SNOV V MAGNETNEM POLJU

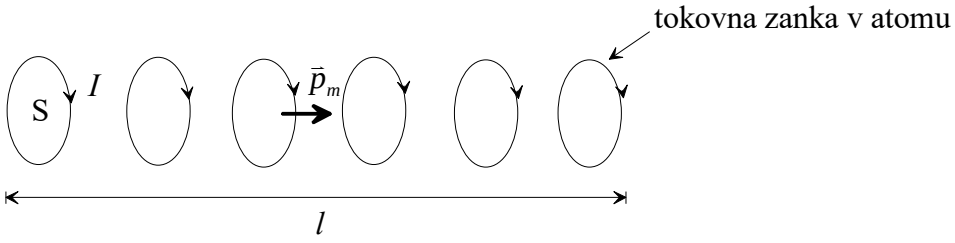
Magnetizacija

$$M = n\, p_m$$

n = N/V p_m = magnetni dipolni moment enega atoma/molekula

Teoretični model : enodimenzionalen kristal

l = dolžina 1-D kristala, S = površina tokovne zanke v enem atomu
N = število atomov (število tokovnih zank) v 1-D kristalu



Amperov zakon $\oint \vec{B}_m \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \mu_0 N I$

magnetno polje v 1-D kristalu $B_m = \mu_0 \dfrac{N I}{l}$ $V = S\, l$ ≡ volumen kristala

$$B_m = \mu_0 \frac{N I}{l} = \mu_0 \frac{N}{l S} S I = \mu_0 \frac{N}{V} p_m = \mu_0 n\, p_m = \mu_0 M \ ,$$

$B_m = \mu_0 M$ $M = n\, p_m$ $p_m = I S$ $n = \dfrac{N}{V}$

$$B = B_0 + B_m = \mu_0 H + \mu_0 M$$

če (!!!) $M \approx \chi H$, kjer je χ = susceptibilnost

$$B = \mu_0 H + \mu_0 M = \mu_0 H + \mu_0 \chi H = \mu_0 \mu H$$

definirali smo **permeabilnost** $\mu = 1 + \chi$ $B = \mu_0 \mu H$

$B = \mu \mu_0 H$ $\quad \mu = 1 + \chi$

Paramagnetic Substance	χ	Diamagnetic Substance	χ
→ Aluminum	2.3×10^{-5}	Bismuth	-1.66×10^{-5}
Calcium	1.9×10^{-5}	Copper	-9.8×10^{-6}
Chromium	2.7×10^{-4}	Diamond	-2.2×10^{-5}
Lithium	2.1×10^{-5}	Gold	-3.6×10^{-5}
Magnesium	1.2×10^{-5}	Lead	-1.7×10^{-5}
Niobium	2.6×10^{-4}	Mercury	-2.9×10^{-5}
Oxygen (STP)	2.1×10^{-6}	Nitrogen (STP)	-5.0×10^{-9}
Platinum	2.9×10^{-4}	Silver	-2.6×10^{-5}
Tungsten	6.8×10^{-5}	Silicon	-1.2×10^{-6}

$\chi > 0$ $\chi < 0$

$\chi > 0 \Rightarrow \mu > 1$: paramagnetne snovi

$\chi < 0 \Rightarrow \mu < 1$: diamagnetne snovi

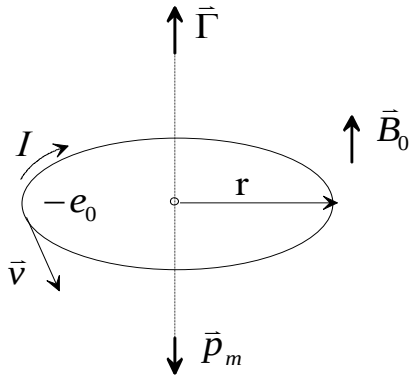
{ χ zelo veliki $\Rightarrow \mu(H) \gg 1$; B in H nista sorazmerna } : feromagnetne snovi

KLASIČNI MODEL DIAMAGNETIZMA

- snov damo v magnetno polje gostote $\vec{B}_0$
- na »inducirano« gibanje elektrona v atomu (v skladu z Lenzovim pravilom) gledamo kot na majhno tokovno zanko
- $A=\pi r^2$ (površina zanke)

vrtilna količina: $\vec{\Gamma}=m_e\,\vec{r}\times\vec{v}$ v našem primeru: $\Gamma=m_e\,r\,v$

- $m_e \equiv$ masa elektrona
- $\vec{v}$ ≡ hitrost elektrona



- $e_0 \equiv$ osnovni naboj

$I=\frac{e_0}{t_0}$, t_0 ≡ obhodni čas elektrona

$$I=\frac{e_0}{t_0}=\frac{e_0 v}{2\pi r}=\frac{e_0}{2\pi}\frac{v}{r}$$

$$p_m=I\,A=\frac{e_0}{2\pi}\frac{v}{r}\pi r^2=\frac{e_0}{2m_e}\Gamma$$

minus !!!

$$\vec{p}_m=-\frac{e_0}{2m_e}\vec{\Gamma}$$

Kroženje elektrona v magnetnem polju (Newtonov zakon za kroženje)

$$m_e\,a_r=m_e\frac{v^2}{r}=e_0\,v\,B_0$$

$a_r \equiv$ radialni pospešek

$$m_e\,v=e_0\,r\,B_0 \quad\Rightarrow\quad \Gamma=m_e\,r\,v=e_0\,r^2\,B_0$$

od tod :

$$p_m=-\frac{e_0}{2m_e}\Gamma=\frac{-e_0}{2m_e}\left(e_0\,r^2\,B_0\right)=-\frac{e_0^2\,r^2}{2m_e}\mu_0\,\mathrm{H}$$

$$p_m = -\frac{e_0}{2m_e}\Gamma = \frac{-e_0}{2m_e}\left(e_0\, r^2\, B_0\right) = -\frac{e_0^2\, r^2}{2m_e}\,\mu_0\,\mathrm{H}$$

Magnetizacija

$$M = n\, p_m = -\frac{n e_0^2\, r^2}{2\, m_e}\,\mu_0\,\mathrm{H} \qquad n = \frac{N}{V}$$

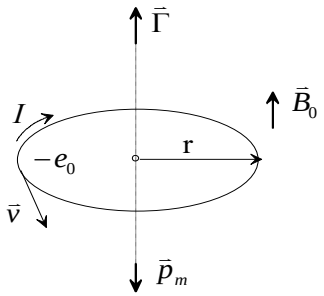
atom ima Z elektronov, $\langle r^2 \rangle \equiv$ povprečna vrednost kvadratov polmerov tirov vseh elektronov :

$$M = -\frac{n e_0^2 \langle r^2 \rangle Z}{2\, m_e}\,\mu_0\, H. \qquad \chi = -\mu_0\, n\, Z\, \frac{e_0^2 \langle r^2 \rangle}{2\, m_e}$$

Primer: n = 10^{29} m^{-3} , Z = 10, $\langle r^2 \rangle = 10^{-20}\ m^2$ sledi: $\chi \cong -10^{-5}$

Zaključki:

inducirani magnetni moment atoma $\vec{p}_m$ kaže v nasprotni smeri kot zunanje magnetno polje $\vec{B}_0$



DIAMAGNETIZEM je lastnost vseh snovi, vendar so inducirani magnetni momenti p_m opazni samo v snoveh, ki imajo »trajni« magnetni dipolni moment enak **nič**, t.j. v snoveh, ki niso paramagnetne ali feromagnetne.

KLASIČNI MODEL PARAMAGNETIZMA

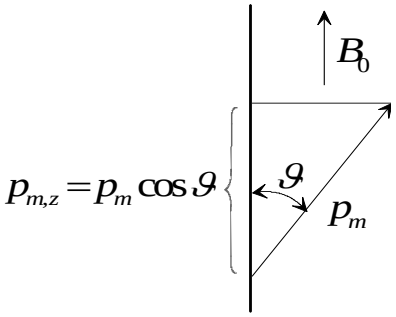
$$B = B_0 + B_m$$

B_m = prispevek orientiranih mag. dipolov

B_0 = zunanje magnetno polje

Vzrok orientacije: minimalna energija za kot $\vartheta = 0$

$$W_m = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}_0 = -p_m B_0 \cos\vartheta$$



Opomba: zaradi termične energije atomov (molekul) pri končnih temperaturah
Povprečni kot ϑ ni enak nič !!!

$$M = n\langle p_{m,z}\rangle \qquad B_m = \mu_0 M = \mu_0 n\langle p_{m,z}\rangle \qquad n = N/V$$

$$M = n\, p_m \langle\cos\vartheta\rangle$$

Povprečna vrednost kosinusa kota ϑ $(\langle\cos\vartheta\rangle)$?

$$\langle\cos\vartheta\rangle = \frac{\int \cos\vartheta\, e^{-\beta W_m}\, d\Omega}{\int e^{-\beta W_m}\, d\Omega}$$

$$W_m = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}_0 = -p_m B_0 \cos\vartheta$$

$e^{-\beta W_m}$ = verjetnost (Boltzmannov faktor), da je atom (molekula) v stanju z zasukom ϑ

β = 1/kT

k = Boltzmannova konstanta = $1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K

T = absolutna temperatura.

infinitezimalni element prostorskega kota v sferičnih koordinatah: $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}S/r^2 = \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$

$$\langle\cos\vartheta\rangle = \frac{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\vartheta e^{-\beta W_m}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}e^{-\beta W_m}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi}$$

energija $W_m = -\vec{p}_m\cdot\vec{B}_0 = -p_m B_0\cos\vartheta$ ni odvisna od kota φ:

$$\langle\cos\vartheta\rangle = \frac{\int_0^{\pi}2\pi\cos\vartheta e^{-\beta W_m}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta}{\int_0^{\pi}2\pi e^{-\beta W_m}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta}$$

nova spremenljivka : $s = \cos\vartheta$ in oznaka : $x = p_m B_0/kT = \beta p_m B_0$:

$$\langle\cos\vartheta\rangle = \frac{-\int_1^{-1}se^{xs}\mathrm{d}s}{-\int_1^{-1}e^{xs}\mathrm{d}s} = \coth x - \frac{1}{x} \equiv L(x)$$

$L(x)$ = Langevinova funkcija

razvoj v vrsto $(0<|x|<\pi)$: $\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + ...$

$x = p_m B_0/kT \ll 1$: $\langle\cos\vartheta\rangle = \coth x - \frac{1}{x} \cong \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{1}{x} = \frac{x}{3} = \frac{p_m B_0}{3kT}$

$$M = n p_m\langle\cos\vartheta\rangle = \frac{n p_m^2 B_0}{3kT} = \frac{\mu_0 n p_m^2}{3kT}H = \chi H$$

$$\chi = \frac{\mu_0 n p_m^2}{3kT}$$

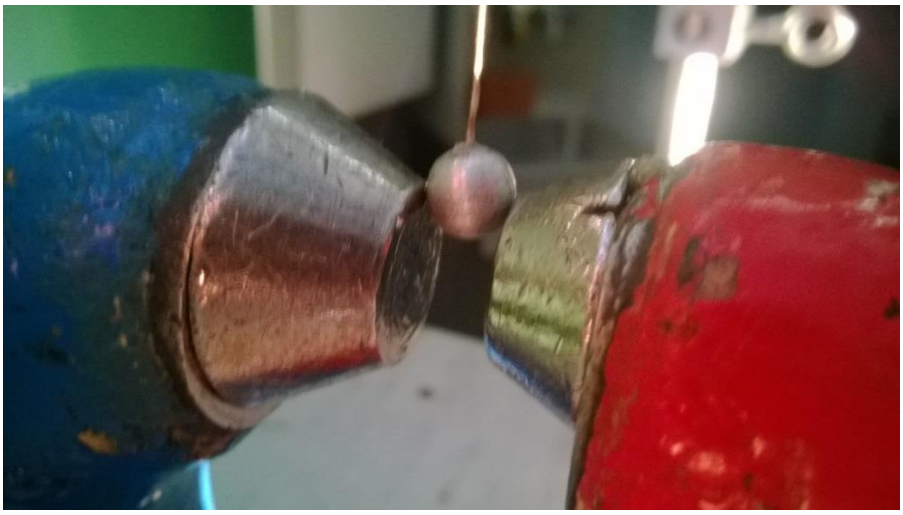
za $p_m B_0/kT \ll 1$ susceptibilnost χ
obratno sorazmerna z absolutno temperaturo T

v splošnem : $\langle \cos\vartheta \rangle = \coth x - \frac{1}{x} = L(x)$ $\qquad x = p_m B_0 / kT = p_m \mu_0 H / kT$

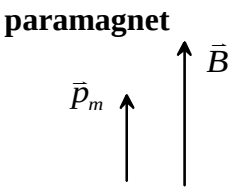
$$M = n p_m \langle \cos\vartheta \rangle = n p_m L(x) = \frac{n p_m L(p_m \mu_0 H / kT)}{H} H = \chi H$$

$$\chi = \frac{n p_m L(\mu_0 p_m H / kT)}{H}$$

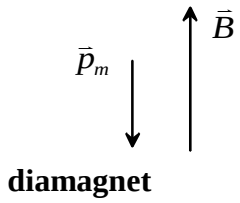
POSKUS: PARAMAGNET IN DIAMAGNET V NEHOMOGENEM MAGNETNEM POLJU



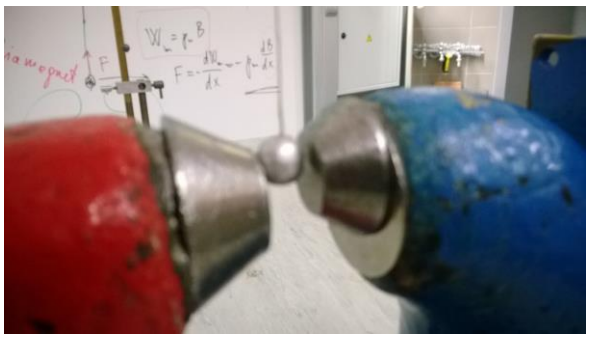
$\varphi = 0$: $W_m = - p_m B$ (energijski minimum) :



$\varphi = \pi$: $W_m = + p_m B$ (energijski maximum):



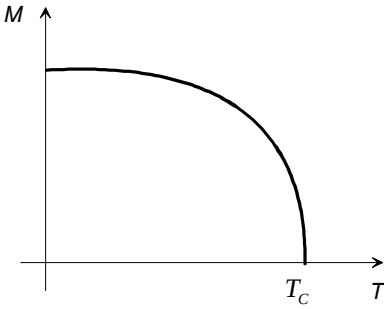
diamagnet



paramagnet

FEROMAGNETIZEM

Spontana magnetizacija *znotraj domen* (tudi **brez zunanjega magnetnega polja**)



$T_C \equiv$ Curiejeva temperatura

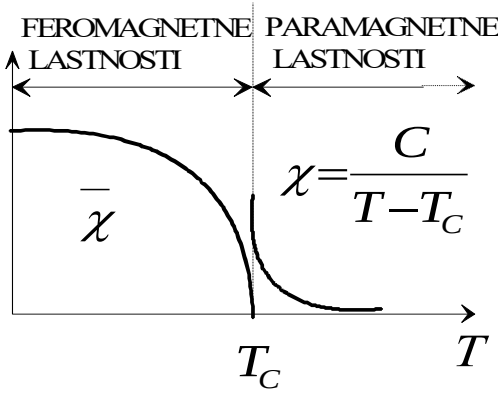
Curie-jeva temperatura za nekaj feromagnetnih snovi	
snov	T_C (K)
železo	1043
kobalt	1394
nikelj	631
gadolinij	317
Fe_2O_3	893

za $T \geq T_C$ feromagnetne snovi izgubijo spontano magnetizacijo in postanejo paramagneti

za $T \geq T_C$ velja za feromagnete Curie – Weissov zakon:

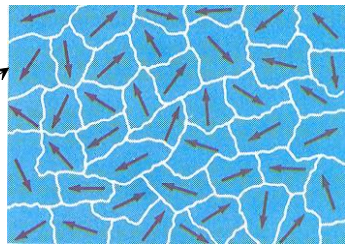
$\chi \equiv$ susceptibilnost $\qquad \chi = \frac{C}{T - T_C}$

$\overline{\chi} \equiv$ povprečna susceptibilnost feromagneta

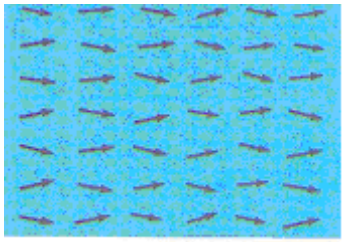


DOMENA
$(10^{19} - 10^{21}$ atomov$)$

$\vec{B}_0 = 0$



nemagnetno stanje snovi
domene so usmerjene naključno



$\vec{B}_0$

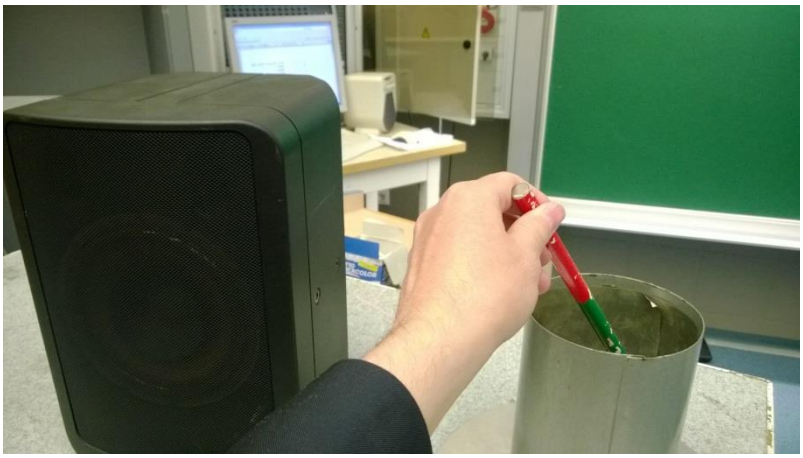
ureditev domen v zunanjem magnetnem polju $(\vec{B}_0)$, μ ni konstanta.

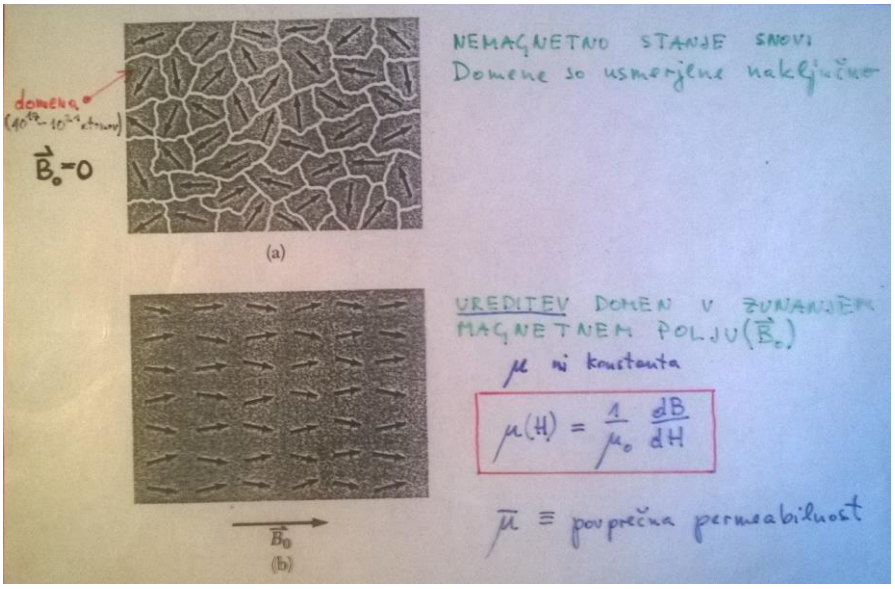
$$\mu(H) = \frac{1}{\mu_0}\frac{dB}{dH}$$

$\overline{\mu} \equiv$ povprečna permeabilnost

sliki: Serway, 1992

SLIKA: BARKHAUSENOV POJAV/POSKUS





DODATEK : Isingov model feromagnetizma

Isingov model, ki se uporablja predvsem za opis feromagnetizma, se imenuje po fiziku Ernstu Isingu, ki se je rodil v Nemčiji leta 1900 in umrl v ZDA leta 1998. Isingov model je osnova nekaterih statistično-mehanskih teoretičnih modelov, ki se uporabljajo za opis feromagnetizma/feromagnetov (železo, kobalt, nikelj, magnetit Fe_3O_4 in druge).

Na kratko ponovimo kar smo se do sedaj naučili. K celotnemu magnetnemu polju v snovi B_{tot} prispeva zunanje magnetno polje (B) in magnetno polje atomov (molekul) v snovi (B_m): $B_{tot} = B + B_m$. Magnetno polje v snovi B_m je sorazmerno magnetizaciji: $B_m = \mu_0 M$, ki je definirana kot $M = n\langle p_m \rangle$, kjer je $\langle p_m \rangle$ povprečna vrednost komponentne magnetnega dipolnega momenta molekule v smeri magnetnega polja, $n = N/V$ število molekul na enoto volumna in μ_0 indukcijska konstanta. Magnetizacija je pod določenimi pogoji sorazmerna jakosti magnetnega polja H: $M = \chi H$, kjer je χ susceptibilnost:

$$B_{tot} = B + B_m = B + \mu_0 \chi H = \mu_0 H + \mu_0 \chi H = \mu_0 (1 + \chi) H = \mu_0 \mu H \ , \qquad (1)$$

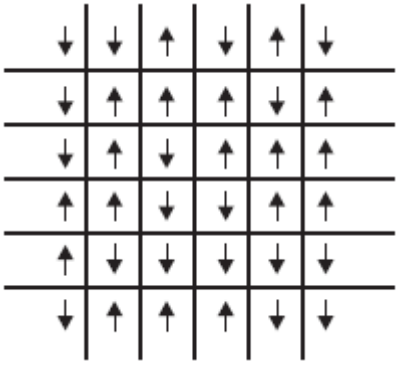
kjer je $\mu = 1 + \chi$ permeabilnost.

V nadaljevanju obravnavamo **2-dimenzionalni Isingov model feromagnetizma v okviru mrežnega modela**, ki je shematsko prikazan na sliki 1. Prosto energijo F modelnega sistema, ki je shematsko prikazan na sliki 1, zapišemo v obliki:

$$F = E - T S \ , \qquad (2)$$

kjer je E notranja energija energija sistema, ki zajema povprečno energijo lastnih in medsebojnih interakcijskih energij vseh molekul v sistemu, S je entropija sistema, T pa absolutna temperatura merjena v stopinjah Kelvina. Najprej bomo izračunali entropijo sistema (S), ki nastopa v enačbi (2). V našem primeru 2-dimenzionalnega Isingovega modela feromagnetizma obravnavamo N molekul v 2-dimenzionalni mreži z N mesti. Posamezna molekula je lahko v dveh stanjih glede na usmeritev njenega magnetnega dipolnega momenta, ki lahko kaže samo gor (+) (v smeri magnetnega polja) ali dol (−) (glejte še sliko 1).

Izračunajmo konfiguracijsko entropijo sistema. Število možnih prostorskih razporeditev za prvo molekulo, ki jo postavimo v prazno 2-dimenzionalno mrežo z N mesti je N, za drugo molekulo ($N - 1$), za tretjo molekulo ($N - 2$) in tako naprej. Vseh možnih razporeditev je tako N (N−1) (N−2) . . $3 \cdot 2 \cdot 1 = N!$. Pri tem smo upoštevali, da so vse molekule med seboj razločljive. V resnici pa molekul, ki imajo magnetni dipolni momemnt obrnjen navzgor (označimo njihovo število z N_+) med seboj ne moremo razločevati. Prav tako ne moremo razločevati med molekulami, ki imajo magnetne dipolne momente.



Slika 1: Prikaz magnetnih dipolnih momentov molekul v Isingovem modelu, ki so razporejeni v kvadratno 2-dimenzionalno mrežo in imajo lahko samo dve orientaciji (↑ in ↓) .

Obrnjene navzdol (označimo njihovo število z N_{-}). Tako, da celotno število možnih razporeditev N molekul na N mrežnih mest ni $N!$ pač pa W :

$$W = \frac{N!}{N_{+}!N_{-}!}. \tag{3}$$

Za sistem, ki je v termičnem ravnovesju zapišemo konfguracijsko entropijo v 2-dimenzionalnem Isingovem mrežnem modelu kot (glejte še učbenik Mehanika in termodinamika) :

$$S = k\ln W = k\ln\left[\frac{N!}{N_{+}!N_{-}!}\right] = k\left[\ln N! - \ln N_{+}! - \ln N_{-}!\right], \tag{4}$$

kjer predpostavimo samo dve možni orientaciji magnetnih dipolnih momemntov (↑ in ↓) posamezne molekule v sistemu. Pri računanju konfiguracijske entropije (S) privzamemo, da je verjetnost za orientacijo posameznega spina neodvisna od orientacij sosednjih spinov.

Za velike N-je uporabimo Stirling-ovo aproksimacijo: $\ln N! \approx N\ln N - N$, ter tako iz enačbe (4) dobimo sledeče:

$$\begin{aligned} S &= k\left[N\left(\ln N - 1\right) - N_{+}\left(\ln N_{+} - 1\right) - N_{-}\left(\ln N_{-} - 1\right)\right] = \\ &= k\left[\left(N_{+} + N_{-}\right)\ln N - N_{+}\ln N_{+} - N_{-}\ln N_{-}\right] = \\ &= k\left[N_{+}\ln N + N_{-}\ln N - N_{+}\ln N_{+} - N_{-}\ln N_{-}\right], \end{aligned} \tag{5}$$

oziroma:

$$S = k\left[N_{+}\ln\frac{N}{N_{+}} + N_{-}\ln\frac{N}{N_{-}}\right] = -kN\left[\frac{N_{+}}{N}\ln\frac{N_{+}}{N} + \frac{N_{-}}{N}\ln\frac{N_{-}}{N}\right] = -kN\left[c_{+}\ln c_{+} + c_{-}\ln c_{-}\right], \tag{6}$$

kjer je $c_+ = \frac{N_+}{N}$ verjetnost, da je magnetni dipolni moment molekule obrnjen navzgor, $c_- = \frac{N_-}{N}$ pa verjetnost, da je obrnjen navzdol. Od tod sledi:

$$c_+ + c_- = 1 \ , \tag{7}$$

kjer smo upoštevali $N = N_+ + N_-$.

V nadaljevanju izpeljemo izraz za energijo sistema, ki jo sestavlja vsota lastnih energij magnetnih dipolnih momentov molekul (2. člen) ter njihove medsebojne interakcijske energije (1. člen) :

$$E = -\sum_{i,k} J_{ik}\, \sigma_i\, \sigma_k - p_m\, B \sum_i \sigma_i \ , \tag{8}$$

kjer je p_m velikost magnetnega dipolnega momenta ene molekule, B gostota magetnega polja, J_{ik} moč interakcijske energije (t.j. moč sklopitve) med i-tim in k-tim sosednjim magnetnim dipolom (pri čemer upoštevamo samo najbližje sosede), spremenljivka σ_i določa orientacijo posameznega magnetnega dipola (↑ pomeni usmeritev v smeri magnetnega polja ($\sigma_\uparrow$), ↓ pa usmeritev v nasprotni smeri ($\sigma_\downarrow$)). Poljubno orientacijo magnetnih dipolnih momentov atomov (molekul) smo torej tako kot že prej pri izpeljavi entropije sistema nadomestili z dvema orientacijama (↑ in ↓, glejte sliko 1). Pravimo, da obravnavamo orientacijo magnetnega dipolnega momenta molekule v okviru 2-stanjskega modela.

V prvem členu v enačbi (8), to je v izrazu za interakcijsko energijo magnetnih dipolnih momentov molekul v sistemu upoštevamo le interakcijske energije najbližjih sosedov, kjer upoštevamo $J_{ik} = J$. Tako lahko prvi člen v enačbi (8) zapišemo v obliki:

$$-J \sum_{i,k} \sigma_i\, \sigma_k \ . \tag{9}$$

Energijo sklopitve magnetnih dipolnih momentov $-J \sum_{i,k} \sigma_i\, \sigma_k$ zapišemo v dveh korakih. Najprej izračunamo povprečno energijo magnetnih dipolov, ki so usmerjeni navzgor (↑):

$$-J \left(N\, c_+ \right) \sigma_\uparrow \overline{\sigma}_{\text{sosed}}\, z \ , \tag{10}$$

kjer je Nc_+ povprečno število magnetnih dipolov v sistemu, ki so usmerjeni navzgor (↑), N število vseh magnetnih dipolov v sistemu, σ_{sosed} pa povprečna vrednost σ najbližjih sosedov, ki jih je z:

$$\overline{\sigma}_{\text{sosed}} = \left(c_+ - c_- \right) \ . \tag{11}$$

Kombinacija enačb (10) in (11) nam da:

$$-J\,N\,c_{+}\sigma_{\uparrow}\overline{\sigma}_{\text{sosed}}\,z=-J\,N\,c_{+}\left(c_{+}-c_{-}\right)z\,, \tag{12}$$

kjer smo upoštevali $\sigma_{\uparrow}=1$. Podobno izračunamo še povprečno energijo magnetnih dipolov v sistemu, ki so usmerjeni navzdol (↓):

$$-J\,N\,c_{-}\sigma_{\downarrow}\overline{\sigma}_{\text{sosed}}\,z=-J\,N\,c_{-}\left(-1\right)\left(c_{+}-c_{-}\right)z=-J\,N\,c_{-}\left(c_{-}-c_{+}\right)z\,, \tag{13}$$

kjer smo upoštevali $\sigma_{\downarrow}=-1$. Povprečno interakcijsko energijo vseh magnetnih dipolov v sistemu dobimo tako, da seštejemo enačbi (12) in (13) (↑ in ↓):

$$-J\sum_{i,k}\sigma_{i}\,\sigma_{k}=-\frac{1}{2}z\,N\,J\left[c_{+}\,c_{+}+c_{-}\,c_{-}-2\,c_{+}\,c_{-}\right], \tag{14}$$

kjer je faktor 1/2 dodan zato, ker smo vse interakcije šteli dvakrat (pri ↑ in ↓). Število najbližnjih sosedov (z) okoli izbranega atoma je v našem primeru 2-dimenzionalne mreže enako 4 (glejte sliko 1), v 1-dimenzionalnem modelu je z = 2, v 3-dimenzionalnem mrežnem modelu pa je z = 6. Drugi člen iz enačbe (8), to je $p_{m}B\sum_{i}\sigma_{i}$, ki opisuje energijo magnetnih dipolov v povprečnem magnetnem polju *B* izrazimo kot:

$$-p_{m}B\sum_{i}\sigma_{i}=-p_{m}\,B\,N\left(c_{+}-c_{-}\right). \tag{15}$$

Celotno povprečno energijo sistema *E* (glejte enačbe (8), (14) in (15)) lahko tako zapišemo v obliki:

$$E=-\frac{1}{2}z\,N\,J\left[c_{+}^{2}+c_{-}^{2}-2\,c_{+}c_{-}\right]-p_{m}\,BN\left(c_{+}-c_{-}\right). \tag{16}$$

Vpeljemo novo spremenljivko $x = c_{+} - c_{-}$ in upoštevamo enačbo (7), od koder sledi:

$$c_{+}=\frac{1}{2}\left(1+x\right), \tag{17}$$

$$c_{-}=\frac{1}{2}\left(1-x\right). \tag{18}$$

Ob upoštevanju izrazov (17) in (18) lahko zapišemo izraz za energijo E (en.(16)) v obliki:

$$E=N\left\{-\frac{1}{2}z\,Jx^{2}-p_{m}Bx\right\}, \tag{19}$$

izraz za entropijo sistema S (en.(6)) pa kot:

$$S = -kN\left\{\frac{1}{2}(1+x)\ln(1+x)+\frac{1}{2}(1-x)\ln(1-x)-\ln 2\right\}. \tag{20}$$

Prosto energijo sistema $F = E - TS$ ima sedaj obliko:

$$F = N\left\{-\frac{1}{2}z\,J\,x^2 - p_m B x+\frac{kT}{2}(1+x)\ln(1+x)+\frac{kT}{2}(1-x)\ln(1-x)\right\}, \tag{21}$$

kjer smo izpustili člen $-kTN$ ln2, ki ni odvisen od x. V nadaljevanju poiščemo minimum proste energije sistema F tako, da odvajamo enačbo (21) po spremenljivki x :

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\frac{\partial F}{\partial x} &= -z\,Jx - p_m\,B+\frac{kT}{2}\left[\ln(1+x)+\frac{(1+x)}{(1+x)}\right]+\frac{kT}{2}\left[-\ln(1-x)-\frac{(1-x)}{(1-x)}\right]= \\ &= -z\,Jx - p_m\,B+\frac{kT}{2}\ln\left[\frac{(1+x)}{(1-x)}\right]=0.\end{aligned} \tag{22}$$

Uvedemo oznako:

$$\alpha = \ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right] \;\Rightarrow\; e^{\alpha} = \frac{1+x}{1-x}\;\Rightarrow, \tag{23}$$

od koder sledi:

$$x = \frac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}+1} = \tanh\frac{\alpha}{2}. \tag{24}$$

Izraz za α iz enačbe (23) upoštevamo v enačbi (22) in dobimo:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{p_m B + z\,J\,x}{kT}. \tag{25}$$

Izraz za $\alpha/2$ iz enačbe (25) nato vstavimo v desno stran enačbe (24)
in končno dobimo :

$$x = \tanh\left[\frac{p_m B + z\,J\,x}{k\,T}\right]. \tag{26}$$

V okviru obravnavanega 2-dimenzionalnega Isingovega modela lahko magnetizacijo sistema M zapišemo v obliki:

$$M = n\langle p_m\rangle = p_m\,n(c_+ - c_-) = p_m\,n\,x, \tag{27}$$

kjer je $n = N/V$ volumska gostota molekul.

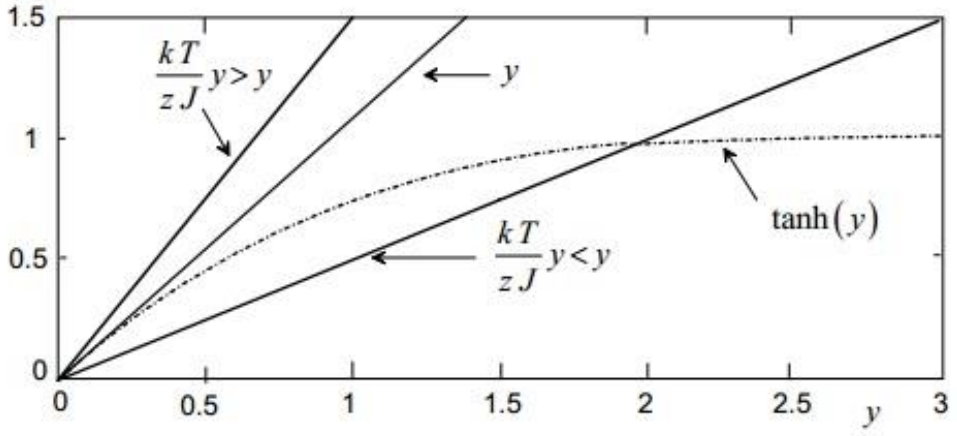
V nadaljevanju se lotimo reševanja enačbe (26) za več posebnih primerov.

1. **V sistemu ni zunanjega magnetnega polja (*B* = 0)**. Enačba (26) se v tem primeru transformira v obliko:

$$x = \tanh\left[\frac{z\,Jx}{kT}\right] \tag{28}$$

Vpeljemo novo spremenljivko $y = \frac{z\,J}{k\,T}x$ in enačbo (28) zapišemo v obliki:

$$\frac{k\,T}{z\,J}y = \tanh(y)\,. \tag{29}$$



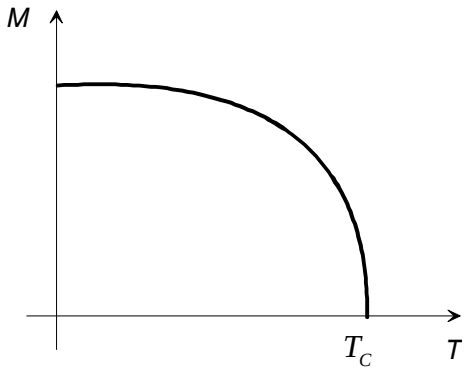
Slika 2: K reševanju enačbe (29).

Rešitev enačbe (29) je pri vrednosti y, kjer se funkciji $\frac{kT}{zJ}y$ in tanh (y) sekata (glejte še sliko 2). Premica $\frac{kT}{zJ}y$ mora imeti naklonski koeficient $\frac{kT}{zJ}$ manjši od 1, da se funkciji $\frac{kT}{zJ}y$ in tanh (y) sekata. Mejna vrednost $\frac{kT_c}{zJ}=1$, ustreza temperaturi

$$T_c = \frac{zJ}{k}\ , \tag{30}$$

ki ji pravimo kritična temperatura.

Pri temperaturah pod T_c obstaja v sistemu spontana magnetizacija $M = p_m\,n\,x$, ki ustreza neničelni rešitvi enačbe (28) (t.j. $x \neq 0$). Nad kritično temperaturo se spontana magnetizacija poruši, enačba (28) takrat nima rešitve za $x \neq 0$. Slika 3 shematsko prikazuje spontano magnetizacijo kot funkcijo temperature *T*.



Slika 3: Temperaturna odvisnost spontane magnetizacije M za $B = 0$.

Tabela za spodaj navaja kot primer vrednosti kritične temperature T_C (Curiejeve temperature) za nekatere feromagnetne materiale.

2. Vrnimo se k splošni enačbi (26) za primer $B \neq 0$ in vprašajmo se, kaj se dogaja z magnetizacijo **pri visokih temperaturah**, ki so nad kritično temperaturo T_C.

   Pri visokih temperaturah ($T > T_C$) je argument v enačbi (26) majhen. Tako uporabimo samo prvi člen razvoja funkcije $\tanh(x) \approx x$ v vrsto in enačbo (26) zapišemo v obliki:

$$x \approx \left(\frac{p_m B + z J x}{kT} \right) \Rightarrow x \left(1 - \frac{zJ}{kT} \right) = \frac{p_m B}{kT} . \tag{31}$$

V enačbi (31) upoštevamo še zvezo $T_C = \frac{z J}{k}$ in jo prepišemo v obliko:

$$x \left(1 - \frac{T_C}{T} \right) = \frac{p_m B}{kT} \Rightarrow x = \frac{\frac{p_m B}{kT}}{1 - \frac{T_c}{T}} . \tag{32}$$

V enačbo za magnetizacijo (27) : $M = \frac{N}{V} p_m x$ vstavimo enačbo (32) in dobimo:

$$M = \frac{N}{V} p_m x = \frac{N}{V} p_m \frac{\frac{p_m B}{kT}}{1 - \frac{T_c}{T}} = \frac{\frac{N p_m^2}{V k} B}{T - T_c} . \tag{33}$$

Ob upoštevanju zveze $B = \mu_0 H$ iz enačbe (33) sledi :

$$M = \frac{\frac{N}{V} \frac{\mu_0 p_m^2}{k}}{T - T_c} H , \tag{34}$$

oziroma:

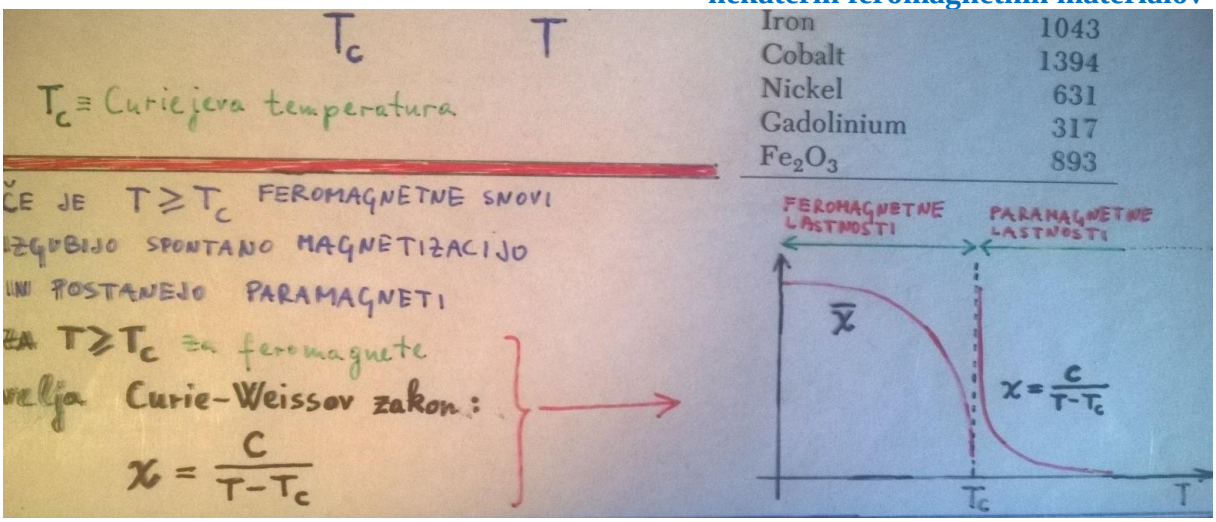
$$M = \chi H \,, \tag{35}$$

kjer je χ magnetna susceptibilnost:

$$\chi = \frac{C}{T - T_c} \,, \tag{36}$$

konstanta C pa je enaka:

$$C = \frac{N}{V} \frac{\mu_0 p_m^2}{k} \,.$$

Tabela : Kritične temperature T_c nekaterih feromagnetnih materialov

Iron	1043
Cobalt	1394
Nickel	631
Gadolinium	317
Fe_2O_3	893