ATOMIKA IN OPTIKA

Aleš Iglič

Ljubljana, 2020

PREDGOVOR

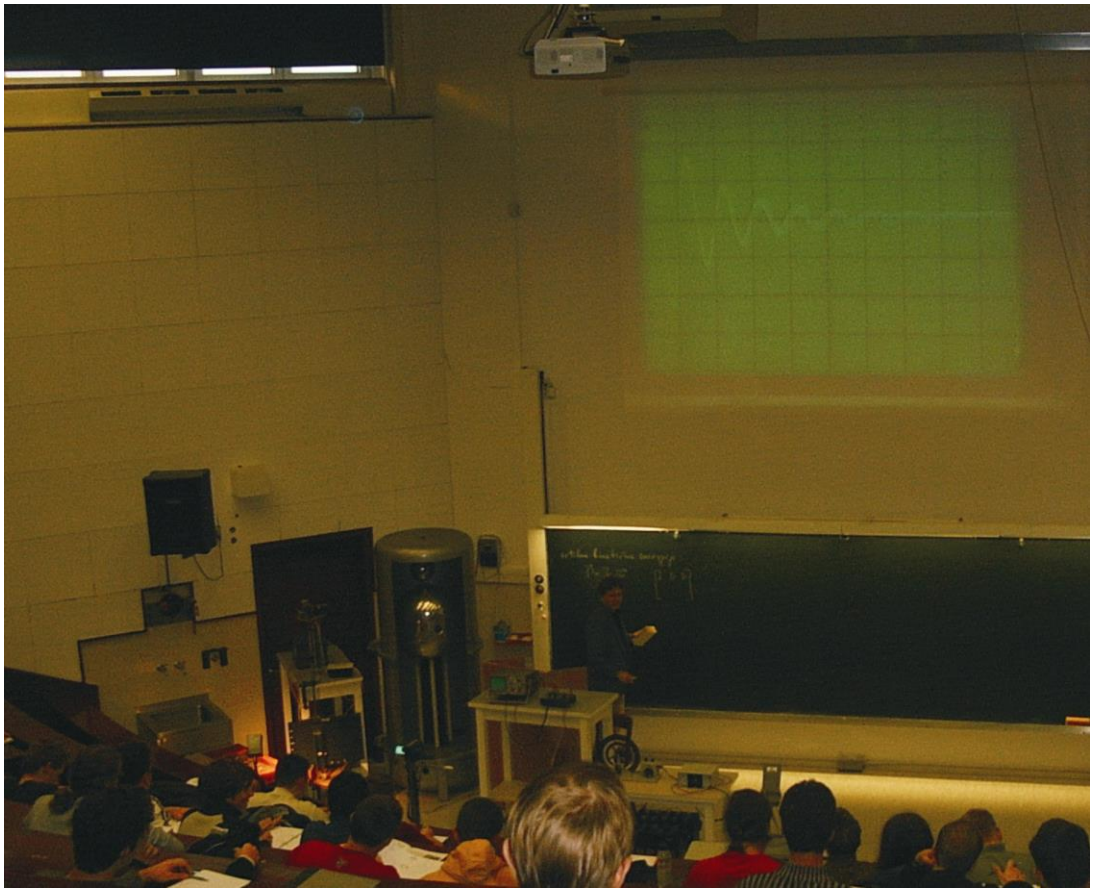
Izdane izpeljave enačb naj bi študentom olajšale razumevanje matematičnega opisa električnih in magnetnih lastnosti snovi, elektromagnetnega valovanja, valovne in geometrijske optike, posebne teorije relativnosti, kvantnih pojavov ter osnov kvantne mehanike. Ob tem pa bi jih tudi delno razbremenila zapisovanja enačb in jim tako omogočila pozornejše spremljanje predavanj ter beleženje opomb. Nekatere težje izpeljave so označene z zvezdico (*). S križcem (+) pa so označena poglavja ali podpoglavja, ki se obdelajo že pri Osnovah elektrotehnike in se zato pri mojih predavanjih le dodatno osvetlijo s prikazi ustreznih demonstracijskih eksperimentov. Soprogi V. Kralj–Iglič sem hvaležen za pripombe in nasvete ter številne diskusije, gospe E. Zupan Debevec in dr. Hani Debevec pa za tipkanje in urejanje teksta ter risanje slik. Za koristne nasvete in pomoč se zahvaljujem recenzentoma prof. T. Slivniku in prof. F. Sevšku.

Aleš Iglič

VSEBINA

1. Maxwellove enačbe	8
1.1 Gaussov zakon	8
1.2 Premikalni tok	11
1.3 Zakon o magnetnem pretoku	14
1.4 Amperov zakon	15
1.5 Faradayev zakon (indukcija)	18
1.6 Lastna induktivnost	22
1.7 Maxwellove enačbe	27
2. Gibanje električnih nabojev	28
2.1 Millikanov poskus	28
2.2 Gibanje prevodniških elektronov v kovini	31
2.3 Hallov pojav	37
3. Snov v električnem polju	39
3.1 Elektrostatska potencialna energija	39
3.2 Snov v električnem polju	44
3.3 Poissonova enačba	58
3.4 Električna dvojna plast	61
3.5 Energija električnega polja	64
3.6 Sila na dielektrik	66
3.7 Sila na točkasti naboj v bližini meje dveh dielektrikov	67
3.8 Influenca	70
4. Snov v magnetnem polju	71
4.1 Navor na tokovno zanko	71
4.2 Klasični model diamagnetizma	76
4.3 Klasični model paramagnetizma	79
4.4 Feromagnetizem	82
4.5 Energija magnetnega polja	91
5. Električni nihajni krogi	92
5.1 Idealni električni nihajni krog	92
5.2 Dušeni električni nihajni krog	94
5.3 Vsiljeno nihanje električnega nihajnega kroga	97
5.4 Moč: izmenični tok	102
6. EM valovanje in svetloba	103
6.1 Elektromagnetno valovanje	103
6.2 Lom: Fermatov princip	108
6.3 Koherentnost izvorov EM valovanj in interferenca	110
6.4 Uklon svetlobe na režah in interferenca	117
6.5 Uklonske slike kristalov	122
6.6 Sprememba faze EM valovanja	125
6.7 Interferenca (odboj) EM valovanja na tankih plasteh	128
6.8 Polarizacija sončne svetlobe	134
6.9 Absorpcija EM valovanja	137
6.10 Odvisnost lomnega količnika od valovne dolžine	139
6.11 Fotometrija	145
7. Optični aparati	150
7.1 Tanke leče	150
7.2 Lupa in mikroskop	153
7.3 Oko	156

8. Relativnostna mehanika in kvantni pojavi	159
8.1 Dimenzije	160
8.2 Meglična celica, ciklotron in masni spektrometer	163
8.3 Posebna teorija relativnosti	163
8.4 Pojavi, ki jih ne moremo razložiti v okviru klasične fizike:	177
- fotoefekt	177
- sevanje črnega telesa	178
- Comptonsko sipanje	182
- atomski črtasti spektri	185
- interferenčni pojavi pri elektronih	186
9. Osnove kvantne mehanike	191
9.1 Načela kvantne mehanike	191
9.2 Schrödingerjeva enačba s časovno odvisnostjo	188
9.3 Schrödingerjeva enačba brez časovne odvisnosti	200
9.4 Delec v neskončni potencialni jami	203
9.5 Harmonski oscilator	207
9.6 Vodikov atom	212
9.7 Energijski pasovi v kristalih	230
Literatura	236



Predavanja iz fizike za študente elektrotehnike potekajo v veliki fizikalni predavalnici v Peterlinovem paviljonu, kjer je velika zbirka demonstracijskih eksperimentov, ki se jih prikazuje na predavanjih.

1. Maxwellove enačbe+

1.1 GAUSSOV ZAKON (zakon o električnem pretoku)

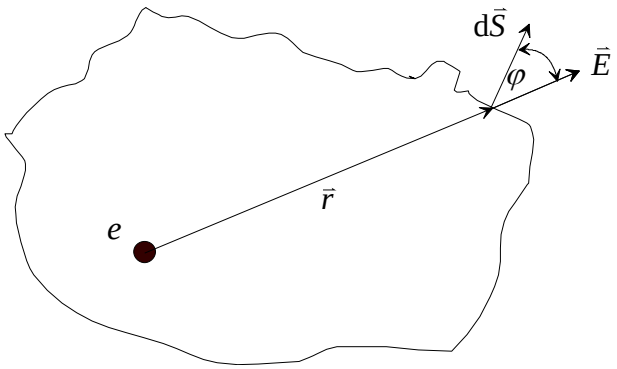
- Gaussov zakon je skladen s Coulombovim zakonom:

$$\vec{F}_{12} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Sila med dvema nabitima točkastima delcema je obratno sorazmerna s kvadratom razdalje med njima .

- Električno polje točkastega delca:

$$\vec{F}_{12} = \vec{E}_1 e_2$$, kjer je $$\vec{E}_1 = \frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$



$\left|\frac{\vec{r}}{r}\right| = 1$, torej je $\frac{\vec{r}}{r}$ enotni vektor.

- Izpeljava Gaussovega zakona za poseben primer točkastega naboja:

$\vec{r}\cdot d\vec{S} = r\,dS\cos\varphi = r\,dS'$, kjer $dS' = dS\cos\varphi$

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Integriramo po **zaključeni ploskvi** znotraj katere se nahaja naboj e:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r} = \oint \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{r\,dS'}{r} = \oint \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS'}{r^2} =$$

$$= \oint \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\oint d\Omega = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi \ ,$$

kjer je $\mathrm{d}\Omega = \frac{dS'}{r^2}$ element prostorskega kota, $\oint \mathrm{d}\Omega = 4\pi$ pa poln prostorski kot. Vidimo, da velja:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = e \,,$$

oziroma

$$\boxed{\oint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = e} \,, \qquad (1.1.1)$$

kjer smo upoštevali $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$. Ker je električno polje aditivno lahko enačbo (1.1.1) posplošimo, za množico točkastih nabojev znotraj **zaključene ploskve** s površino S:

$$\boxed{\oint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_i e_i} \,, \qquad (1.1.2)$$

oziroma, če preidemo na volumsko gostoto naboja $\rho = \rho(\vec{r})$:

$$\boxed{\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho \mathrm{d}V}$$

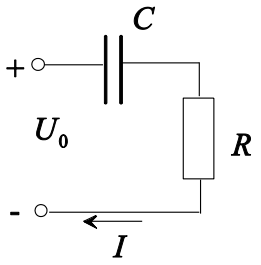
GAUSSOV ZAKON O ELEKTRIČNEM PRETOKU

Van de Graafov generator napetosti

1.2 PREMIKALNI TOK

1.2.1 POLNJENJE KONDENZATORJA

$\boxed{U_0 + U_R + U_C = 0}$, $e = CU_C$

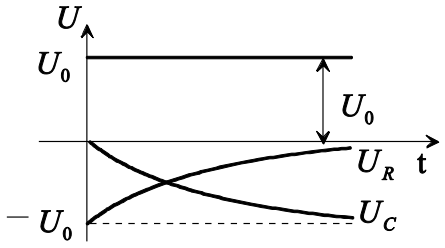


$$U_0 - IR - \frac{e}{C} = 0 \quad / \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

$$-R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - \frac{I}{C} = 0$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC}\,\mathrm{d}t \qquad / \int$$

$$\ln I \Big|_{I_0}^{I} = -\frac{1}{RC} t \Big|_0^t \Rightarrow I = I_0\, e^{-\frac{t}{RC}}$$



$$U_C = -\ U_0 - U_R$$

$$U_C = -\ U_0 + IR = -U_0 + R\ I_0\ e^{-\frac{t}{RC}}$$

velja: $RI_0 = U_o$, ker $U_C(t = 0) = 0$

torej: $U_C = -\ U_0 + U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$

$$\boxed{U_C = -\ U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$$

$\boxed{U_R = -IR = -R\,I_0 e^{-\frac{t}{RC}} = -U_0 e^{-\frac{t}{RC}}}$, kjer smo upoštevali $R\,I_0 = U_0$

1.2.2 PRAZNJENJE KONDENZATORJA SKOZI UPOR

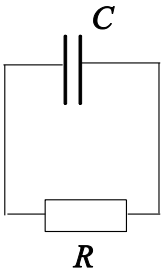
$\boxed{U_C + U_R = 0}$. $e = CU_C$

$$-\frac{e}{C} - I\,R = 0$$

$$-\frac{1}{C}\,\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} - R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$-\frac{I}{C} - R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$$

$\frac{\mathrm{d}I}{I} = -\frac{1}{RC}\mathrm{d}t$, torej



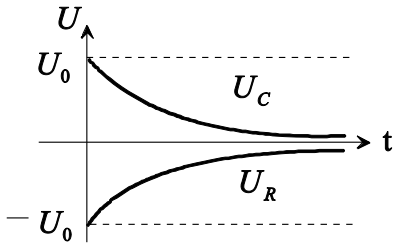
$$\boxed{I = I_0\, e^{-\frac{t}{RC}}}$$

$$U_C = -U_R = I\,R = R\,I_0\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

$\boxed{U_C = U_0\, e^{-\frac{t}{RC}},\ \ U_C > 0}$, kjer smo upoštevali $R\,I_0 = U_0$

$$U_R = -I\,R = -R\,I_0\, e^{-\frac{t}{RC}} = -U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\boxed{U_R = -U_0\, e^{-\frac{t}{RC}}\ \ U_R < 0}$$



1.2.3 PREMIKALNI TOK

- V krogih s kondenzatorjem dosežemo veljavnost kontinuitetne enačbe, če upoštevamo v kondenzatorju premikalni tok:

$$I = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = C\,\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_0\,\frac{S}{d}\,\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_0\, S\,\frac{d\left(\frac{U}{d}\right)}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_0\, S\,\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = S\,\frac{\mathrm{d}\left(\varepsilon_0 E\right)}{\mathrm{d}t} = S\,\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}$$

$$I = S\,\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} \Rightarrow j_p = \frac{I}{S} = \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}$$

- vektorska oblika:

$$\vec{\mathrm{j}}_p = \frac{\mathrm{d}\vec{D}}{\mathrm{d}t}.$$

- v nehomogenem polju velja:

$$I_P = \int \vec{\mathrm{j}}_p \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{S} \qquad \boxed{I_P = \int \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

1.3 ZAKON O MAGNETNEM PRETOKU

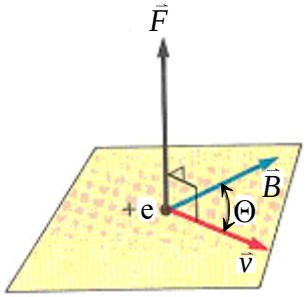
1.3.1 DEFINICIJA GOSTOTE MAGNETNEGA POLJA

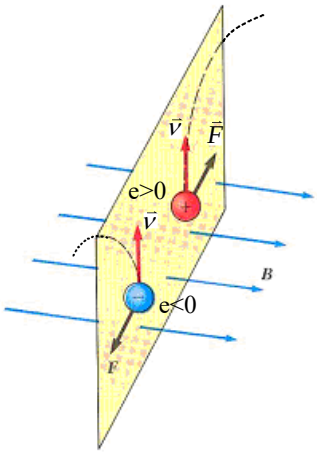
Nikola Tesla
(1856 – 1943)

- Gostoto magnetnega polja $\vec{B}$ definiramo preko sile na gibajoči nabiti delec:

$$\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}$$

smer sile: pravilo desnosučnega vijaka





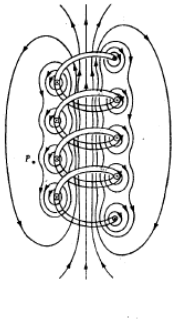
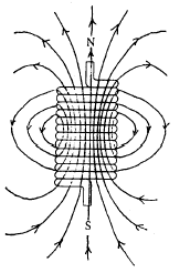
- Enota za B: $B \propto \frac{F}{ev} = \frac{\mathrm{N\,s}}{\mathrm{A\,s\,m}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A\,m}} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{A\,m^2}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{A\,m^2}} = \frac{\mathrm{VAs}}{\mathrm{A\,m^2}} = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m^2}} = 1\mathrm{T}$

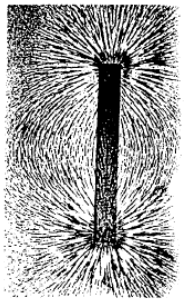
$$\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m^2}} = 1\mathrm{T}\ (\mathrm{Tesla})$$

-

IZVOR	NEVTRONSKA ZVEZDA	ELEKTRO-MAGNET	POVRŠINA ZEMLJE	MEDZVEZDNI PROSTOR
B	10^8 T	10T – 1T	10^{-4} T	10^{-10} T

- Tuljave in permanentni paličasti magnet (primerjava):



- **Sila na vodnik v magnetnem polju**

Sila, ki deluje na nosilce naboja v vodniku se **prenese** na vodnik, ker nosilci ne morejo ubežati iz vodnika.

Sila na točkasti naboj $\boxed{\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}}$

namesto *e* vzamemo infinitezimalni naboj d*e*, ki teče po žici s hitrostjo $\boxed{\vec{v} \equiv \langle \vec{v} \rangle}$

$$\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}e\,\vec{v} \times \vec{B} \quad \leftarrow \{\mathrm{d}e = I\,\mathrm{d}t\}.$$

Sila na odsek vodnika dolžine d*l*:

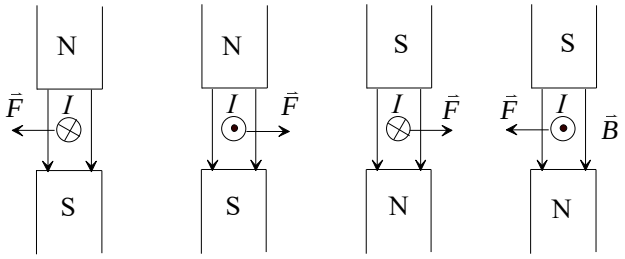
$$\mathrm{d}\vec{F} = \underset{\mathrm{d}\vec{l}}{I\,\mathrm{d}t}\,\vec{v} \times \vec{B} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} \quad \leftarrow \left\{\vec{v}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{l}\right\}$$

Sila na celoten vodnik

$$\boxed{\vec{F} = I\int d\vec{l} \times \vec{B}}$$

Poseben primer: vodnik je raven in polje homogeno:

$$\boxed{\vec{F} = I\,\vec{l} \times \vec{B}}$$



N ≡ severni magnetni pol

S ≡ južni magnetni pol

Če je polje znotraj vodnika nehomogeno:

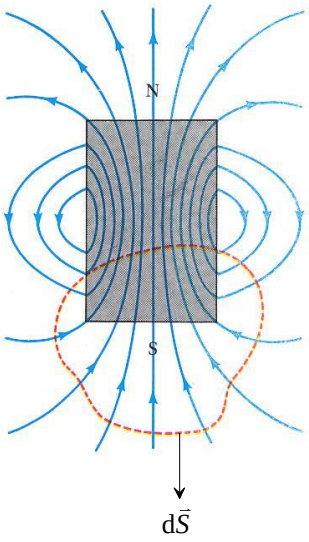
$\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}I\,\vec{l} \times \vec{B} = j\mathrm{dS}\vec{l} \times \vec{B},$ kjer $\mathrm{d}I = j\mathrm{dS}$ in j ploskovna gostota toka.

1.3.2 ZAKON O MAGNETNEM PRETOKU

ni monopolov
ni izvorov
ni ponorov

Magnetni pretok definiramo kot: $\Phi_m = \int \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S}$

N ≡ severni pol
S ≡ južni pol



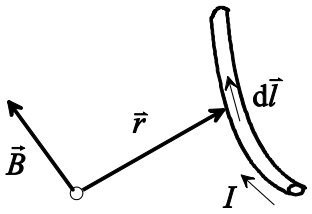
Velja: $\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$

1.4 AMPEROV ZAKON

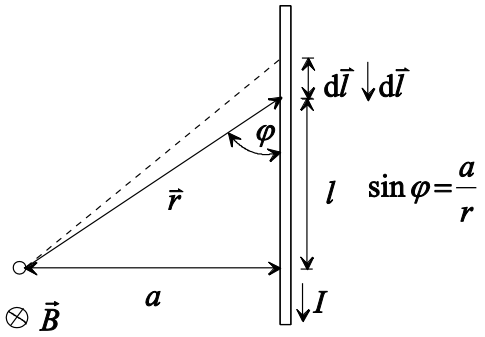
André – Marie Ampère
(1775 – 1836)

- **Biot – Savartov zakon:**

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{\vec{r}\times \mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{r}^3}$$



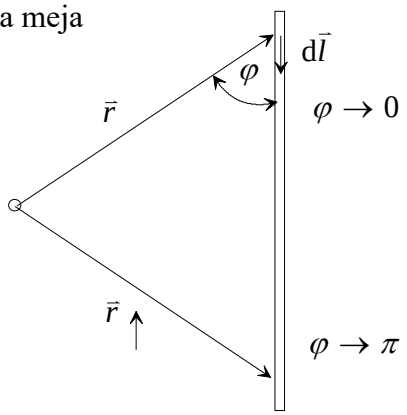
Primer: magnetno polje zelo dolgega ravnega vodnika

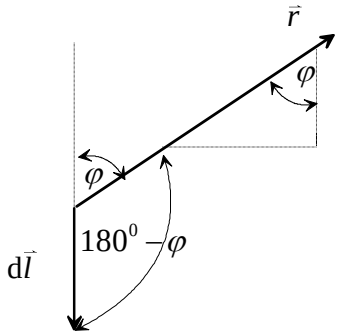


$$\sin\varphi=\frac{a}{r}\quad\Rightarrow\quad r=\frac{a}{\sin\varphi}$$

Velja: $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{l}{a} \Rightarrow l = a\operatorname{ctg}\varphi \Rightarrow$ $\boxed{\mathrm{d}l = \frac{-a}{\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi}$

integracijska meja za kot φ:





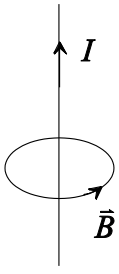
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{r\,\mathrm{d}l\sin\left(180^0-\varphi\right)}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{r\,\mathrm{d}l\sin\varphi}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{\mathrm{d}l\sin\varphi}{r^2} =$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\pi}^{0} \frac{a\,\sin^2\varphi\,\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\sin^2\varphi\;a^2} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\pi}^{0}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(-\cos\varphi\right)\Big|_{\pi}^{0} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\cos\varphi\Big|_{\pi}^{0} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

Opomba: silnice so koncentrični krogi:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}} \qquad (1.4.1)$$



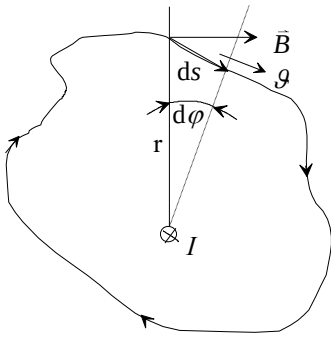
- **Amperov zakon** (zakon o magnetni napetosti po zaključeni poti)

  Poseben primer: enačba (1.4.1)) opisuje magnetno polje dolgega ravnega vodnika.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Izračunajmo integral $\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ po zaključeni poti okrog ravnega vodnika po katerem teče tok *I*:

skica:



Velja:

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint B \underbrace{\mathrm{ds} \cos \vartheta}_{r\,\mathrm{d}\varphi} = \oint \underbrace{B}_{B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}} r\, d\varphi = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r\, d\varphi = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} 2\pi = \mu_0 I \ .$$

vpeljemo jakost magnetnega polja $\boxed{B = \mu_0 H}$ in dobimo:

$\boxed{\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = I}$ Amperov zakon (1.4.2)

Če upoštevamo tudi premikalni tok $I_p = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ dobimo posplošitev:

$$\boxed{\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_S \vec{j}\, \mathrm{d}\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \mathrm{d}\vec{S}} \qquad (1.4.3)$$

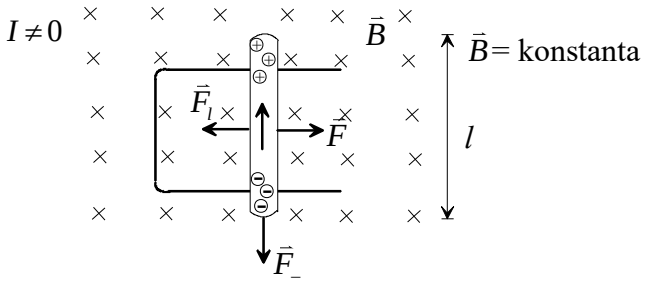
Enačba (1.4.3) predstavlja eno izmed Maxwellovih enačb.

1.5 FARADAYEV ZAKON (indukcija)

Michael Faraday
(1791 – 1867)

1.5.1 INDUKCIJA PRI PREMIKANJU RAVNEGA VODNIKA

Opazimo, da moramo vodnik vleči s silo, čeprav se ta giblje s konstantno hitrostjo.



$\vec{B}$ deluje na nosilce nabojev (elektrone): $\vec{F}_- = -e_0\, \vec{v} \times \vec{B}$

sila na vodnik po katerem teče inducirani tok *I*: $\vec{F}_l = I\, \vec{l} \times \vec{B}$

$\vec{F}$ = zunanja sila, ki vleče v desno

Če je hitrost gibljive prečke $\vec{v}$ = konst., velja:

$$\vec{F} = -\vec{F}_l = -I\, \vec{l} \times \vec{B}\ . \tag{1.5.1}$$

Delo, ki ga opravi zunanja sila $\vec{F}$ je enaka:

$$\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \vec{F} \cdot \vec{v}\, \mathrm{d}t = U_i\, I\ \mathrm{d}t\ , \tag{1.5.2}$$

od koder sledi:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = U_i\, I\ , \tag{1.5.3}$$

kjer je U_i inducirana napetost.

Opomba: delo oddaja voltmeter z upornikom kot Joulov toplotni tok (upor zanke je zanemarljiv).

Iz (1.5.1) in (1.5.3) sledi:

$$-I\left(\vec{l}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{v}=U_i\,I\ , \tag{1.5.4}$$

oziroma

$$\left(\vec{B}\times\vec{l}\ \right)\cdot\vec{v}=U_i\ ,$$

ali

$$\boxed{U_i=\vec{v}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{l}\ \right)}\ . \tag{1.5.5}$$

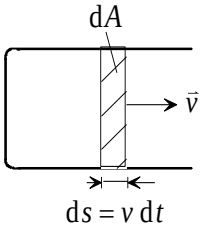
Če je polje nehomogeno in vodnik ni raven enačbo (1.5.5) posplošimo:

$$\boxed{U_i=\int\vec{v}\cdot\left(\vec{B}\times\mathrm{d}\vec{l}\ \right)}\ . \tag{1.5.6}$$

Drugačen zapis enačbe (1.5.6):

$$\begin{aligned}U_i\,\mathrm{d}t&=\vec{v}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{l}\right)\mathrm{d}t=-\overset{\mathrm{d}\vec{s}}{\vec{v}\,\mathrm{d}t}\cdot\left(\vec{l}\times\vec{B}\right)=-\mathrm{d}\vec{s}\cdot\left(\vec{l}\times\vec{B}\right)=\\&=-\vec{B}\cdot\left(\mathrm{d}\vec{s}\times\vec{l}\right)=-\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\ ,\end{aligned} \tag{1.5.7}$$

torej



$$U_i=-\frac{\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t}\ . \tag{1.5.8}$$

Če je $\vec{B}=\text{konst.}$, velja:

$$\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\mathrm{d}\left(\vec{B}\cdot\vec{S}\ \right)=\mathrm{d}\left(\Phi_m\right)$$

in iz enačbe (1.5.8) sledi:

$$\boxed{U_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}}\ . \tag{1.5.9}$$

Enačbo (1.5.9) posplošimo za primer nehomogenega magnetnega polja:

FARADAYEV ali indukcijski zakon

$$\boxed{U_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}}\ , \tag{1.5.10}$$

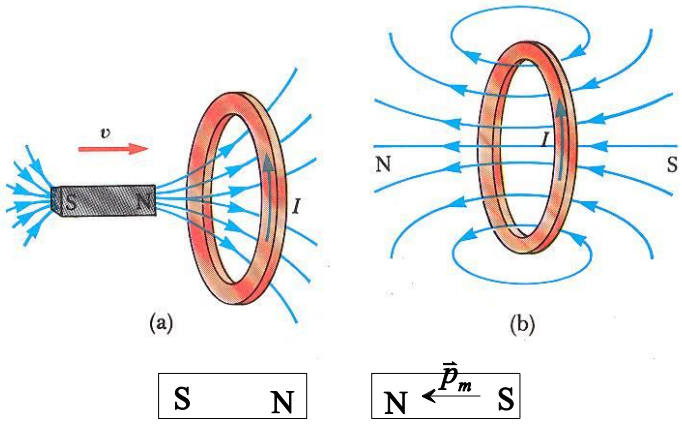
$$\boxed{\Phi_m=\int\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}\ , \tag{1.5.11}$$

oziroma:

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathrm{d}\vec{S} \qquad (1.5.12)$$

1.5.2 LENZOVO PRAVILO

Inducirana napetost požene tok, ki se upira spremembi, ki je inducirano napetost povzročila:



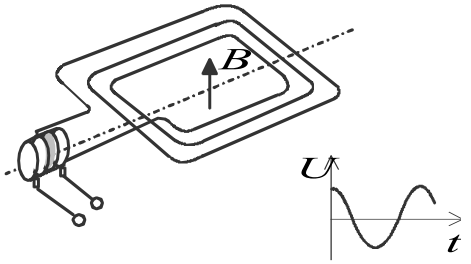
ODBOJNA SILA

$S \equiv$ južni magnetni pol

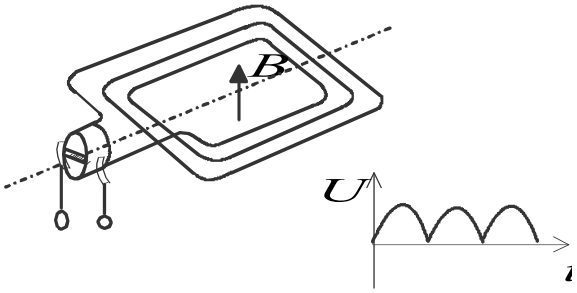
$\mathrm{N} \equiv$ severni magnetni pol

1.5.3 GENERATORJI ELEKTRIČNEGA TOKA

brez komutatorja:



s komutatorjem:



Delo, ki je potrebno za vrtenje generatorja (ploščate tuljave) izmeničnega toka v magnetnem polju *B*:

$$\Phi_m = N\,\vec{B}\cdot\vec{S} = N\,B\,S\cos(\omega t)$$

$$U_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} = N\,B\,S\,\omega\sin(\omega t)$$

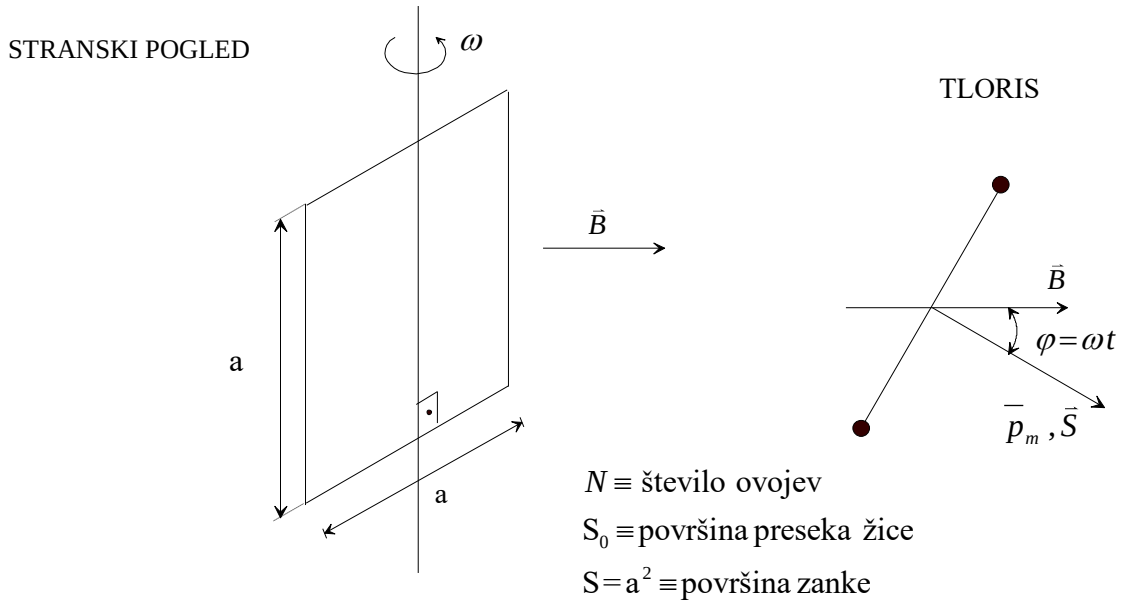
$$I = \frac{U_i}{R} = \frac{N\,B\,S\,\omega}{R}\sin(\omega t)\,, \quad R = \frac{\rho\,4a}{S_0}\,,$$

kjer je R električni upor, ρ specifični upor, S_0 površina preseka žice, ω kotna hitrost, a dolžina stranice zanke, S površina ene zanke in N število zank v ploščati tuljavi.

$$M = p_m\,B\sin(\omega t) = N\,I\,B\,S\sin(\omega t) = \frac{N^2\,B\,S\omega}{R}\,S\,B\sin^2(\omega t) =$$

$$= \frac{N^2\,B^2\,S^2\omega}{R}\sin^2(\omega t)$$

$$A = \int_0^{2\pi} M\,\mathrm{d}\varphi = \frac{N^2\,B^2\,S^2\omega}{R}\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi}_{\pi} = \pi\,\frac{N^2\,B^2\,S^2\omega}{R}$$



$N \equiv$ število ovojev

$S_0 \equiv$ površina preseka žice

$S = a^2 \equiv$ površina zanke

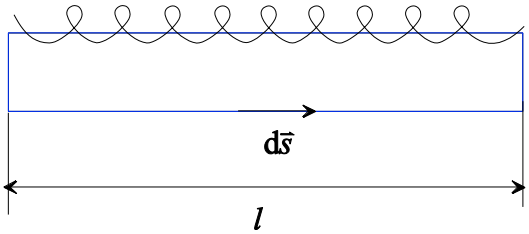
1.6 LASTNA INDUKTIVNOST

1.6.1 DEFINICIJA LASTNE INDUKTIVNOSTI

- **Lastni magnetni pretok** $\boxed{\Phi_m = L\,I}$

$L \equiv$ induktivnost $\left[\mathrm{Vs/A}\right]$

Primer: dolga tuljava z gostimi navoji po kateri teče električni tok I



$l \equiv$ dolžina tuljave

$N \equiv$ število ovojev tuljave

$S \equiv$ površina enega ovoja

predpostavka: magnetno polje je samo znotraj tuljave

- **Amperov zakon**

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{s} \cong H\,l = N\,I\ , \tag{1.6.1}$$

torej

$$H = \frac{N\,I}{l}$$

oziroma

$$\boxed{B = \mu_0 \frac{N\,I}{l}}\ . \tag{1.6.2}$$

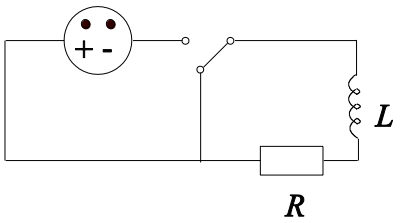
Magnetni pretok skozi tuljavo je zato:

$$\Phi_m = N\,B\,S = N\,\mu_0 \frac{N\,I}{l} S = \mu_0 \frac{N^2\,S}{l} I = L\,I\ , \tag{1.6.3}$$

kjer

$$\boxed{L = \mu_0 \frac{N^2\,S}{l}} \tag{1.6.4}$$

1.6.2 ČASOVNA ODVISNOST TOKA, KI GA POŽENE TULJAVA PO UPORNIKU



$$\Phi_m = L\,I$$

$$U_L = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

L = lastna induktivnost

t < 0: zunanji izvir (U_0) poganja stacionaren tok $I_0 = U_0/R$

t ≥ 0: preklopimo pretikalo

$$U_R + U_L = 0$$

$$-IR - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$$

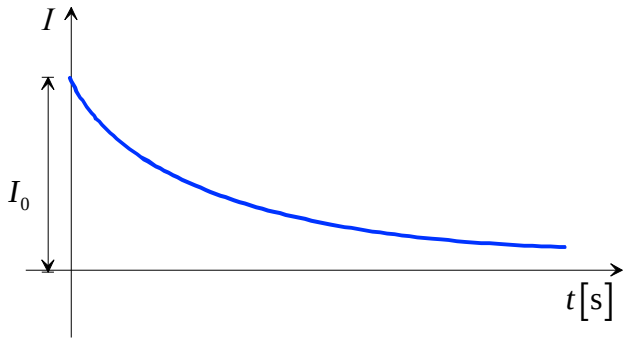
$$\frac{\mathrm{d}I}{I} = -\frac{R}{L}\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}t}{\tau}, \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

časovna konstanta

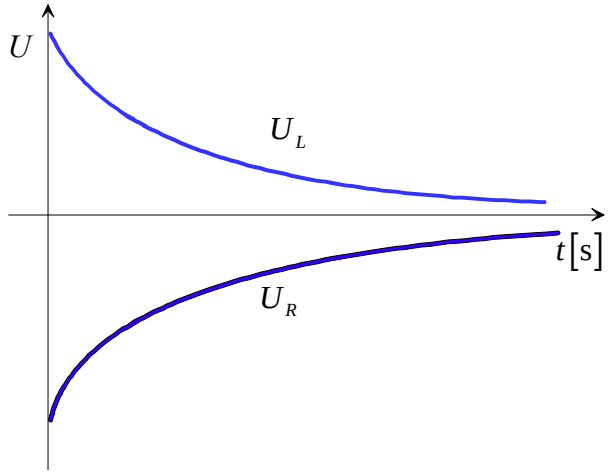
$$I = I_0\,e^{-t/\tau}$$

$$U_L = -U_R = I\,R = R\,I_0\,e^{-t/\tau}$$

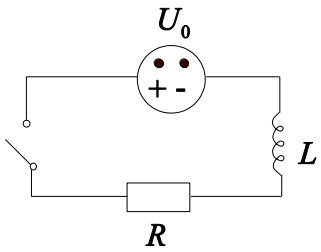
tok:



napetost:



1.6.3 POGANJANJE TOKA SKOZI TULJAVO



$$U_0 + U_R + U_L = 0$$

$$U_0 - IR - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$$

nova spremenljivka:

$$U_0 - IR = x$$

$$-\mathrm{d}I\,R = \mathrm{d}x$$

$$-R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

$$\boxed{t = 0,\ I = 0,\ x = x_0 = U_0}$$

Torej:

$$x+\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0\ ,$$

$$\int_{U_0}^{U_0-IR}\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\int_0^t\frac{R}{L}\mathrm{d}t\ ,$$

$$\ln\frac{U_0-IR}{U_0}=-\frac{t}{\tau}\quad\Rightarrow\left(U_0-IR\right)=U_0\,e^{-t/\tau}\ ,$$

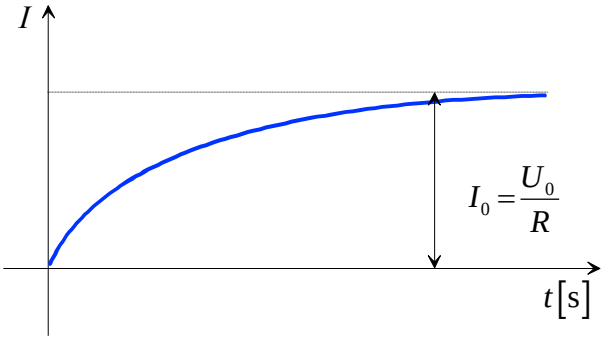
$$R\,I=U_0\left(1-e^{-t/\tau}\right),$$

$$I=\frac{U_0}{R}\left(1-e^{-t/\tau}\right),$$

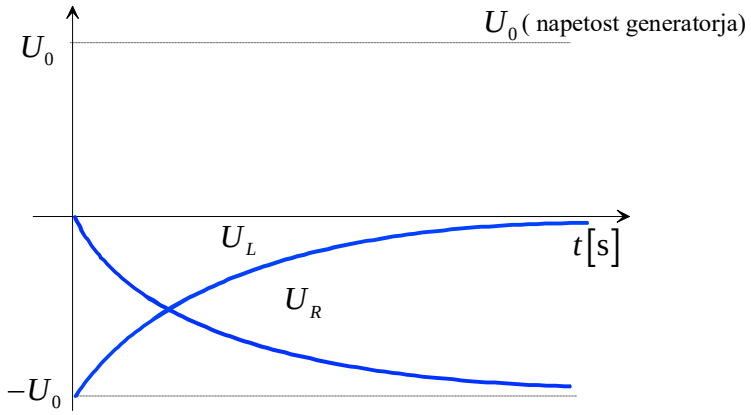
$$\boxed{I=I_0\left(1-e^{-t/\tau}\right)}\ ,\ \text{kjer}\qquad\boxed{I_0=\frac{U_0}{R}}\ .$$

$$\boxed{\begin{aligned}U_R&=-I\,R=-R\,I_0\left(1-e^{-t/\tau}\right)=-U_0\left(1-e^{-t/\tau}\right)\\U_L&=-U_0-U_R=-U_0+U_0-U_0e^{-t/\tau}=-U_0\,e^{-t/\tau}\end{aligned}}$$

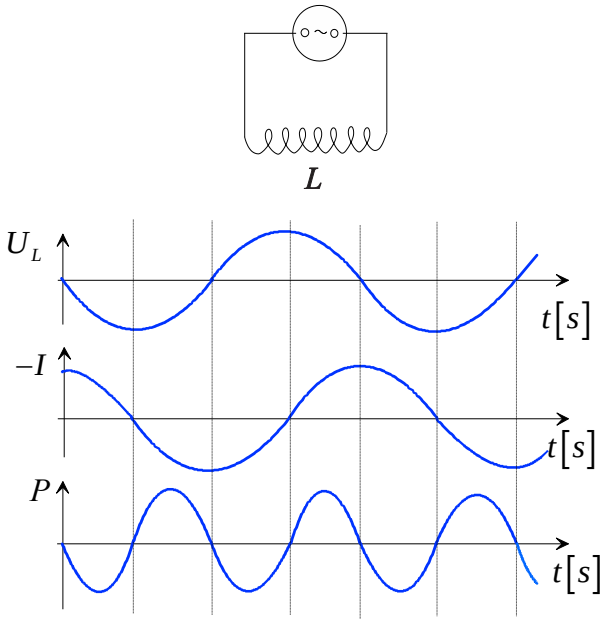
tok:



napetost:



1.6.4 IZMENIČNI TOK PO TULJAVI



Gonilna napetost: $U_0 \sin(\omega t)$

$$U_0 \sin(\omega t) + U_L = 0$$

$$U_0 \sin(\omega t) - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$U_0 \sin(\omega t) = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{d}I = \frac{U_0}{L}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}I = \frac{U_0}{\omega L}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}(\omega t)$$

$$I = \frac{U_0}{\omega L}\int \sin(\omega t)\,\mathrm{d}(\omega t) = -\frac{U_0}{\omega L}\cos(\omega t) = \frac{U_0}{\omega L}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{I(t) = I_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}\ ,\ \text{kjer}\ \ \boxed{I_0 = \frac{U_0}{\omega L}}\ .$$

$$U_L = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \ \Rightarrow\ \boxed{U_L = -U_0 \sin(\omega t) = U_0 \sin(\omega t - \pi)}\ .$$

- Tuljava rabi povprečno moč

$$\boxed{\overline{P} = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos\delta = 0}\ .$$

1.7 MAXWELLOVE ENAČBE (osnovni zakoni elektrodinamike)

Jamec Clerk Maxwell
(1831 – 1879)

$$\oint_S \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho_e\,\mathrm{d}V$$ zakon o električnem pretoku (Gaussov zakon)

$$\oint_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0$$ zakon o magnetnem pretoku

$$\oint \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{s} = \int \left(\vec{j}_e + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \mathrm{d}\vec{S}$$ zakon o magnetni napetosti (Amperov zakon)

$$\oint \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{s} = -\int \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \mathrm{d}\vec{S}$$ indukcijski zakon (Faradayev zakon)

Dodatno mora veljati še zakon o ohranitvi naboja:

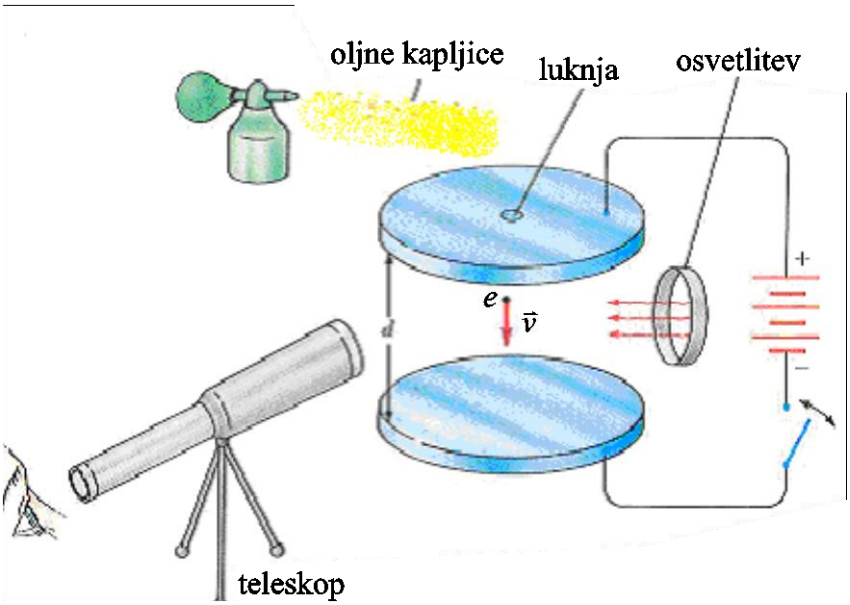
$$\oint_S \vec{j}_e\,\mathrm{d}\vec{S} = -\int_V \left(\frac{\partial \rho_e}{\partial t} \right) \mathrm{d}V$$

Če poznamo prostorsko odvisnost $\vec{E}$ in $\vec{B}$ poznamo silo na naboj *e*:

$$\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B}$$ (Lorentzova sila)

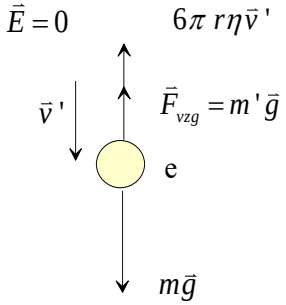
2. Gibanje električnih nabojev

2.1 MILLIKANOV POSKUS (določitev osnovnega naboja)

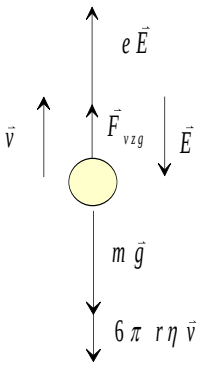


Sile, ki delujejo na negativno nabito (e<0) oljno kapljico:

A)



B)



A primer: E = 0: $m'g+6\pi r\eta v'=mg,$ (2.1.1)

B primer: E ≠ 0: $eE+m'g=mg+6\pi r\eta v,$ (2.1.2)

kjer so:

r = polmer oljne kapljice
$\eta \cong 1.8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg/ms}$ viskoznost zraka
e = električni naboj oljne kapljice
m = masa oljne kapljice
m' = masa izpodrinjenega zraka
E = jakost električnega polja
v', v = hitrosti kapljice

Neznanki sistema enačb (2.1.1) in (2.1.2) sta e in r:

(2.1.1) odšteješ od (2.1.2):

$$\boxed{eE = 6\pi r \eta (v + v')} \tag{2.1.3}$$

Iz enačbe (2.1.1) sledi:

$$6\pi r \eta v' = (m - m')g, \tag{2.1.4}$$

V enačbo (2.1.4) vstaviš:

$$m = \frac{4\pi r^3}{3}\rho, \quad m' = \frac{4\pi r^3}{3}\rho' \tag{2.1.5}$$

kjer je ρ gostota oljne kapljice, ρ' pa gostota zraka in dobiš:

$$6\pi r \eta v' = \frac{4\pi r^3}{3}(\rho - \rho')g,$$

oziroma

$$\boxed{9\eta v' = 2r^2(\rho - \rho')g} \ . \tag{2.1.6}$$

Iz enačbe (2.1.6) sledi:

$$\boxed{r = \left[\frac{9\eta v'}{2(\rho - \rho')g}\right]^{1/2}} \ . \tag{2.1.7}$$

Iz enačbe (2.1.3) sledi:

$$\boxed{e = \frac{6\pi r \eta}{E}(v + v')} \ . \tag{2.1.8}$$

Izraz (2.1.7) vstavimo v enačbo (2.1.8) in dobimo:

$$e = \frac{18\pi\eta(v+v')}{E}\left[\frac{\eta v'}{2(\rho-\rho')g}\right]^{1/2} \quad . \qquad (2.1.9)$$

Rezultat poskusa:

$e = ne_0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$

$e_0 = 1.6 \cdot 10^{-19}$ As

DELEC	**NABOJ** [As]	**MASA** [kg]
elektron (e)	-1.6021917×10^{-19}	9.1095×10^{-31}
proton (p)	$+1.6021917\times10^{-19}$	1.67261×10^{-27}
nevtron (n)	0	1.67492×10^{-27}

2.2 GIBANJE PREVODNIŠKIH ELEKTRONOV V KOVINI

2.2.1 GIBANJE NABOJEV V VAKUUMU

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=e\vec{E}}\ , \quad \text{torej:} \tag{2.2.1a}$$

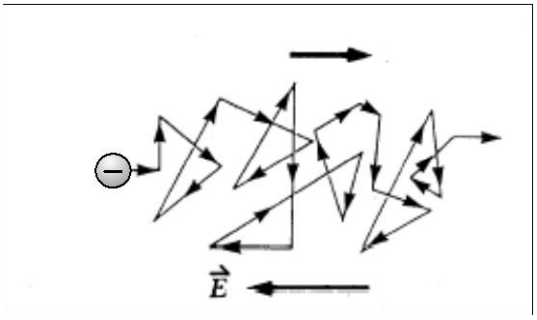
$$\vec{v}=\vec{v}_0+\frac{e}{m}\vec{E}t\ . \tag{2.2.1b}$$

2.2.2 GIBANJE PREVODNIŠKIH ELEKTRONOV V KOVINI

Naboji doživljajo trke, ki zavirajo njihovo gibanje $\Rightarrow$ zaviralna sila

predpostavka:

$$\boxed{\vec{F}_{zav}=-\ k\ \vec{v}}\ , \tag{2.2.2}$$



Newtonov zakon za gibanje točkastega naboja z maso m in nabojem e:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\ =\ e\vec{E}-k\,\vec{v}$$

ali

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}+\frac{k}{m}\vec{v}=\frac{e}{m}\vec{E}}\ . \tag{2.2.3}$$

Definiramo $\tau=\frac{m}{k}$, (2.2.4)

ki ga imenujemo relaksacijski čas.

Če izključimo električno polje (E = 0) velja:

$$\frac{d\vec{v}}{\mathrm{d}t}+\frac{\vec{v}}{\tau}=0 \qquad (2.2.5)$$

Rešitev enačbe (2.2.5) je:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 \; e^{-t/\tau} \;, \qquad (2.2.6)$$

kjer je začetna vrednost hitrosti v (t = 0) = $v_{0.}$

Čas τ je približno enak času med dvema zaporednima trkoma. V času τ pade začetna hitrost v_0 na vrednost v_0/e.

Vrednosti relaksacijskih časov τ :

SNOV	τ [s]
kovine	~ 10^{-14}
razelektritve v plinih	~ 10^{-9}
sončna korona	~ 10^{2}
medzvezdni plin	~ 10^{5}

Delna zaključka:

1. če ne bi bilo trkov bi hitrost nabojev stalno naraščala (enačba (2.2.1b)),
2. če $\vec{E} = 0$ pada hitrost eksponentno proti nič (enačba (2.2.6)).

SPLOŠNO: zanima nas časovno povprečje v stacionarnem stanju

če ne bi bilo trkov bi hitrost nabojev v električnem polju stalno naraščala
zanima nas **časovno povprečje** v stacionarnem stanju:

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \right\rangle + \frac{\langle \vec{v} \rangle}{\tau} = \frac{e}{m} \langle \vec{E} \rangle \qquad (2.2.7)$$

če velja $\langle \vec{a} \rangle \sim \left\langle \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \right\rangle = 0$ (glejte sliko) in $\langle \vec{E} \rangle \equiv \vec{E}$ = konst.
iz enačbe (2.2.7) sledi:

$$\boxed{\langle \vec{v} \rangle = \frac{e\tau}{m} \vec{E}} \; . \qquad (2.2.8)$$

V nadaljevanju izračunamo gostoto električnega toka (j):

$$j = \frac{I}{S} = \frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{S}\frac{ne\,\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{S}\frac{ne(S\,\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}t} = ne\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = nev$$

posplošitev:

$$\boxed{\vec{j} = ne\langle\vec{v}\rangle}\ , \qquad (2.2.9)$$

kjer je $n = \frac{N}{V}$ število gibljivih nosilcev naboja na enoto volumna snovi.
Iz enačbe (2.2.8) in (2.2.9) sledi:

$$\vec{j} = ne\frac{e\tau}{m}\vec{E} = \sigma\vec{E}\ , \qquad (2.2.10)$$

kjer je

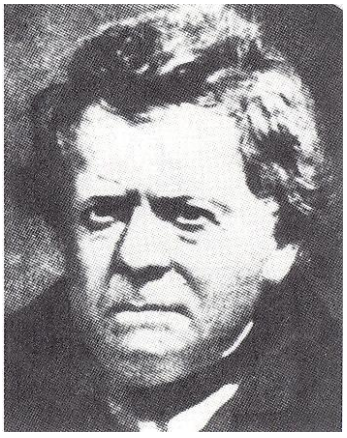
$$\boxed{\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}}$$ specifična električna prevodnost. (2.2.11)

Za prevodne (gibljive) elektrone v kovini je $e = -e_0 = -1.6\cdot10^{-19}\,\mathrm{As}$, torej:

$$\boxed{\vec{j} = \sigma\vec{E}}$$ Ohm-ov zakon (2.2.12)

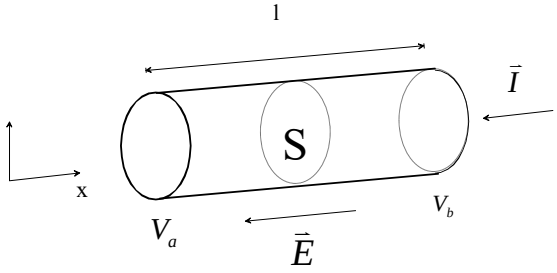
$$\boxed{\sigma = \frac{ne_0^2\tau}{m_e}}\ , \qquad (2.2.13)$$

kjer je m_e masa elektrona.



Georg Simon Ohm
(1787 – 1854)

- **Poseben primer:** dolg valjast vodnik dolžine l s konstantno površino preseka (S):



$$U = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{x} = +\int_a^b E\cdot \mathrm{d}x = +E\,x\Big|_a^b = E\,(b-a) = E\,l$$

kjer je V električni potencial in U električna napetost,

torej:

$$j = \sigma E = \sigma \frac{U}{l} \quad , \tag{2.2.14}$$

$$\frac{I}{S} = \sigma \frac{U}{l} \quad . \tag{2.2.15}$$

Enačbo (2.2.15) zapišemo v obliki:

$$\boxed{U = I\,R} \quad . \tag{2.2.16}$$

kjer je

$$R = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{S} \quad . \tag{2.2.17}$$

upor vodnika. Če definiramo

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \tag{2.2.18}$$

kot specifično upornost, velja:

$$\boxed{R = \rho \frac{l}{S}} \quad . \tag{2.2.19}$$

Temperaturna odvisnost ρ:

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \alpha\left(T - T_0\right)\right], \tag{2.2.20}$$

kjer je α temperaturni koeficient specifičnega upora.

MATERIAL	$\rho\ [\Omega\mathrm{m}]$	$\alpha\ [\mathrm{K}^{-1}]$
srebro	1.59×10^{-8}	3.8×10^{-3}
baker	1.7×10^{-8}	3.9×10^{-3}
zlato	2.44×10^{-8}	3.4×10^{-3}
aluminij	2.82×10^{-8}	3.9×10^{-3}
volfram	5.6×10^{-8}	4.5×10^{-3}
železo	10×10^{-8}	5.0×10^{-3}
platina	11×10^{-8}	3.92×10^{-3}
svinec	22×10^{-8}	3.9×10^{-3}

- **Padanje električnega toka v toplotno izolirani žici zaradi segrevanja**

$$R = \rho\frac{l}{S} \quad \Rightarrow R = R_0\left[1+\alpha\left(T - T_0\right)\right],$$

$$\frac{R - R_0}{R_0} = \alpha\left(T - T_0\right),$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}R}{R} = \alpha\ \mathrm{d}T} \ . \tag{2.2.21}$$

Ohmov zakon

$$I = \frac{U_0}{R} \ ,$$

$$\boxed{\mathrm{d\,I} = U_0\left(-\frac{1}{R^2}\right)\mathrm{d}R} \ . \tag{2.2.22}$$

$$P\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}Q = c_p\, m\, \mathrm{d}T \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}T = \frac{P\,\mathrm{d}t}{\mathrm{c_p}\, m}} \ , \text{ kjer je } P \text{ moč.} \tag{2.2.23}$$

Enačbo (2.2.21) vstavimo v enačbo (2.2.22) in dobimo:

$$\mathrm{d\,I} = -\frac{U_0}{R^2} R\alpha\ \mathrm{d}T = -\frac{U_0}{R^2} R\alpha \frac{P\mathrm{d}t}{c_p\, m} \ , \tag{2.2.24}$$

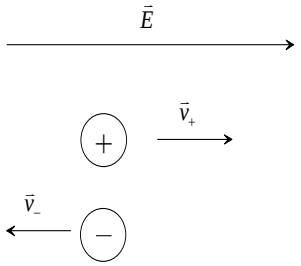
kjer smo upoštevali enačbo (2.2.23). Iz enačbe (2.2.24) pa sledi:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\,I}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{U_0\,\alpha\,P}{R\,c_p\,m}} \ , \tag{2.2.25}$$

kjer je m masa žice, c_p pa specifična toplota pri konstantnem pritisku.

2.2.3 ELEKTRIČNI TOK V ELEKTROLITIH

Primer: $K\,Cl \rightarrow K^+ + Cl^-$
kation anion



⊕ ≡ kation

⊖ ≡ anion

z_+ ≡ število osnovnih nabojev kationa
z_- ≡ število osnovnih nabojev aniona

Iz enačbe (2.2.8) sledi:

$$\langle v_+ \rangle = \beta_+ \vec{E} \ , \tag{2.2.26}$$

$$\beta_+ = \frac{z_+ e_0 \tau_+}{m_+} \ , \tag{2.2.27}$$

$$\langle v_- \rangle = -\beta_- \vec{E} \ , \tag{2.2.28}$$

$$\beta_- = \frac{z_- e_0 \tau_-}{m_-} \ , \tag{2.2.29}$$

kjer je β_+ gibljivost kationov, β_- gibljivost anionov, m_+ masa kationov, m_- pa masa anionov. Velja:

$$j = z_+ e_0 n_+ \langle v_+ \rangle + z_- (-e_0) n_- \langle v_- \rangle \ , \tag{2.2.30}$$

kjer je

$$n = n_+ = n_-$$

število molekul elektrolita na volumsko enoto. Iz enačb (2.2.30), (2.2.26) in (2.2.28) sledi:

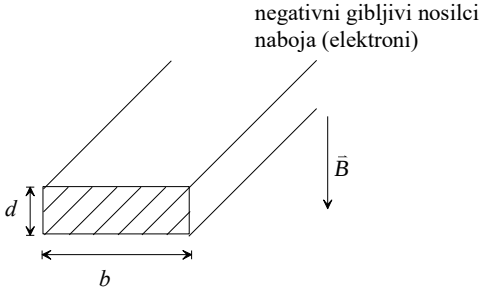
$$\boxed{j = (z_+ e_0 n_+ \beta_+ + z_- e_0 n_- \beta_-) E} \tag{2.2.31}$$

Specifična prevodnost elektrolita (σ) je torej:

$$\boxed{\sigma = (z_+ e_0 n_+ \beta_+ + z_- e_0 n_- \beta_-)} \tag{2.2.32}$$

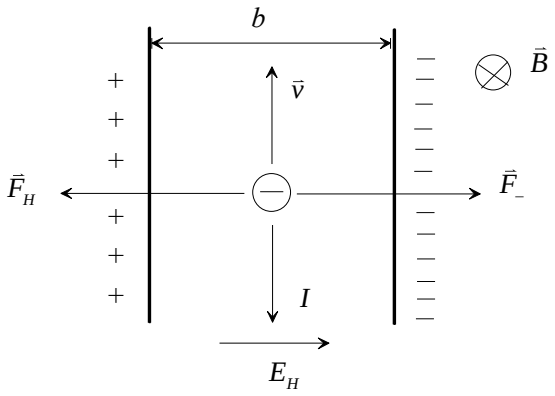
2.3 HALLOV POJAV

- Električni tok po vodniku s pravokotnim presekom, ki se nahaja v magnetnem polju



gostote $\vec{E}$:

- Stacionarno stanje:



$\vec{B} \equiv$ gostota magnetnega polja

$\vec{E} \equiv$ jakost električnega polja

$$\boxed{\vec{F}_H = -e_0 \vec{E}_H} \tag{2.3.1}$$

$$\boxed{\vec{F}_- = -e_0 \vec{v} \times \vec{B}} \tag{2.3.2}$$

$$\boxed{E_H = \frac{U_H}{b}} \tag{2.3.3}$$

Upoštevamo:

$v \equiv \langle \vec{v} \rangle$,

$j \equiv n e_0 \langle \vec{v} \rangle = n e_0 v$, $n = \frac{N}{V}$,

$j = \frac{I}{S} = n e_0 v$,

$\Downarrow$

$$\boxed{v = \frac{I}{S n e_0}} \tag{2.3.4}$$

Stacionarno stanje:

$$F_H = F_- \ , \tag{2.3.5}$$

$$e_0 E_H = e v B \ . \tag{2.3.6}$$

V enačbo (2.3.6) vstavimo izraza (2.3.3) in (2.3.4):

$$e_0 \frac{U_H}{b} = \frac{I}{Sn} B \ , \tag{2.3.7}$$

kjer je $S = bd$ površina preseka vodnika. Iz enačbe (2.3.7) sledi:

$$\boxed{U_H = \frac{I b B}{e_0 S n}} \ , \tag{2.3.8}$$

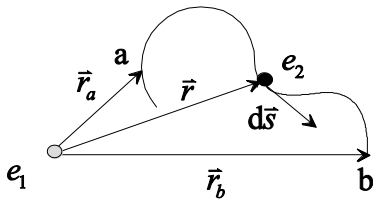
kjer imenujemo U_H Hallova napetost.

3. Snov v električnem polju

3.1 ELEKTROSTATSKA POTENCIALNA ENERGIJA

3.1.1 DELO SILE TOČKASTEGA NABOJA e_1 NA TOČKASTEM NABOJU e_2

- električno polje naboja e_1: $\vec{E}_1 = \frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}$, kjer $\left|\frac{\vec{r}}{r}\right| = 1$



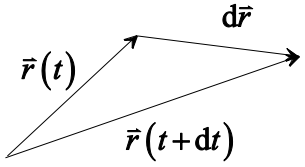
- sila na naboj e_2: $\vec{F}_2 = e_2\,\vec{E}_1 = \frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}$

$$\mathrm{d}\left(\vec{r}\cdot\vec{r}\right) = \vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{r} = 2\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\vec{r}\cdot\vec{r}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(r^2\right)$$

Ker je $\mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}\vec{r}$ velja: $\boxed{\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(r^2\right) = r\,\mathrm{d}r}$ (3.1.1)

kjer smo upoštevali:



$\boxed{\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\vec{s}}$

$\boxed{\vec{r}\cdot\vec{r} = r^2}$

$$A_e = \int_{r_a}^{r_b}\vec{F}_2\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{s}}{r^3} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{r\,\mathrm{d}r}{r^3} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -\frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\Big|_{r_a}^{r_b}, \qquad (3.1.2)$$

kjer smo upoštevali $\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = r\,\mathrm{d}r$ (enačba (3.1.1)).

Zaključek: Delo sile točkastega naboja e_1 na točkasti naboj e_2 je odvisno samo od začetne in končne **razdalje med nabojema.**

Posplošitev: če to velja za točkast naboj, velja tudi za poljubno volumsko porazdelitev nabojev, ker so sile aditivne.

3.1.2 ENERGIJSKI ZAKON

$$\boxed{A=\Delta W_k+\Delta W_{g,p}}\ , \tag{3.1.3}$$

kjer je A delo vseh zunanji sil razen sile teže, ΔW_k sprememba kinetične energije in $\Delta W_{g,p}$ sprememba gravitacijske potencialne energije. Delo A razdelimo na dva dela:

$$\boxed{A=A_{ost}+A_e}\ , \tag{3.1.4}$$

kjer je A_{ost} delo vseh zunanjih sil razen sile teže in električnih sil.
Iz enačb (3.1.3) in (3.1.4) sledi:

$$\boxed{A_{ost}+A_e=\Delta W_k+\Delta W_{g,p}}\ , \tag{3.1.5}$$

kjer A_e podan z enačbo (3.1.2), torej:

$$A_{ost}=\Delta W_k+\Delta W_{g,p}-A_e\ . \tag{3.1.6}$$

Iz enačb (3.1.2) in (3.1.6) sledi:

$$A_{ost}=\Delta W_k+\Delta W_{g,p}+\frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\Big|_{r_a}^{r_b}\ , \tag{3.1.7}$$

oziroma:

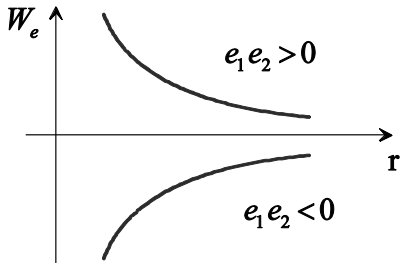
$$\boxed{A_{ost}=\Delta W_k+\Delta W_{g,p}+\Delta W_e}\ , \tag{3.1.8}$$

kjer smo uvedli elektrostatsko potencialno energijo:

$$\boxed{W_e=\frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0 r}+\text{konst.}}\ . \tag{3.1.9}$$

Običajno izberemo konst. = 0.

Elektrostatska potencialna energija $\frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$, ustreza delu, ki ga mora opraviti **zunanja** sila, da naboja e_1 in e_2 (različnega predznaka) razmaknemo od razdalje ∞ na razdaljo r.



Če je $A_{ost} = 0$ iz enačbe (3.1.8) dobimo:

$$0 = \Delta W_k + \Delta W_{g,p} + \Delta W_e \ ,$$

oziroma

$$\Delta\left(W_k + W_{g,p} + W_e\right) = 0 \ ,$$

iz česar sledi zakon o ohranitvi energije:

$$\boxed{W_k + W_{g,p} + W_e = \text{konst.}} \ . \qquad (3.1.10)$$

OPOMBA:

Elektrostatska potencialna energija **sistema nabojev** je vsota dvodelčnih potencialnih energij.

$$\boxed{W_{e,p} = \frac{1}{2} \sum_{i\,j} \frac{e_i\, e_j}{4\pi\, \varepsilon_0\, r_{ij}}} \qquad (3.1.11)$$

Faktor $\frac{1}{2}$ uvedemo zato, ker v vsoti $\sum_{i,j}$ vsak par šteješ dvakrat.

Potencialno energijo lahko vpeljemo le v sistemu, ki ima vsaj dva delca!

3.1.3 DEFINICIJA ELEKTRIČNEGA POTENCIALA[+]

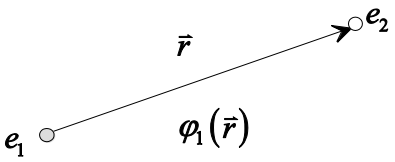
Električni potencial definiramo kot električno potencialno energijo na enoto pozitivnega (testnega) naboja:

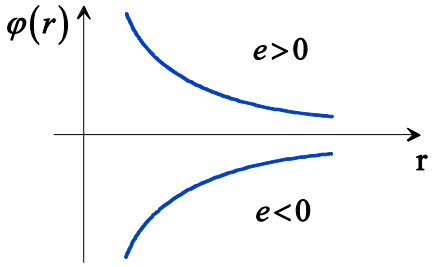
$$\boxed{\varphi \equiv \frac{W_e}{e}} \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{As}} \equiv \text{V}\right] \qquad (3.1.12)$$

- **Primer dveh točkastih nabojev; električna potencialna energija naboja e_2 v polju naboja e_1:**

$$W_e = e_2 \frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0 r} = e_2\varphi_1 \ , \tag{3.1.13}$$

kjer $\boxed{\varphi_1 = \frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{W_e}{e_2}\ .}$ (3.1.14)



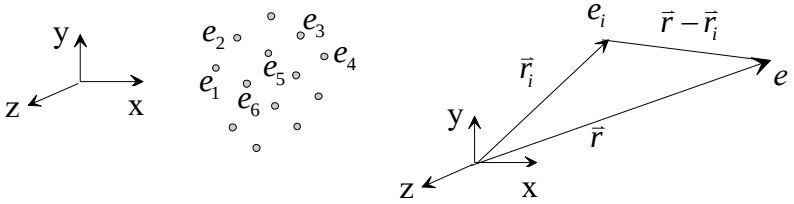


Potencialna energija naboja e v polju sistema točkastih nabojev e_i :

$$W_e = e\sum_i \frac{e_i}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|} = e\varphi \ , \tag{3.1.15}$$

kjer

$$\boxed{\varphi(x,y,z) = \sum_i \frac{e_i}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|}\ .} \tag{3.1.16}$$



Vsaki točki v prostoru pripada neka vrednost električnega potenciala $\varphi(x,y,z)$, ki je posledica porazdelitve nabojev e_i v prostoru.

3.1.4 ZVEZA MED $\vec{E}$ IN φ

$\varphi(\vec{r}) \equiv$ skalarno polje

$\vec{E}(\vec{r}) \equiv$ vektorsko polje

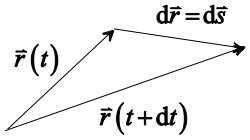
$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\cdot(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)\,. \tag{3.1.17}$$

Ob upoštevanju definicije Hamiltonovega operatorja (nable):

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\,, \tag{3.1.18}$$

zapišemo enačbo (3.1.17) v obliki:

$$\boxed{\mathrm{d}\varphi = \vec{\nabla}\varphi\cdot\mathrm{d}\vec{s}\,,} \tag{3.1.19}$$



kjer je

$$\mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)\,. \tag{3.1.20}$$

Iz enačb (3.1.1) – (3.1.16) po drugi strani sledi:

$$\mathrm{d}(W_e) = \mathrm{d}(e\varphi) = -A_e = -\vec{F}_e\cdot\mathrm{d}\vec{s} = -e\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}\,, \tag{3.1.21}$$

oziroma

$$\mathrm{d}(e\varphi) = -e\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}\,,$$

torej:

$$\boxed{\mathrm{d}\varphi = -\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}} \tag{3.1.22}$$

Iz primerjave enačb (3.1.19) in (3.1.22) dobimo:

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).} \tag{3.1.23}$$

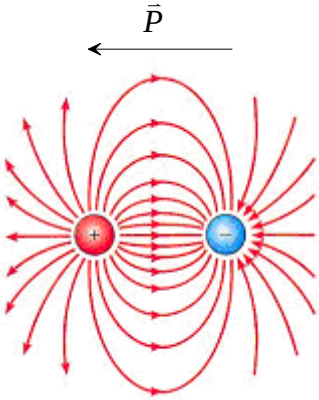
- **Komentar:** ekvipotencialne ploskve

  $\mathrm{d}\varphi = -\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$

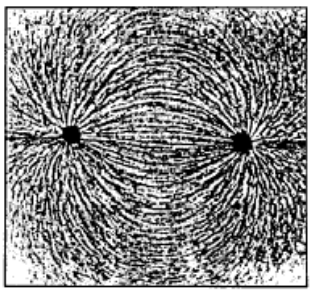
  če $\vec{E}\perp\mathrm{d}\vec{s} \Rightarrow$ $\underbrace{\mathrm{d}\varphi = 0}_{\text{EKVIPOTENCIALNE PLOSKVE}}$ $\Rightarrow$ vektor $\vec{E}$ pravokoten na ekvipotencialne ploskve

3.2 SNOV V ELEKTRIČNEM POLJU

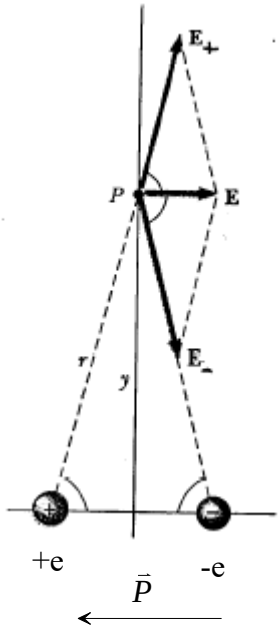
3.2.1 RAČUNANJE ELEKTRIČNA POLJA DIPOLA



(a)



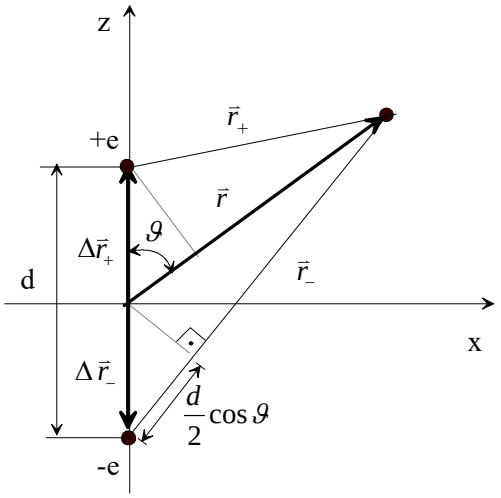
(b)



- **Prvi način:**

vektorski zapis
$\vec{r}_+$ **in** $\vec{r}_-$**:**

$\vec{r}_+ = \vec{r} - \Delta\vec{r}_+$
$\vec{r}_- = \vec{r} - \Delta\vec{r}_-$



Električno polje dipola je vektorska vsota električnih polj obeh točkastih nabojev, ki sestavljata dipol (pri zapisu približnih izrazov za r_+ in r_- glejte še zgornjo sliko):

$$\vec{E}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{r}_+}{r_+^3}-\frac{\vec{r}_-}{r_-^3}\right]=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{r}-\Delta\vec{r}_+}{r_+^3}-\frac{\vec{r}-\Delta\vec{r}_-}{r_-^3}\right],$$

$$r_+\cong r-\frac{d}{2}\cos\vartheta=r\left(1-\frac{d}{2r}\cos\vartheta\right),$$

$$r_-\cong r+\frac{d}{2}\cos\vartheta=r\left(1+\frac{d}{2r}\cos\vartheta\right).$$

V nadaljevanju naredimo še naslednja dva približka :

$$\frac{1}{r_+^3}=\frac{1}{r^3\left(1-\frac{d}{2r}\cos\vartheta\right)^3}\cong\frac{1}{r^3}\left(1+3\frac{d}{2r}\cos\vartheta\right),$$

$$\frac{1}{r_-^3}=\frac{1}{r^3\left(1+\frac{d}{2r}\cos\vartheta\right)^3}\cong\frac{1}{r^3}\left(1-3\frac{d}{2r}\cos\vartheta\right),$$

kjer smo upoštevali : $\frac{1}{(1\pm x)^3}\cong 1\mp 3x$. Tako dobimo :

$$\vec{E}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[(\vec{r}-\Delta\vec{r}_+)\frac{1}{r^3}\left(1+\frac{3}{2}\frac{d}{r}\cos\vartheta\right)-(\vec{r}-\Delta\vec{r}_-)\frac{1}{r^3}\left(1-\frac{3}{2}\frac{d}{r}\cos\vartheta\right)\right]=$$

$$=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left[\frac{\vec{r}}{r}3d\ \cos\vartheta+(\Delta\vec{r}_--\Delta\vec{r}_+)-\frac{3d}{2r}(\Delta\vec{r}_-+\Delta\vec{r}_+)\cos\vartheta\right]=$$

$$=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left[3d\ \cos\vartheta\sin\vartheta,\ 0,\ 3d\ \cos^2\vartheta-d\right],$$

kjer smo upoštevali:

$$\vec{r}=(r\sin\vartheta,\ 0,\ r\cos\vartheta),$$

$$\Delta\vec{r}_+=\left(0,\ 0,\ \frac{d}{2}\right),$$

$$\Delta\vec{r}_-=\left(0,\ 0,\ -\frac{d}{2}\right).$$

Torej:

$$\boxed{E_x=\frac{3\,p_e\cos\vartheta\sin\vartheta}{4\pi\varepsilon_0\,r^3}}\ , \qquad (3.2.1)$$

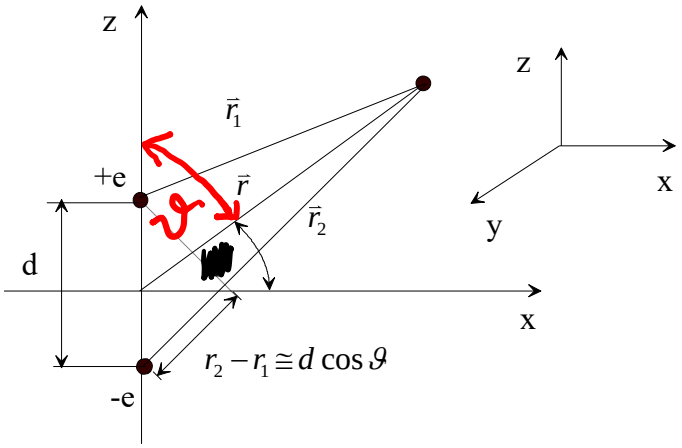
$$\boxed{E_y = 0}\ , \tag{3.2.2}$$

$$\boxed{E_z = \frac{p_e\left(3\cos^2\vartheta - 1\right)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}\ , \tag{3.2.3}$$

kjer smo definirali električni dipolni moment:

$$\boxed{p_e = d\,e} \tag{3.2.4}$$

- **Drugi način*:**



Električni potencial dipola:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{e}{r_1} - \frac{e}{r_2}\right) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right) \cong \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos\vartheta}{r^2}\ ,$$

kjer smo upoštevali:

$r_2 - r_1 \cong d\cos\vartheta$,
$r_1 r_2 \cong r^2$.

Ob uporabi definicije $p_e = e\,d$ iz gornje enačbe sledi:

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_e\cos\vartheta}{r^2}} \tag{3.2.5}$$

Vidimo, da velja:

$\vartheta = 0$: $\quad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_e}{r^2}$

$\vartheta = 90^0$: $\quad \varphi = 0$

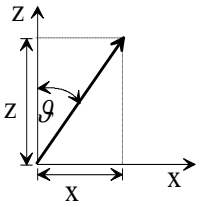
Enačbo (3.2.5) lahko zapišemo v obliki:

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{p_z}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}}\ , \tag{3.2.6}$$

kjer smo upoštevali:

$$\cos\vartheta = \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}},$$

$$r^2 = x^2 + z^2\ .$$



Velja:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi,$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right). \tag{3.2.7}$$

Iz enačb (3.2.6) in (3.2.7) pa sledi:

$$\vec{E} = \left(E_x, E_y, E_Z\right) = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ -\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ -\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right), \tag{3.2.8}$$

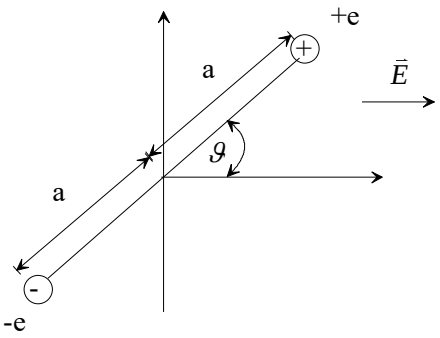
$$E_x = \frac{3\,p_e\cos\vartheta\sin\vartheta}{4\pi\,\varepsilon_0 r^3}\ , \tag{3.2.9}$$

$$E_y = 0$$

$$E_z = \frac{p_e\left(3\cos^2\vartheta - 1\right)}{4\pi\,\varepsilon_0 r^3}\ , \tag{3.2.10}$$

kjer veljajo izrazi (3.2.8) – (3.2.10) v ravnini y = 0. Zaradi osne simetrije lahko rezultat brez težav posplošimo.

3.2.2 ENERGIJA ELEKTRIČNEGA DIPOLA V ZUNANJEM ELEKTRIČNEM POLJU



$d = 2a$

$p_e = e\,d = e\,2a$

Navor na električni dipol:

Najprej izračunamo navor na posamezna točkasta naboja, ki sestavljata dipol:

$+e:\ F_+ = +e\,E,\ M_+ = a\,e\,E\sin\vartheta$

$-e:\ F_- = -e\,E,\ M_- = (-a)(-e)\,E\sin\vartheta = a\,e\,E\sin\vartheta$

Celoten navor (M) na električni dipol je:

$$M = M_- + M_+ = 2a\,e\,E\sin\vartheta = p_e\,E\sin\vartheta\ . \qquad (3.2.11)$$

Posplošitev:

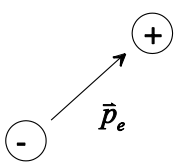
$$\boxed{\vec{M} = \vec{p}_e \times \vec{E}} \qquad (3.2.12)$$

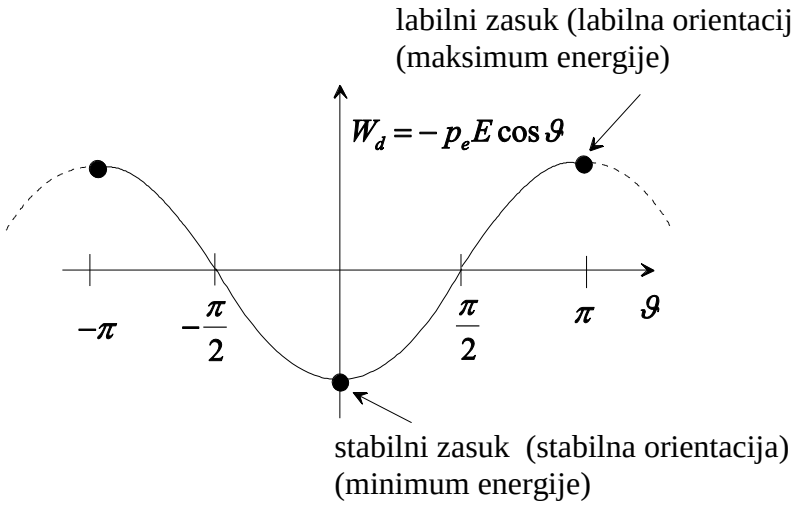
Energija dipola je enaka delu, ki ga mora opraviti zunanji navor proti navoru zunanjega električnega polja.

$$W_d = \int M\,\mathrm{d}\vartheta = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} p_e\,E\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = -\,p_e\,E\cos\vartheta\,\Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$$

Posplošitev:

$$\boxed{W_d = -\,\vec{p}_e \cdot \vec{E}} \qquad (3.2.13)$$

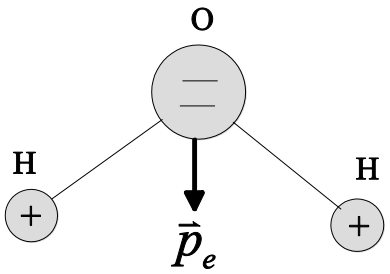




minimum energije: $\vec{E}\uparrow$ $\uparrow \vec{p}_e \quad \vartheta = 0 : W_d = -p_e E$ (3.2.14)

maksimum energije: $\vec{E}\uparrow$ $\downarrow \vec{p}_e \quad \vartheta = \pi : W_d = +p_e E$ (3.2.15)

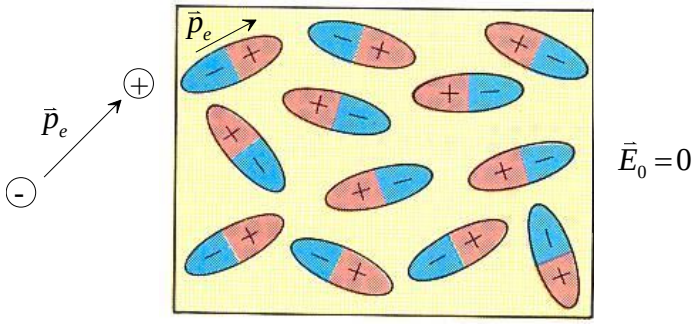
3.2.3 SNOV SESTAVLJENA IZ POLARNIH MOLEKUL



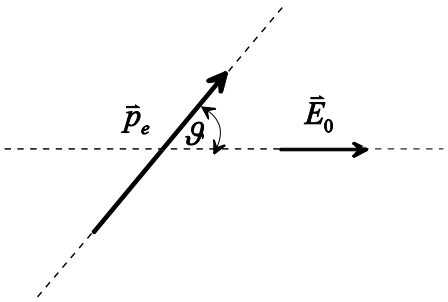
Primer polarne molekule: molekula vode (H_2O)

Polarne molekule imajo **permanentne električne dipolne momente**, ki se v zunanjem električnem polju $\vec{E}_0$ uredijo:

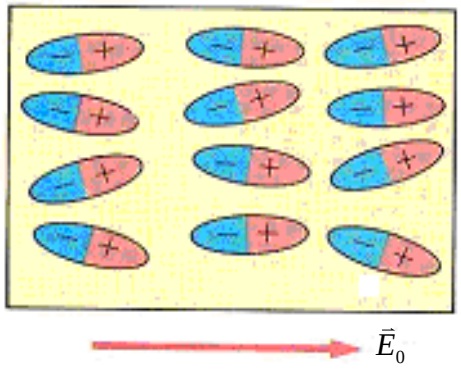
NI ORIENTACIJE ELEKTRIČNIH DIPOLOV



OPOMBA: orientacija električnih dipolov v smeri zunanjega električnega polja je energijsko ugodna, ker velja $W_d = - p_e E_0 \cos \vartheta$

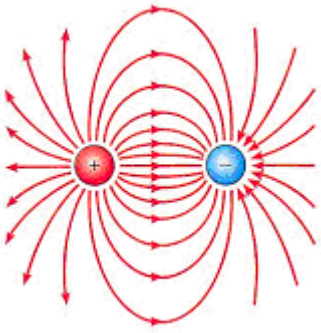


JE ORIENTACIJA ELEKTRIČNIH DIPOLOV



$\vec{E}_0 \neq 0$

$\vec{E}_{\text{dipola}}$



$\vec{p}_e$

$\vec{E}_0$

SKLEP: zaradi orientacije polarnih molekul v zunanjem električnem polju $\vec{E}_0$ se celotno električno polje **zmanjša**.

- **Povprečna orientacija polarnih molekul v električnem polju***

Energija polarne molekule s permanentnim električnim dipolnim momentom $\vec{p}_e$, ki je zasukan za kot ϑ glede na smer električnega polja $\vec{E}$

$$W_d = -\vec{p}_e \cdot \vec{E} = -p_e E \cos\vartheta \tag{3.2.16}$$

je najmanjša, če je električni dipolni moment $\vec{p}_e$ usmerjen v smeri električnega polja $\vec{E}$. Takrat je namreč kot $\vartheta = 0$, energija W_d pa je zato najmanjša možna. Zaradi termične energije atomov (molekul) seveda pri končnih temperaturah povprečna vrednost kota ϑ ni nič. Električno polje na mestu električnega dipola (E) je vsota zunanjega električnega polja E_0 in električnega polja zaradi orientacije polarnih molekul E_i: $E = E_0 - E_i$.

Poiščimo povprečno vrednost kota ϑ $\left(\text{oziroma} \langle\cos\vartheta\rangle\right)$, ki ni enaka nič zaradi termičnih fluktuacij. Pri tem upoštevamo, da je energija molekule s permanentnim električnim dipolnim momentom $\vec{p}_e$, ki je zasukan za kot ϑ glede na smer električnega polja $\vec{E}$ enaka:

$$W_d = -p_e E \cos\vartheta \tag{3.2.17}$$

Izračunajmo povprečno vrednost cosinusa kota ϑ, to je $\langle\cos\vartheta\rangle$:

$$\langle\cos\vartheta\rangle = \frac{\int \cos\vartheta\, e^{-\beta W_d}\, \mathrm{d}\Omega}{\int e^{-\beta W_d}\, \mathrm{d}\Omega}\ , \tag{3.2.18}$$

kjer je faktor $e^{-\beta W_d}$ verjetnost (Boltzmannov faktor), da je molekula v stanju z zasukom ϑ. Pomen ostalih simbolov in konstant pa je naslednji: $\beta = 1/\mathrm{kT}$, k je Boltzmannova konstanta, T pa absolutna temperatura. Izraz $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}S/r^2 = \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$ označuje infinitezimalni element prostorskega kota v sferičnih koordinatah:

$$\langle\cos\vartheta\rangle = \frac{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \cos\vartheta\, e^{-\beta W_m} \sin\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\varphi}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\beta W_m} \sin\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\varphi}\ . \tag{3.2.19}$$

Ker energija W_d ni odvisna od kota φ lahko v zgornji enačbi izvedemo integral po φ - ju.

Tako dobimo:

$$\langle \cos\vartheta \rangle = \frac{\int_0^{\pi} 2\pi \cos\vartheta\, e^{-\beta W_d} \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta}{\int_0^{\pi} 2\pi\, e^{-\beta W_d} \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta} \tag{3.2.20}$$

V nadaljevanju uvedemo novo spremenljivko $s = \cos\vartheta$ ter oznako $x = p_e E_0 / kT = \beta\, p_e E_0$:

$$\langle \cos\vartheta \rangle = \frac{-\int_1^{-1} s\, e^{xs}\,\mathrm{d}s}{-\int_1^{-1} e^{xs}\,\mathrm{d}s} = \coth x - \frac{1}{x} \equiv L(x), \tag{3.2.21}$$

kjer je $L(x)$ Langevinova funkcija. Funkcijo coth *x* razvijemo v vrsto $(0 < |x| < \pi)$ in zadržimo samo prva dva člena:

$$\coth x \cong \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \ldots . \tag{3.2.22}$$

Torej

$$\langle \cos\vartheta \rangle = \coth x - \frac{1}{x} \cong \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{1}{x} = \frac{x}{3} = \frac{p_e E}{3kT}. \tag{3.2.23}$$

Zaključek: vidimo, da je $\langle \cos\vartheta \rangle$ sorazmeren jakosti električnega polja *E* na mestu, kjer se nahaj dipol in obratno sorazmeren z absolutno temperaturo *T*.

Povprečni električni dipolni moment v smeri električnega polja $(\langle p_e \rangle)$ zapišemo v obliki:

$$\langle p_e \rangle = p_e \langle \cos\vartheta \rangle. \tag{3.2.24}$$

Na osnovi enačb (3.2.23) in (3.2.24) lahko zapišemo polarizacijo (*P*) v snovi, ki je sestavljena iz polarnih molekul v obliki:

$$P = n\langle p_e \rangle = n\, p_e \langle \cos\vartheta \rangle = n\, p_e \frac{p_e E}{3kT} = \frac{n p_e^2 E}{3kT}, \tag{3.2.25}$$

kjer je $n = \frac{N}{V}$ število molekul na enoto volumna.

Ob upoštevanju definicije susceptibilnosti χ

$$P = \chi \varepsilon_0 E \tag{3.2.26}$$

iz enačbe (3.2.25) sledi izraz za susceptibilnost snovi, ki jo sestavljajo polarne molekule:

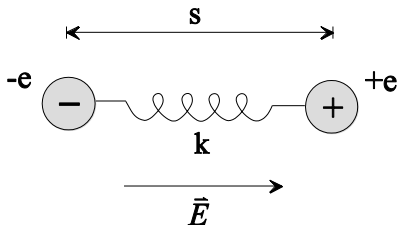
$$\boxed{\chi_{pol} = \frac{n p_e^2}{3 \varepsilon_0 k T}} , \tag{3.2.27}$$

3.2.4 SNOV SESTAVLJENA IZ NEPOLARNIH MOLEKUL

Nepolarne molekule nimajo permanentnih električnih dipolnih momentov. Če se ne nahajajo v zunanjem električnem polju je njihov električni dipolni moment enak nič. Če pa jih postavimo v zunanje električno polje E_0, to polje razmakne težišči negativnega in pozitivnega dela nepolarne molekule. Zaradi tega imajo nepolarne molekule v zunanjem električnem polju od nič različen **inducirani** električni dipolni moment:

$$p_e = e s , \tag{3.2.28}$$

kjer je s inducirani razmik med težiščema negativnega in pozitivnega dela nepolarne molekule:



Predpostavimo, da med negativnim in pozitivnim delom nepolarne molekule deluje privlačna sila

$$F = -ks . \tag{3.2.29}$$

Za nepolarno molekulo v električnem polju *E* lahko tako zapišemo pogoj za ravnovesje sil v obliki:

$$ks = e E , \tag{3.2.30}$$

od tod pa sledi:

$$\boxed{s = \frac{e E}{k}} , \tag{3.2.31}$$

kjer je *E* vsota zunanjega električnega polja E_0 in električnega polja zaradi induciranih dipolnih momentov nepolarnih molekul E_i: $E = E_0 - E_i$.

Inducirani dipolni moment nepolarne molekule lahko tako zapišemo v obliki:

$$p_e = e\,s = \frac{e^2\,E}{k} \quad . \tag{3.2.32}$$

Polarizacijo v snovi, ki vsebuje nepolarne molekule pa izrazimo kot:

$$P = n\,p_e = \frac{n\,e^2\,E}{k} . \tag{3.2.33}$$

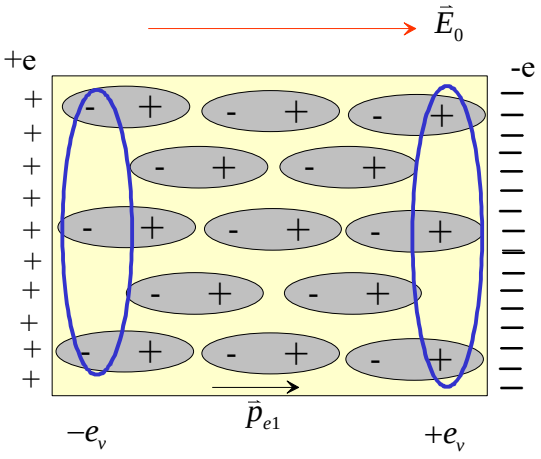
Ob upoštevanju definicije susceptibilnosti (enačba 3.2.26) iz enačbe (3.2.33) sledi:

$$\chi_{\text{nepol}} = \frac{n\,e^2}{\varepsilon_0 k} \quad . \tag{3.2.34}$$

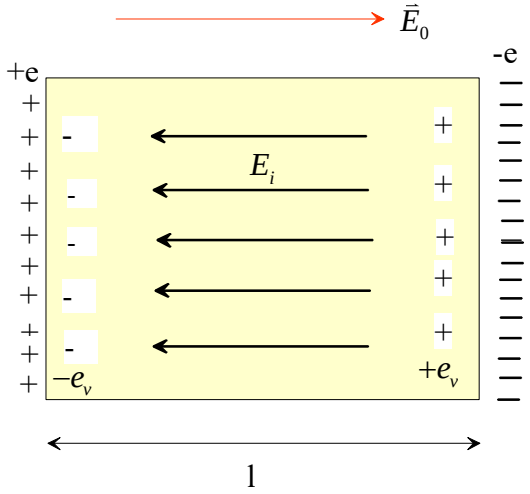
3.2.5 ZVEZA MED SUSCEPTIBILNOSTJO (χ) IN DIELEKTRIČNO KONSTANTO (ε)

Obravnavamo primer **ploščatega kondenzatorja**, ki ima v prostoru med ploščama snov. Zaradi enostavnosti vpeljemo tako imenovani vezani naboj.

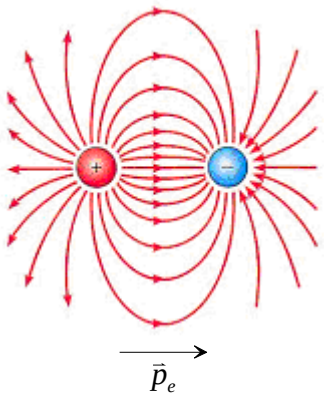
DEJANSKO STANJE:



NADOMESTNA SLIKA:



električno polje ene molekule



E_0	≡	jakost zunanjega električnega polja
l	≡	razdalja med ploščama kondenzatorja
S	≡	površina ene plošče kondenzatorja
e_v	≡	vezan naboj
e	≡	naboj na ploščah kondenzatorja
E_i	≡	električno polje zaradi snovi

V nadomestni sliki nadomestimo električne dipole molekul v snovi med ploščama kondenzatorja z **vezanim** nabojem na notranji strani plošč kondenzatorja:

$$PV = e_v\, l\ , \tag{3.2.35}$$

kjer je

$$V = l\ S \tag{3.2.36}$$

volumen snovi med ploščama kondenzatorja. Iz enačb (3.2.35) in (3.2.36) sledi:

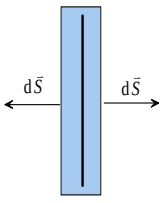
$$P\, l\, S = e_v\, l\ \ ,$$

$$\boxed{e_v = P\, S}\ . \tag{3.2.37}$$

Gaussov zakon o električnem pretoku ne upošteva vezanega naboja e_v kot dejanski naboj, saj obravnava snov med ploščama kondenzatorja kot električno nevtralno z volumsko gostoto naboja $\rho_e = 0$. Zato velja:

$$\oint \vec{D}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = e\,, \tag{3.2.38}$$

kjer integriramo po prostoru okoli ene plošče kondenzatorja, ki nosi naboj e:



torej:

$$D_1 2S = e$$

$$\boxed{D_1 = \frac{e}{2S} = \varepsilon_0 E_{01}} \ , \tag{3.2.39}$$

kjer je

$$E_{01} = \frac{e}{2\varepsilon_0 S}$$

električno polje zaradi naboja e na eni plošči kondenzatorja. Električno polje v prostoru med ploščama kondenzatorja zaradi naboja na obeh ploščah pa je:

$$E_0 = 2E_{01} = \frac{e}{\varepsilon_0 S} \ . \tag{3.2.40}$$

Ustrezna gostota električnega polja v prostoru med ploščama pa je:

$$\boxed{D = D_1 + D_2 = \varepsilon_0 E_0} \ , \tag{3.2.41}$$

Zaključek: gostota električnega polja *D* se nanaša samo na električno polje E_0, ki je posledica dejanskega naboja na obeh ploščah kondenzatorja. Vezani naboj e_v **ni upoštevan v Gaussovem zakonu** (3.2.38). Kot smo že spoznali je celotno električno polje med ploščama kondenzatorja *E* enako:

$$\boxed{E = E_0 - E_i} \ , \tag{3.2.42}$$

kjer je E_i prispevek snovi med ploščama kondenzatorja, ki ga izračunamo s pomočjo vezanega naboja:

$$E_i = \frac{e_v}{S\varepsilon_0} \tag{3.2.43}$$

Ob upoštevanju enačbe (3.2.37) iz enačbe (3.2.43) sledi:

$$E_i = \frac{e_v}{S\varepsilon_0} = \frac{PS}{S\varepsilon_0} = \frac{P}{\varepsilon_0} \tag{3.2.44}$$

Vstavimo izraz (3.2.44) v enačbo (3.2.42) in dobimo:

$$E = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0} \ , \tag{3.2.45}$$

oziroma

$$\varepsilon_0 E = \varepsilon_0 E_0 - P \quad . \tag{3.2.46}$$

Ob upoštevanju enačbe (3.2.41) in enačbe (3.2.46) sledi:

$\varepsilon_0 E = D - P$,

oziroma

$$D = \varepsilon_0 E + P \quad . \tag{3.2.47}$$

Če upoštevamo še (glejte enačbo (3.2.26)):

$P = \chi \varepsilon_0 E$

Iz enačbe (3.2.47) sledi:

$$D = \varepsilon_0 E + \chi \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 (1 + \chi) E \quad . \tag{3.2.48}$$

kjer je χ susceptibilnost. Enačbo (3.2.48) zapišemo v obliki:

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon E \quad , \tag{3.2.49}$$

kjer smo definirali dielektričnost snovi kot:

$$\varepsilon = 1 + \chi \quad , \tag{3.2.50}$$

Zaključek:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_0 \tag{3.2.51}$$

$$\oint \vec{D}\, \mathrm{d}S = e \qquad \vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{E}_i \quad .$$