^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{v_x-v_0}{1-\frac{v_0v_x}{c_0^2}},$$

torej

$$\boxed{v_x^{'}=\frac{v_x-v_0}{1-\frac{v_0v_x}{c_0^2}}} \tag{8.3.16}$$

Podobno lahko dobimo še ostale transformacije za hitrosti**:**

$$v_y^{'}=\frac{v_y}{\gamma_0\left(1-\frac{v_0v_x}{c_0^2}\right)} \tag{8.3.17}$$

$$v_z^{'}=\frac{v_z}{\gamma_0\left(1-\frac{v_0v_x}{c_0^2}\right)} \tag{8.3.18}$$

Obratna transformacija $\left(v_0\rightarrow -v_0\right)$:

$$v_x=\frac{v_x^{'}+v_0}{\left(1+\frac{v_0v_x^{'}}{c_0^2}\right)} \tag{8.3.19}$$

$$v_y=\frac{v_y^{'}}{\gamma_0\left(1+\frac{v_0v_x^{'}}{c_0^2}\right)} \tag{8.3.20}$$

$$v_z=\frac{v_z^{'}}{\gamma_0\left(1+\frac{v_0v_x^{'}}{c_0^2}\right)} \tag{8.3.21}$$

- transformacija vsebuje NAČELO O INVARIANTNOSTI SVETLOBNE HITROSTI v praznem prostoru $c_0=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}$:

$$v_x=\frac{c_0+v_0}{1+\frac{v_0c_0}{c_0^2}}=\frac{c_0+v_0}{1+\frac{v_0}{c_0}}=\frac{c_0\left(c_0+v_0\right)}{\left(c_0+v_0\right)}=c_0$$

FORMALIZEM: 4-razsežni prostor - čas

Svetovni četverec definiran kot:

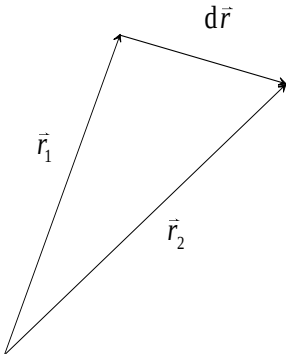
$$^4x=(c_0t,x,y,z)=(c_0t,\vec{r})$$

Lorentzova transformacija:

$$\begin{aligned} c_0t' &= \gamma_0\left(c_0t-\beta x\right)\\ x' &= \gamma_0\left(x-\beta c_0 t\right)\\ y' &= y\\ z' &= z \end{aligned}$$

kjer je $\beta=\frac{v_0}{c_0}$

- **Klasična** 3-D slika: Razdalja med dvema točkama $dr=\sqrt{d\vec{r}\cdot d\vec{r}}$ je neodvisna od izbire opazovalnega sistema. Pravimo, da je $dr^2=d\vec{r}\cdot d\vec{r}$ invarianta.



- **Specialna teorija relativnosti**

Invarianta je:

$$ds^2=-c_0^2dt^2+dx^2+dy^2+dz^2=-c_0^2\,dt'^2+dx'^2+dy'^2+dz'^2\ . \qquad (8.3.22)$$

Novost: **negativni znak pred prvim členom, klasično je namreč**

$$dr^2=\ dx^2+dy^2+dz^2=d\vec{r}\cdot d\vec{r}\ .$$

- **Skrčenje dolžin**

Inercialna opazovalna sistema S in S':

$$\text{S}:\quad \left.\begin{array}{l}\text{dogodek 1: } t_1=0,\ x_1=0\\ \text{dogodek 2: } t_2=\dfrac{v_0 L}{c_0^2},\ x_2=L\end{array}\right\} \Rightarrow \text{palica miruje v sistemu S:}\quad \mathrm{x}_2-x_1\equiv L$$

Lorentzova transformacija:

$$\text{S}':\quad \left.\begin{array}{l}\text{dogodek 1: } t_1^{'}=0,\ x_1^{'}=0\\ \text{dogodek 2: } t_2^{'}=0,\ x_2^{'}=\dfrac{L}{\gamma_0}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{x}_2^{'}-x_1^{'}=\frac{L}{\gamma_0}=L^{'}$$

ZAKLJUČKI:

izmerjena dolžina je odvisna od hitrosti gibanja koordinatnega sistema,
dogodka sočasna samo, če se dogodita v isti točki,
opazovalcu se zdi gibajoča se palica skrčena:

$$\boxed{L^{'}=\frac{L}{\gamma_0}} \qquad (8.3.23)$$

sočasnost dogodkov je relativen pojem

- **Podaljšanje časa** (inercialna sistema S in S')

$$S:\ \left.\begin{array}{l}\text{prvi dogodek: mesto } x,\ \text{čas } t_1\\ \text{drugi dogodek: mesto } x,\ \text{čas } t_2\end{array}\right\}\ \Delta t=t_2-t_1$$

Lorentzova transformacija:

$$\text{S}':\quad \begin{array}{l} t_1^{'}=\gamma_0\left(t_1-\dfrac{v_0 x}{c_0^2}\right)\\ t_2^{'}=\gamma_0\left(t_2-\dfrac{v_0 x}{c_0^2}\right)\end{array}$$

torej: $t_2^{'}-t_1^{'}=\gamma_0\left(t_2-t_1\right)$

$$\boxed{\Delta t^{'}=\gamma_0\,\Delta t} \qquad (8.3.24)$$

$\Delta t' > \Delta t \Rightarrow$ za gibajočega opazovalca dogodki potekajo počasneje kot za opazovalca, ki miruje ob dogodkih $\rightarrow$ **čas je relativna količina.**
lastni čas $\equiv$ čas, ki ga kaže ura v izbranem koordinatnem sistemu.

ZAKLJUČKI:

Popolna novost specialne teorije relativnosti je, da se **tudi čas transformira.**
Prostor in **čas** sta povezana v skupni **prostor - čas.**
Svetovni četverec popisuje dogodek.

8.3.3 ZAKONI GIBANJA

Na osnovi enačbe (8.3.24) naredimo posplošitev in definiramo lastni časovni razmik z enačbo:

$$\boxed{\mathrm{d}t = \gamma\, \mathrm{d}\tau} \quad , \tag{8.3.25}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} \quad , \tag{8.3.26}$$

kjer je:

$\mathrm{d}t \equiv$ čas, ki ga meri opazovalec, ki opazuje gibanje točkastega telesa
$\mathrm{d}\tau \equiv$ lastni čas (lastni časovni razmik, ki ga izmeri opazovalec, ki se giblje skupaj z opazovanim gibajočim točkastim telesom)

Novost: za hitrost v izrazu (8.3.26) dopuščamo, da **ni** konstantna, kar pomeni, da se telo lahko giblje pospešeno.

- **Četverec hitrosti** ^4v

svetovni četverec $\quad {}^4x = (c_0 t, x, y, z)$ (8.3.27)
odvajamo po lastnem času τ in dobimo četverec hitrosti:

$$ {}^4v = \frac{\mathrm{d}\left({}^4x\right)}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \frac{\mathrm{d}\left({}^4x\right)}{\mathrm{d}t} = \gamma \left(c_0, v_x, v_y, v_z\right), \tag{8.3.28}$$

kjer so

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \quad .$$

Enačbo (8.3.28) zapišemo v vektorski obliki:

$$\boxed{{}^4v=(\gamma c_0,\ \gamma\vec{v})} \tag{8.3.29}$$

kjer je $\vec{v}=\left(v_x,v_y,v_z\right)$.

Pri majhnih hitrostih $\frac{v}{c_0}\to 0$:

$\gamma \to 1$,

torej:

$$\gamma\vec{v} \to \vec{v}\ , \tag{8.3.30}$$
$$\mathrm{d}\tau \to \mathrm{d}t\ . \tag{8.3.31}$$

Opomba:

koordinatni čas (t ali dt) ni skalar ampak komponenta 4-dimenzionalnega vektorja $(c_0t,\ x,\ y,\ z)$. Odvajanje po koordinatnem času d*t* zato **ne** proizvede novega vektorja četverca. Zato odvajamo po lastnem času $(\mathrm{d}\tau)$. Lastni čas (τ) je skalar, ki preide pri majhnih hitrostih v koordinatni čas t.

- **Četverec gibalne količine**

$$\boxed{{}^4P = m_0{}^4v =(m_0\gamma c_0,\ m_0\gamma\vec{v})}\ . \tag{8.3.32}$$

Izraz $m_0\gamma\vec{v}$ zapišemo v obliki:

$$\boxed{\vec{P}=m\vec{v}}\ , \tag{8.3.33}$$

kjer je

$$\boxed{m=m_0\gamma}\ , \tag{8.3.34}$$

$m_0 \equiv$ mirovna ali lastna masa telesa.

Pri majhnih hitrostih $\frac{v}{c_0}\to 0$:

$\gamma \to 1$,

$$m \to m_0\ , \tag{8.3.35}$$
$P\to m_0v$.

Vidimo, da pri majhnih hitrostih *P* preide v klasično gibalno količino $G=m_0v$.

Opomba:

kljub temu, da $v \le c_0$ je lahko relativistična gibalna količina poljubno velika, ker se lahko poljubno veča zaradi naraščajoče vrednosti γ.

- **Polna in lastna energija**

Četverec gibalne količine lahko pišemo tudi kot (glejte enačbo (8.3.32)):

$$^4P = \left(\frac{W}{c_0}, m_0 \gamma \vec{v} \right), \tag{8.3.36}$$

kjer je W **polna** energija delca:

$$\boxed{W = m_0 \gamma c_0^2} \ . \tag{8.3.37}$$

Polna energija je odvisna od hitrosti. Najmanjša polna energija ima delec, ki miruje je $(\gamma = 1)$:

$$\boxed{W_0 = m_0 \ c_0^2} \ , \tag{8.3.38}$$

$W_0 \equiv$ **lastna** ali **mirovna** energija delca. Sedaj definiramo **kinetično** energijo delca kot:

$$\boxed{W_k = W - W_0 = m_0 \gamma c_0^2 - m_0 \ c_0^2 = m_0 \ c_0^2 (\gamma - 1) \ .} \tag{8.3.39}$$

- **Kinetična energija** je torej tisti del polne energije, ki je **posledica gibanja.**

Pri majhnih hitrostih $\left(\frac{v}{c_0} \to 0 \right)$ velja razvoj:

$$W_k = m_0 \ c_0^2 (\gamma - 1) = m_0 \ c_0^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} - 1 \right) \cong m_0 \ c_0^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c_0^2} + ... - 1 \right) \cong \frac{1}{2} m_0 \, v^2 . \tag{8.3.40}$$

Vidimo, da relativistični izraz za kinetično energijo telesa $W_k = m_0 \ c_0^2 (\gamma - 1)$ preide pri $\frac{v}{c_0} \to$ v klasični izraz $W_k = \frac{1}{2} m_0 \, v^2$, ki velja v Newtonovi mehaniki.

- Skalarni produkt četverca gibalne količine $^4P = \left(\frac{W}{c_0}, \vec{P} \right)$ s samim seboj je **invarianta**:

$$^4P \cdot {}^4P = \frac{-W^2}{c_0^2} + P^2 = \text{ invarianta} \ . \tag{8.3.41}$$

V **lastnem sistemu** delec miruje torej je $P = 0$. Iz enačbe (8.3.41) v tem primeru sledi:

$$-\frac{W^2}{c_0^2}+\left(P^2=0\right)=-\frac{m_0^2c_0^4}{c_0^2}=-m_0^2c_0^2. \tag{8.3.42}$$

Ker pa je ${}^4P\cdot{}^4P$ invarianta, velja v splošnem:

$$\boxed{-\frac{W^2}{c_0^2}+P^2=-m_0^2c_0^2} \quad , \tag{8.3.43}$$

oziroma

$$-W^2+c_0^2P^2=-m_0^2c_0^4,$$

ali drugače:

$$\boxed{W^2=W_0^2+c_0^2P^2} \; . \tag{8.3.44}$$

- **Enačbe gibanja**

Newtonova mehanika $\boxed{\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{G}}{\mathrm{d}t}}$, $\vec{G}=m\vec{v}$

Posebna teorija relativnosti $\left({}^4P=\left(\frac{W}{c_0},\vec{P}\right),\ \vec{P}=m\gamma\vec{v}\right)$:

$$\boxed{{}^4F=\frac{\mathrm{d}\left({}^4P\right)}{\mathrm{d}\tau}=\gamma\frac{\mathrm{d}\left({}^4P\right)}{\mathrm{d}t}=\gamma\left(\frac{1}{c_0}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}\right)} \; . \tag{8.3.45}$$

Četverec sile ${}^4F$ na točkasti delec z nabojem e v električnem in magnetnem polju:

$$\boxed{{}^4F=\left(\frac{e\gamma\vec{E}\cdot\vec{v}}{c_0},\ e\gamma\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)\right)} \; . \tag{8.3.46}$$

Izenačimo ločeno časovni in krajevni del med enačbama (8.3.45) in (8.3.46):

- časovni del: $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=e\vec{E}\cdot\vec{v} \;\Rightarrow\; \Delta W=e\int\vec{E}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t=e\int\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-e\Delta\varphi,$ (8.3.47)

  torej $\Delta W+e\Delta\varphi=\Delta\left(W+e\varphi\right)=0,$

  oziroma $W+e\varphi=$ konst.

- krajevni del: $\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=e\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)}$, $\vec{P}=m\gamma\vec{v}$, (8.3.48)

Ohranitvene enačbe:

$$^4F = \frac{\mathrm{d}\left(^4P\right)}{\mathrm{d}\tau} \Rightarrow \Delta^4P = \int {}^4F\,\mathrm{d}\tau$$

če

$$\int {}^4F\,\mathrm{d}\tau = 0 \Rightarrow \Delta^4P = 0$$

$$\boxed{\Delta W = 0}$$ OHRANITEV POLNE ENERGIJE (8.3.49)

$$\boxed{\Delta \vec{P} = 0}$$ OHRANITEV KRAJEVNEGA DELA GIBALNE KOLIČINE (8.3.50)

8.3.4 UPORABA ENAČB GIBANJA SPECIALNE TEORIJE RELATIVNOSTI

Obravnavamo enačbo (8.3.48):

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = e\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right),\ \ \vec{P} = m\gamma\vec{v}}\ .$$

Posebna primera: $\vec{E} = 0$ ali $\vec{B} = 0$

A) Poseben primer: če $\vec{E} = 0$ iz enačbe (8.3.48) sledi (kroženje v magnetnem polju):

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = e\vec{v}\times\vec{B},$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\left(m_0\gamma\vec{v}\right)}{\mathrm{d}t} = e\vec{v}\times\vec{B}}\ , \qquad (8.3.51)$$

ker $e\vec{v}\times\vec{B} \perp \vec{v}, \mathrm{d}\vec{s} \Rightarrow \mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = 0 \Rightarrow v = \text{konst.}$

$\gamma = \text{konst.}$

Torej: $\frac{\gamma\,\mathrm{d}\left(m_0\vec{v}\right)}{\mathrm{d}t} = e\vec{v}\times\vec{B}$,

$\gamma m_0\vec{a}_r = e\vec{v}\times\vec{B}$, kjer je $\vec{a}_r$ radialni pospešek,

$$\gamma m_0\frac{v^2}{r} = evB$$

$$\gamma\, m_0 v = erB \Rightarrow \qquad \boxed{r = \frac{\gamma m_0 v}{eB} = \frac{P}{eB}} \qquad (8.3.52)$$

Obhodni čas: $t_0 = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\gamma m_0 v}{eBv} = \frac{2\pi\gamma m_0}{eB}$

Frekvenca: $\boxed{\nu = \frac{1}{t_0} = \frac{eB}{\gamma 2\pi m_0}}$. (8.3.53)

B) Poseben primer: če $\vec{B} = 0$ iz enačbe (8.3.48) sledi:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\left(m_0 \gamma \vec{v}\right)}{\mathrm{d}t} = e\vec{E}} \quad . \tag{8.3.54}$$

Enačbo (8.3.54) predelamo v obliko:

$$\mathrm{d}\left(m_0 \gamma \vec{v}\right) = e\vec{E}\,\mathrm{d}t . \tag{8.3.55}$$

Če je $\vec{E}$ = konst. velja:

$$m_0 \gamma \vec{v} = \int e\vec{E}\,\mathrm{d}t = e\vec{E}\,t \ , \tag{8.3.56}$$

oziroma

$$\boxed{\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c_0^2}}} = e\,E\,t} \quad . \tag{8.3.57}$$

Iz enačbe (8.3.57) po krajšem računu dobimo za hitrost:

$$v = c_0 \frac{\alpha t}{\sqrt{1+\alpha^2 t^2}} \quad , \tag{8.3.58}$$

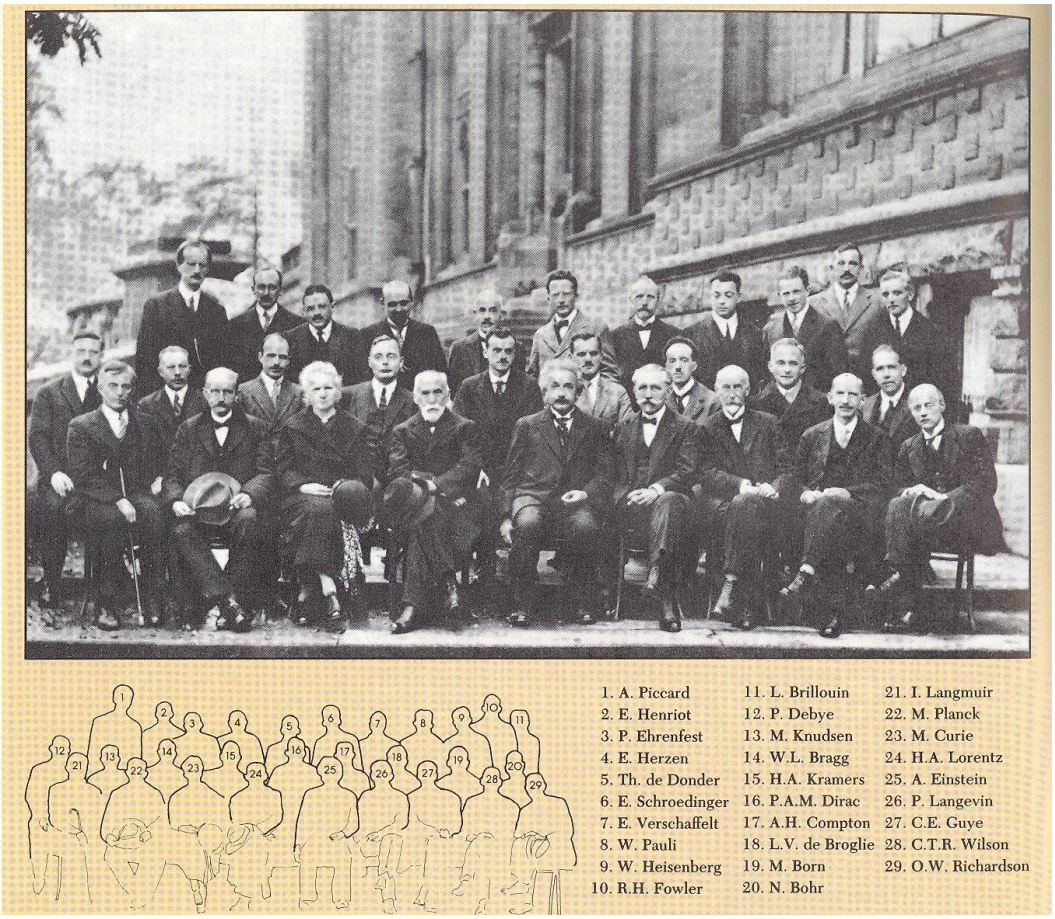
kjer je

$$\alpha = \frac{e\,E}{m_0 c_0} \quad . \tag{8.3.59}$$

Izračunana pot pa je:

$$\boxed{s = \int_0^t v\,\mathrm{d}t = \frac{c_0}{\alpha}\left[\left(\alpha^2 t^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right].} \quad . \tag{8.3.60}$$

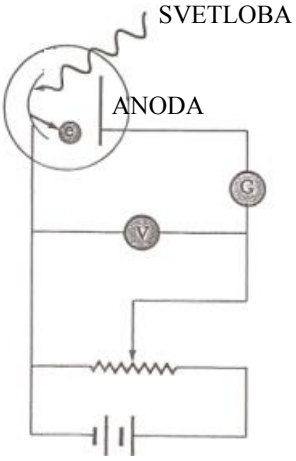
8.4 POJAVI, KI JIH NE MOREMO RAZLOŽITI V OKVIRU KLASIČNE FIZIKE



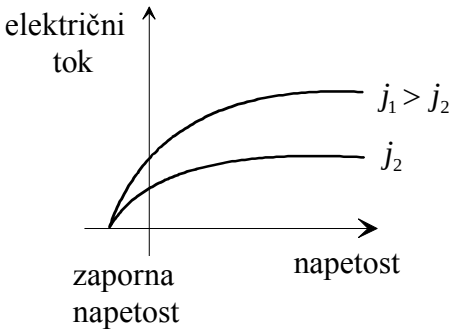
slika: Serway, 1992

8.4.1 FOTOEFEKT

Fotocelica: ⓔ ≡ izbiti elektron



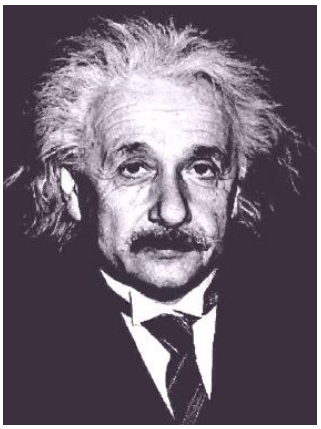
j ≡ gostota svetlobnega toka



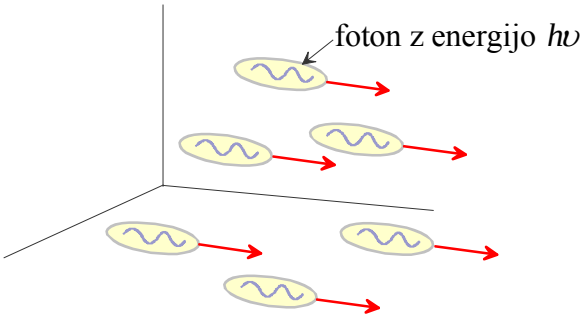
- **energija fotona:** $W_\upsilon = h\upsilon$; $c = \upsilon\lambda$; c = svetlobna hitrost
  υ ≡ frekvenca
  λ ≡ valovna dolžina svetlobe

- **gibalna količina fotona:** $W_\upsilon^2 = W_0^2 + c^2 P_\upsilon^2$; kjer je lastna energija $W_0 = 0$

$$P_\upsilon = \frac{W_\upsilon}{c} = \frac{h\upsilon}{c} = \frac{h}{\lambda}$$



Albert Einstein
(1879 – 1955)



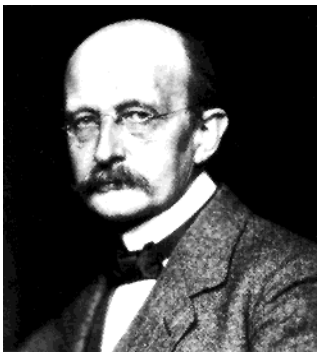
Einsteinova predstava fotona kot
»potujočega energijskega paketa«

Tabela: izstopno delo $A_{iz} = h\upsilon_0$, $\lambda_0 = c_0/\upsilon_0$

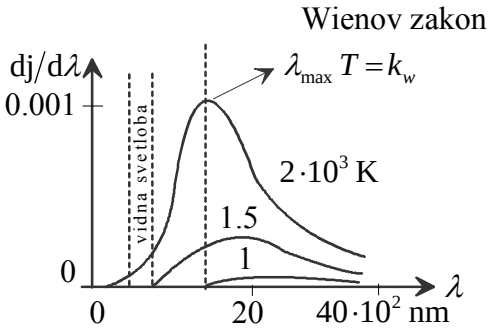
kovina	λ_0
platina	230 nm
volfram, baker	280 nm
srebro	290 nm
aluminij, cink	340 nm
kalij	560 nm

8.4.2 SEVANJE ČRNEGA TELESA

Jožef Stefan
(1835 – 1893)



Max Planck
(1858 - 1947)



Spektri sevanja črnega telesa za različne temperature

$k_w = 2.9 \cdot 10^{-3}$ mK (Wienova konstanta)

$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ Wm^{-2}K^{-4} (Stefanova konstanta)

$h = 6.6 \cdot 10^{-34}$ Js (Planckova konstanta)

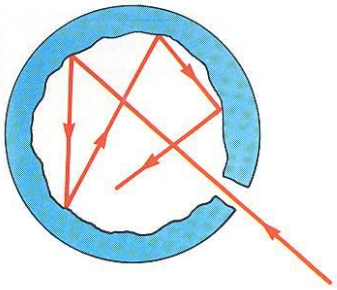
$k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/k (Boltzmannova konstanta)

- **Planck-ov zakon sevanja črnega telesa**

$$\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{2\pi\, hc^2}{\lambda^5} \Big/ \left[e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right]$$

- **Stefanov zakon**

$$j = \sigma T^4$$



Model črnega telesa

8.4.2.1 Izpeljava Stefanovega zakona iz Planck-ovega zakona

Planckov zakon, ki ga izpeljemo v okviru kvantne statistične fizike, podaja porazdelitev gostote energijskega toka izsevanega elektromagnetnega valovanja po valovnih dolžinah:

$$\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{2\pi h c_0^2}{\lambda^5\left(\exp\left(\frac{h c_0}{\lambda k T}\right)-1\right)} \ ,$$

kjer je *h* Planckova konstanta, *j* gostota izsevanega energijskega toka, λ valovna dolžina, *k* Boltzmannova konstanta, c_0 hitrost svetlobe v vakuumu in *T* absolutna temperatura.

Stefanov zakon podaja gostoto izsevanega energijskega toka. Dobimo ga z integracijo Planckovega zakona po valovnih dolžinah:

$$j=\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda=\int_0^\infty \frac{2\pi \mathrm{h}\, \mathrm{c}_0^2 \mathrm{d}\lambda}{\lambda^5\left(\exp\left(\frac{h c_0}{\lambda k T}\right)-1\right)} \ .$$

Uvedemo novo spremenljivko:

$$x=\frac{h c_0}{\lambda k T} \ , \ \mathrm{d}\lambda=-\frac{h c_0}{k T x^2}\mathrm{d}x \ .$$

Zgornji integral potem preide v:

$$j=\frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c_0^2}\int_0^\infty \frac{x^3 \mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}=\frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c_0^2}\ T^4 \ .$$

Vrednost zgornjega integrala poiščemo v tabelah, kjer najdemo

$$\int_0^\infty \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}=\frac{\pi^4}{15} \ .$$

Zgornji izraz preuredimo v bolj znano obliko Stefanovega zakona:

$$j=\sigma T^4$$

kjer je:

$$\sigma=\frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c_0^2}=5.67\times 10^{-8}\,\frac{W}{m^2 K^4}$$

Stefanova konstanta je imenovana po avstro-ogrskem fiziku slovenskega rodu Jožefu Stefanu.

8.4.2.2 Izpeljava Wienovega zakona iz Planck-ovega zakona

Spekter izsevanega elektromagnetnega valovanja ima maksimum pri določeni valovni dolžini. Ta valovna dolžina (λ_m) je odvisna od temperature in to tako, da je produkt valovne dolžine, pri kateri ima spekter maksimum, in absolutne temperature konstanten. Vrednost te konstante izračunamo iz Planckovega zakona. Najprej Planckov zakon zapišemo z novo spremenljivko *x*, ki smo jo definirali prej:

$$\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}\lambda}(x)=\frac{2\pi k^5 T^5}{h^4 c_0^3}\frac{x^5}{\mathrm{e}^x-1}\,.$$

Ekstrem te funkcije poiščemo tako, da odvod po *x* izenačimo z 0. Tako dobimo enačbo:

$$x=5\left(1-e^{-x}\right).$$

To enačbo rešimo numerično, na primer z metodo navadne iteracije. Dobimo:

$$x=\frac{hc_0}{\lambda_m k T}=4.9651\,,$$

oziroma:

$$\lambda_m T=\frac{hc_0}{4.9651k}=k_w=2.898\times10^{-3}\,\mathrm{mK}\,.$$

Enačbi

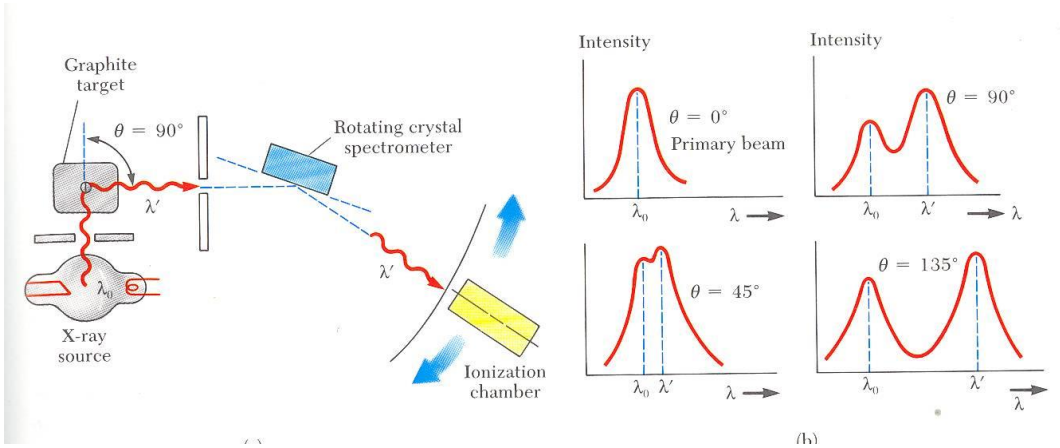
$$\lambda_m T=k_w$$

pravimo **Wienov zakon**, konstanti k_w pa Wienova konstanta.

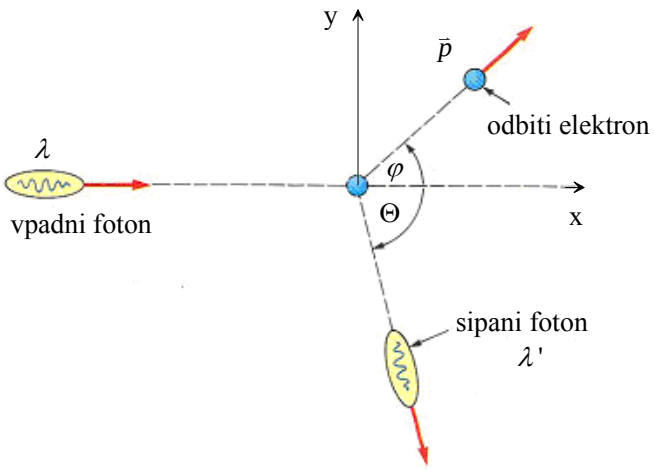
8.4.3 COMPTONSKO SIPANJE

Arthur Holly Compton
(1892 – 1962)

Sipana svetloba (Serway, 1992)



Shema Comptonovega aparata (Serway, 1992)



$\lambda \equiv$ valovna dolžina vpadne kratko valovne Rtg-svetlobe

Ohranitev polne energije

$$h\frac{c}{\lambda} + W_0 = h\,\frac{c}{\lambda'} + W \tag{8.4.1}$$

$h \equiv$ Planckova konstanta
$c \equiv$ hitrost svetlobe v vakuumu
$W_0 \equiv$ lastna energija elektrona
$W \equiv$ polna energija elektrona

- **Ohranitev gibalne količine**

x – os: $\frac{h}{\lambda} = \left(\frac{h}{\lambda'}\right)\cos\Theta + P\cos\varphi$, (8.4.2)

y – os: $\left(\frac{h}{\lambda'}\right)\sin\Theta = P\sin\varphi$ (8.4.3)

Opomba:

Najšibkeje vezani elektroni v atomih so vezani z energijo nekaj eV, zato jih v prvem približku vzamemo za »proste«, to je nevezane delce.

Enačbe (8.4.1) – (8.4.3) zapišemo v obliki:

$$c\left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\right) + W_0 = W \ , \tag{8.4.4}$$

$$\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\cos\Theta = P\cos\varphi \ , \tag{8.4.5}$$

$$\frac{h}{\lambda'}\sin\Theta = P\sin\varphi \ , \tag{8.4.6}$$

in kvadriramo na obeh straneh enačajev:

$$\left[c\left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\right) + W_0\right]^2 = W^2 \ , \tag{8.4.7}$$

$$\left[\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\cos\Theta\right]^2 = P^2\cos^2\varphi \ , \tag{8.4.8}$$

$$\left(\frac{h}{\lambda'}\sin\Theta\right)^2 = P^2\sin^2\varphi \ . \tag{8.4.9}$$

V nadaljevanju enačbo (8.4.7) samo prepišemo, enačbi (8.4.8) in (8.4.9) pa seštejemo in še množimo na obeh straneh enačaja s c^2:

$$\left[c\left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \right) + W_0 \right]^2 = W^2 \quad , \tag{8.4.10}$$

$$c^2 \left[\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \cos\Theta \right]^2 + \left[\frac{h}{\lambda'} \sin\Theta \right]^2 c^2 = c^2 P^2 \quad . \tag{8.4.11}$$

Enačbi (8.4.10) in (8.4.11) zapišemo kot:

$$\left[c\left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \right) + W_0 \right]^2 = W^2 \quad , \tag{8.4.12}$$

$$\left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 c^2 - 2c^2 \left(\frac{h}{\lambda} \right)\left(\frac{h}{\lambda'} \right)\cos\Theta + c^2 \left(\frac{h}{\lambda'} \right)^2 \left[\cos^2\Theta + \sin^2\Theta \right] = c^2 P^2 \quad . \tag{8.4.13}$$

Torej:

$$c^2 \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \right)^2 + 2c\left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \right) W_0 + W_0^2 = W^2 \quad , \tag{8.4.14}$$

$$\left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 c^2 - 2c^2 \left(\frac{h}{\lambda} \right)\left(\frac{h}{\lambda'} \right)\cos\Theta + c^2 \left(\frac{h}{\lambda'} \right)^2 = c^2 P^2 \quad . \tag{8.4.15}$$

Enačbi (8.4.14) in (8.4.15) med sabo odštejemo in upoštevamo še zvezo $W^2 - c^2 P^2 = W_0^2$. Tako dobimo:

$$-2c^2 \left(\frac{h}{\lambda} \right)\left(\frac{h}{\lambda'} \right) + 2c\left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \right) W_0 + 2c^2 \left(\frac{h}{\lambda} \right)\left(\frac{h}{\lambda'} \right)\cos\Theta = 0 \quad ,$$

oziroma

$$2ch \frac{(\lambda' - \lambda)}{\lambda\lambda'} W_0 = 2c^2 \left(\frac{h}{\lambda} \right)\left(\frac{h}{\lambda'} \right)(1 - \cos\Theta) \quad ,$$

ali

$$\boxed{\lambda' - \lambda = \frac{hc}{W_0}(1 - \cos\Theta)} \tag{8.4.16}$$

Enačbo (8.4.16) imenujemo **Compton-ova enačba**, konstanto

$$\boxed{\lambda_c = \frac{hc}{W} = 0.0024\, nm} \tag{8.4.17}$$

pa **Compton-ova valovna dolžina,** torej:

$$\boxed{\lambda' - \lambda = \lambda_c \left(1 - \cos\Theta\right)} \qquad (8.4.18)$$

Enačbe (8.4.18) ne moremo izpeljati v okviru klasične fizike.

Opomba:

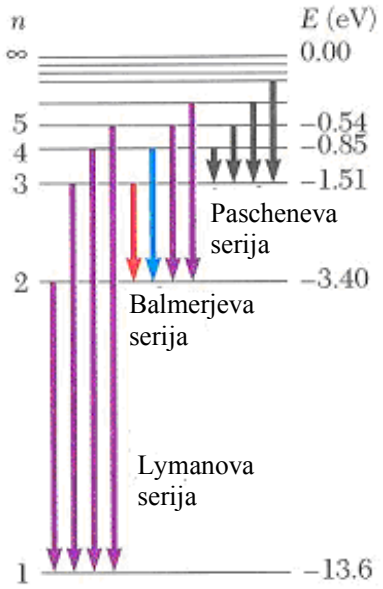
Elektron v resnici absorbira foton z valovno dolžino λ in takoj za tem odda foton z nekoliko večjo valovno dolžino λ'.

8.4.4 ATOMSKI ČRTASTI SPEKTRI

Niels Bohr
(1885 – 1962)

- **Energijski nivoji vodikovega atoma so diskretni:**

$$\boxed{E_n = -\frac{13.6\ \text{eV}}{n^2}} \qquad n = 1, 2, 3, ... \qquad (8.4.19)$$



- Valovna dolžina izsevane svetlobe pri prehodih elektrona iz višjega v nižji energijski nivo za vodikov atom:

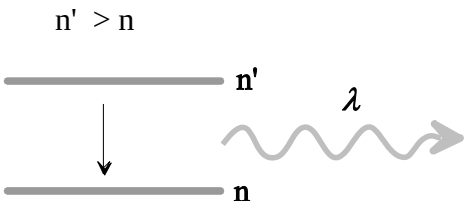
$$h\upsilon = -13.6\,\mathrm{eV}\left(\frac{1}{\mathrm{n}'^2}-\frac{1}{n^2}\right),$$

$$h\frac{c_0}{\lambda} = 13.6\,\mathrm{eV}\left(\frac{1}{\mathrm{n}^2}-\frac{1}{n'^2}\right),$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{13.6\,\mathrm{eV}}{hc_0}\left(\frac{1}{\mathrm{n}^2}-\frac{1}{n'^2}\right),$$

torej:

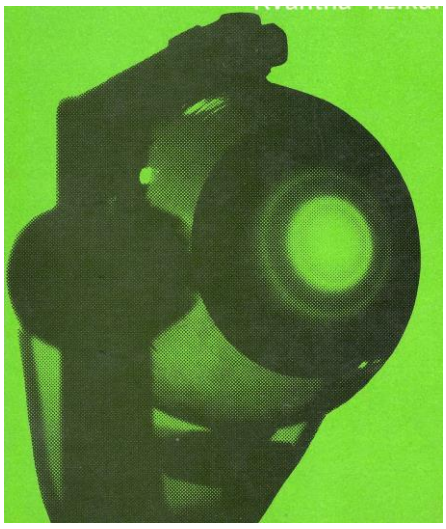
$$\boxed{\frac{1}{\lambda} = R_y\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n'^2}\right)} \qquad (8.4.20)$$



kjer je $R_y = \frac{13.6\,\mathrm{eV}}{hc_0} = 1.09678\cdot 10^7\ m^{-1}$. Konstanti R_y pravimo Rydbergova konstanta.

8.4.5 INTERFERENČNI POJAVI PRI ELEKTRONIH

Interferenčni kolobarji curka elektronov:



slika: J. Strnad, Fizika II

Louis de Broglie
(1892 – 1987)

Fotoni:

$$W^2 = W_0^2 + c^2 P^2$$

$$W_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{W}{c} = \frac{h\upsilon}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

$$\boxed{P = \frac{h}{\lambda}}$$

$$P = \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k$$

$$W = h\upsilon = \frac{h}{2\pi}\, 2\pi\upsilon = \hbar\omega$$

$$\boxed{\begin{aligned} P &= \hbar k \\ W &= \hbar\omega \end{aligned}}$$

$P \equiv$ gibalna količina fotona

$W \equiv$ energija fotona

Elektroni:

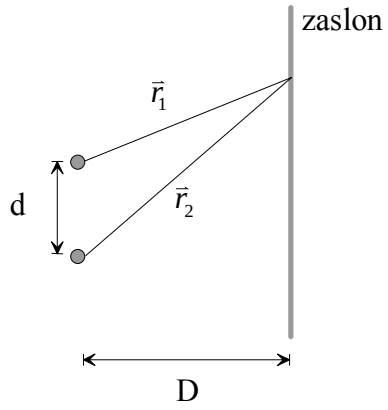
$$\boxed{\lambda_B = \frac{h}{P} = \frac{h}{mv}}$$ de Broglie-eva valovna dolžina

$m \equiv$ masa elektrona

$v \equiv$ hitrost elektrona

Interferenca dveh koherentnih EM valovanj:

Gostota energijskega toka EM valovanja v vakuumu: $\vec{j} \propto \left|E_1 + E_2\right|^2$



$$\boxed{\begin{aligned} E_1 &= E_0\, e^{i(kr_1 - \omega t)} \\ E_2 &= E_0\, e^{i(kr_2 - \omega t)} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} e^{i\alpha} &= \cos\alpha + i\sin\alpha \\ e^{-i\alpha} &= \cos\alpha - i\sin\alpha \end{aligned}}$$

$$\boxed{E_1 = E_0 \cos\left(kr_1 - \omega t\right)} \quad , \quad \boxed{E_2 = E_0 \cos\left(kr_2 - \omega t\right)}$$

$$\left|E_1 + E_2\right|^2 = \left(E_1 + E_2\right)\left(E_1 + E_2\right)^* = \left(E_1 + E_2\right)\left(E_1^* + E_2^*\right) =$$

$$= E_1E_1^* + E_2E_2^* + E_1E_2^* + E_1^*E_2 = E_0^2\left(2 + e^{ik(r_1 - r_2)} + e^{-ik(r_1 - r_2)}\right) =$$

$$= 4E_0^2 \cos^2\left[\frac{k\left(r_1 - r_2\right)}{2}\right]$$

Pogoj za maksimum (svetle interferenčne proge):

$$\frac{k\left(r_1 - r_2\right)}{2} = n\pi \Rightarrow r_1 - r_2 = \frac{n\,2\pi}{k}, n = 0,\, 1,\, 2$$

VALOVNA FUNKCIJA ZA DELEC (funkcija stanja)

- **Fotoni :** $\boxed{P=\hbar k \quad W=\hbar\omega}$ $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ $c=\upsilon\lambda$

$\boxed{E=E_0 e^{i(kx-\omega t)}}$

povprečje ni odvisno od frekvence $\boxed{\bar{j}=\bar{w}c=\varepsilon_0\overline{E^2}c=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 c}$

- **Delci:** po zgledu fotonov poskusimo zapisati **valovno funkcijo** za curek delcev z **določeno gibalno** količino (*P*) v smeri x:

$\Psi_p(x,t)\propto e^{i(kx-\omega t)}$

$\boxed{P=\hbar k} \rightarrow \boxed{k=\frac{P}{\hbar}=\frac{mv}{\hbar}}$ $\left(k=\frac{2\pi}{\lambda_B}=\frac{P\,2\pi}{h} \Rightarrow \lambda_B=\frac{h}{P}=\frac{h}{mv}\right)$

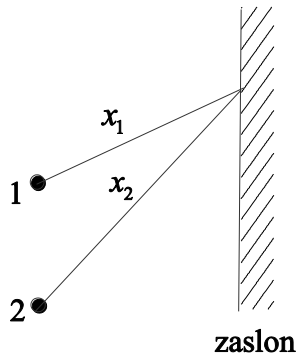
$\boxed{W=\hbar\omega} \Rightarrow \boxed{\omega=\frac{W}{\hbar}}$ $\boxed{W=W_{kin}+W_{pot}}$

torej:

$$\boxed{\Psi_P(x,t)\propto e^{i\left(\frac{P}{\hbar}x-\frac{W}{\hbar}t\right)}=e^{i(px-Wt)/\hbar}}$$

Z uporabo $\Psi_p(x,t)$ lahko opišemo interferenčni poskus z elektroni:

- curek elektronov iz oddaljenega izvira z **določeno** gibalno količino razdelimo na **dva** delna curka z isto gibalno količino *p* in energijo W.



verjetnostna gostota elektronov na zaslonu $\boxed{\rho \propto \Psi^* \Psi}$ (po analogiji z EM valovanjem kjer je $\bar{j} \propto E^* E$):

curek1: $\Psi_p(x_1) \propto e^{ipx_1/\hbar} \cdot e^{-i\frac{W}{\hbar}t}$

curek 2: $\Psi_p(x_2) \propto e^{ipx_2/\hbar} \cdot e^{-i\frac{W}{\hbar}t}$

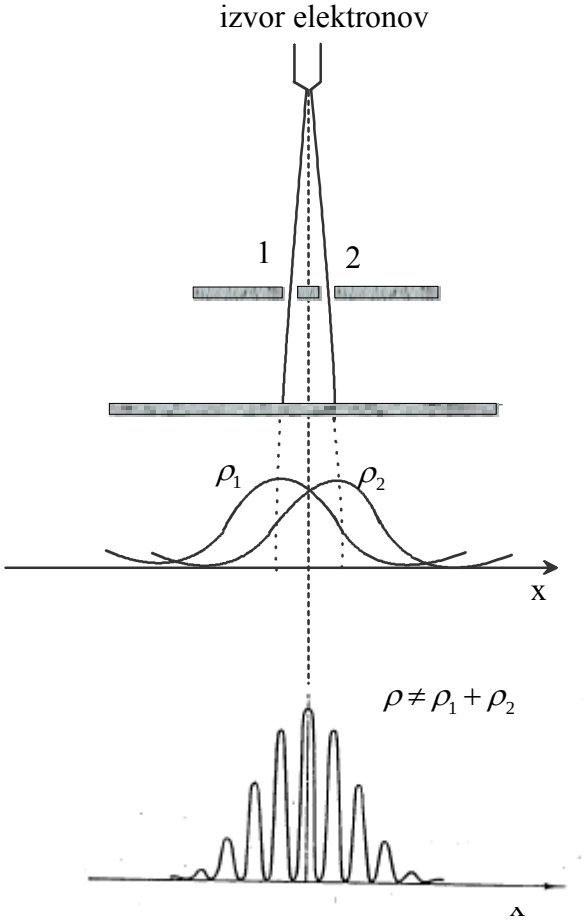
skupno: $\Psi = \Psi_p(x_1) + \Psi_p(x_2)$

$$\rho = \left[\Psi_p(x_1) + \Psi_p(x_2)\right]^* \left[\Psi_p(x_1) + \Psi_p(x_2)\right] \propto$$
$$\propto \quad 2\left[1 + \cos\left[(x_2 - x_1)\, p/\hbar\right]\right] = 4\cos^2\left[\frac{1}{2}(x_2 - x_1)\, p/\hbar\right]$$

- pogoj za maksimum (ojačanje):

$$\frac{1}{2}(x_2 - x_1)\, p/\hbar = n\pi \;\Rightarrow x_2 - x_1 = \frac{n 2\pi\hbar}{p}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Uklon curka elektronov na dveh režah



Interferenčni vzorec elektronov pri prehodu skozi dve reži.

$\rho_1 \equiv$ verjetnostna gostota, če bi bila reža 2 zaprta

$\rho_2 \equiv$ verjetnostna gostota, če bi bila reža 1 zaprta

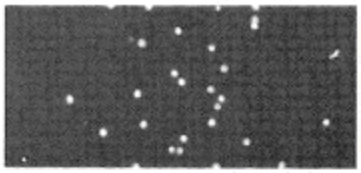
$\rho \equiv$ verjetnostna gostota, če sta obe reži odprti

delež elektronov v pasu med $x-\frac{1}{2}\mathrm{d}x$ in $x+\frac{1}{2}\mathrm{d}x$ je:

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = \rho\, dx$$

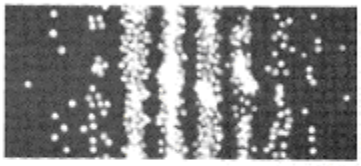
a,b,c: računalniška simulacija (Higgins, 1968)

a



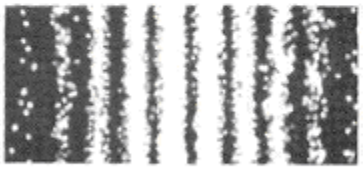
po 28 elektronih

b



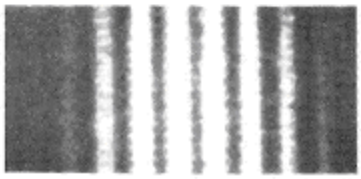
po 1000 elektronih

c



po 10 000 elektronih

d



d: **fotografija** interferenčnega vzorca uklona elektronov na dveh režah (C. Jönsson, Zeitschrift für Physik, 161:454, 1961)