2. izpit iz Atomike in optike (UNI)

29. 6. 2018

1. Izpeljite Stefanov zakon z integracijo Planckovega zakona po valovnih dolžinah:

$$j = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi h c_0^2}{\lambda^5\left(\exp\left(\frac{hc_0}{\lambda kT}\right) - 1\right)}\mathrm{d}\lambda.$$

Pri računanju upoštevajte:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{15}.$$

2. V okviru posebne teorije relativnosti izpeljite izraz za frekvenco kroženja delca v magnetnem polju:

$$\nu = \frac{1}{t_0} = \frac{eB}{2\pi\gamma m_0}.$$

3. Kvadratno zanko s stranico $a = \sqrt{2}$ m vrtimo okoli njene simetrale s kotno hitrostjo $\omega = 1$ rad/s. Zunanje homogeno magnetno polje z gostoto $B = 2$ T oklepa s simetralo zanke kot 45 stopinj. Kolikšen efektivni tok teče v zanki zaradi indukcije, če je upornost zanke $R = 1\ \Omega$?

4. Kolikšna je mirovna masa delca z gibalno količino $p = 2/3$ MeV/c in kinetično energijo $T = 1/3$ MeV? Kolikšna je njegova hitrost? Računajte relativistično.

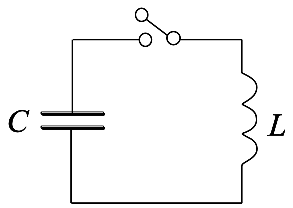
2. izpit iz Atomike in optike (VSP)

29. 6. 2018

1. Izpeljite klasično limito (t.j. limito za majhne hitrosti) relativističnega izraza za kinetično energijo

$$T = m_0 c_0^2(\gamma - 1).$$

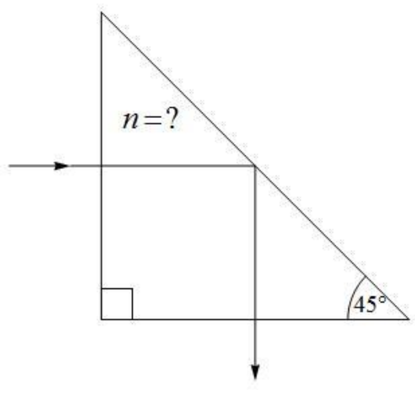
2. Izpeljite izraz za nihajni čas idealnega električnega nihajnega kroga,



ter shematsko narišite časovno odvisno električnega toka skozi tuljavo.

3. Kvadratno zanko s stranico $a = 0.5$ m vrtimo okoli njene simetrale s frekvenco $\nu = 2/\pi$ Hz. Zunanje homogeno magnetno polje z gostoto $B = 0.1$ T je pravokotno na simetralo zanke. Kolikšna je amplituda toka v zanki zaradi indukcije, če je upornost zanke $R = 0.1\ \Omega$?

4. Laserski žarek pravokotno vpada iz zraka na prizmo, kot kaže slika. Najmanj kolikšen mora biti lomni količnik n prizme, da v njej pride do popolnega odboja?



8.4.2.1 Izpeljava Stefanovega zakona iz Planck-ovega zakona

Planckov zakon, ki ga izpeljemo v okviru kvantne statistične fizike, podaja porazdelitev gostote energijskega toka izsevanega elektromagnetnega valovanja po valovnih dolžinah:

$$\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{2\pi h c_0^2}{\lambda^5\left(\exp\left(\dfrac{h c_0}{\lambda k T}\right)-1\right)} \quad ,$$

kjer je h Planckova konstanta, j gostota izsevanega energijskega toka, λ valovna dolžina, k Boltzmannova konstanta, c_0 hitrost svetlobe v vakuumu in T absolutna temperatura.

Stefanov zakon podaja gostoto izsevanega energijskega toka. Dobimo ga z integracijo Planckovega zakona po valovnih dolžinah:

$$j=\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda=\int_0^\infty \frac{2\pi \mathrm{h}\, \mathrm{c}_0^2 \mathrm{d}\lambda}{\lambda^5\left(\exp\left(\dfrac{h c_0}{\lambda k T}\right)-1\right)} \quad .$$

Uvedemo novo spremenljivko:

$$x=\frac{h c_0}{\lambda k T}\ ,\ \mathrm{d}\lambda=-\frac{h c_0}{k T x^2}\mathrm{d}x\ .$$

Zgornji integral potem preide v:

$$j=\frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c_0^2}\int_0^\infty \frac{x^3 \mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}=\frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c_0^2}T^4 \quad .$$

Vrednost zgornjega integrala poiščemo v tabelah, kjer najdemo

$$\int_0^\infty \frac{x^3\, \mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}=\frac{\pi^4}{15}\ .$$

Zgornji izraz preuredimo v bolj znano obliko Stefanovega zakona:

$$j=\sigma T^4$$

kjer je:

$$\sigma=\frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c_0^2}=5.67\times10^{-8}\ \frac{W}{m^2 K^4}$$

Stefanova konstanta je imenovana po avstro-ogrskem fiziku slovenskega rodu Jožefu Stefanu.

Obravnavamo enačbo (8.3.48):

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=e\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right),\quad \vec{P}=m\gamma\vec{v}}\ .$$

Posebna primera: $\vec{E}=0$ ali $\vec{B}=0$

A) Poseben primer: če $\vec{E}=0$ iz enačbe (8.3.48) sledi (kroženje v magnetnem polju):

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=e\vec{v}\times\vec{B},$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\left(m_0\gamma\vec{v}\right)}{\mathrm{d}t}=e\vec{v}\times\vec{B}}\ , \tag{8.3.51}$$

ker $e\vec{v}\times\vec{B}\perp\vec{v},\mathrm{d}\vec{s} \Rightarrow \mathrm{d}A=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=0 \Rightarrow v=\text{konst.}$

$\gamma=\text{konst.}$

Torej: $\dfrac{\gamma\,\mathrm{d}\left(m_0\vec{v}\right)}{\mathrm{d}t}=e\vec{v}\times\vec{B}$,

$\gamma m_0\vec{a}_r=e\vec{v}\times\vec{B}$, kjer je $\vec{a}_r$ radialni pospešek,

$$\gamma m_0\frac{v^2}{r}=evB$$

$$\gamma m_0 v=erB \Rightarrow \quad \boxed{r=\frac{\gamma m_0 v}{eB}=\frac{P}{eB}} \tag{8.3.52}$$

Obhodni čas: $t_0=\dfrac{2\pi r}{v}=\dfrac{2\pi\gamma m_0 v}{eBv}=\dfrac{2\pi\gamma m_0}{eB}$

Frekvenca: $$\boxed{\nu=\frac{1}{t_0}=\frac{eB}{\gamma 2\pi m_0}}\ . \tag{8.3.53}$$

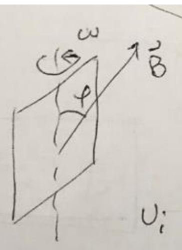
3) $a = \sqrt{2}\,m$

$\omega = 1\ /s$

$B = 2T$

$\varphi = 45^\circ$

$R = 1\Omega$



$$\Phi_M = \vec{B}_\perp \cdot \vec{S} = BS\cos(\omega t)\cdot \sin\varphi \quad (5)$$

$$B_\perp = B\sin\varphi$$

$$U_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} = B\omega S\sin(\omega t)\cdot\sin\varphi \quad (5)$$

$I_{ef} = \frac{I_o}{\sqrt{2}} = ?$

$$I_i = \boxed{\frac{B\omega a^2 \sin\varphi}{R}}\sin(\omega t)\ .$$

$\hookrightarrow I_o$

(5)

$$I_{ef} = \frac{I_o}{\sqrt{2}} = \frac{B\omega a^2 \sin\varphi}{\sqrt{2}R} = \frac{2T\cdot 1Hz\cdot \cancel{2}m^2}{\cancel{\sqrt{2}}\cdot 1\Omega}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} = \boxed{2\ A}$$

(5)

4.) $p = \frac{2}{3}\ MeV/c$

$T = \frac{1}{3}\ MeV$

$m_0 = ?$

$v = ?$

$W^2 = W_0^2 + p^2c^2$ (5)

$W = W_0 + \underset{T}{\underset{\parallel}{W_k}}$

$(W_0 + T)^2 = W_0^2 + p^2c^2$

$\cancel{W_0^2} + 2W_0T + T^2 = \cancel{W_0^2} + p^2c^2$

$$W_0 = \frac{p^2c^2 - T^2}{2T} = \frac{(2/3)^2\ MeV^2/c^2 \cdot c^2 - (1/3)^2\ MeV^2}{2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\ MeV} = \frac{\frac{4}{9} - \frac{1}{9}}{\frac{2}{3}}\ MeV$$

$W_0 = \frac{3}{9}\cdot\frac{3}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\ MeV}} \rightarrow m_0 = \frac{W_0}{c^2}$

$\boxed{m_0 = 0{,}5\ MeV/c^2}$ (5)

$T = m_0c^2(\gamma - 1) = W_0(\gamma - 1)$

$\frac{T}{W_0} + 1 = \gamma$ (5)

$\frac{1/3}{1/2} + 1 = \gamma$

$\boxed{\gamma = \frac{5}{3}} \longrightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$

$\gamma^2\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = 1$

$\gamma^2\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \gamma^2 - 1$

$$\frac{v}{c} = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{\sqrt{\frac{25}{9} - \frac{9}{9}}}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{5}$$ (5)

$\frac{v}{c} = \frac{4}{5} \rightarrow \boxed{v = 0{,}8 \cdot c_0}$

Rešitve VSP. (drugi rok) Atomika + optika, 29.6.2018

1.) $T = m_0 c_0^2 (\gamma - 1)$, $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c_0}\right)^2}}$ (5)

$T = m_0 c_0^2 \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c_0}\right)^2 - 1\right)$ (5)

$T = m_0 c_0^2 \, \frac{1}{2} \, \frac{v^2}{c_0^2}$

$\boxed{T = \dfrac{m_0 v^2}{2}}$ (5)

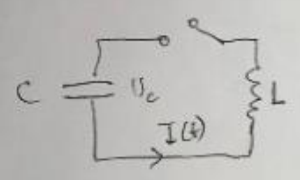
Če $v \ll c_0$: Taylorjev razvoj

$\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c_0}\right)^2 + \mathcal{O}^3$ (5)

$\left((1 \pm x)^{-1/2} \approx 1 \mp \frac{1}{2} x + \dots \right)$

če: $x \ll 1$

2.) Izpeljite C-L nihajni krog



$C = \frac{Q}{U}$

$U_c + L \frac{dI}{dt} = 0$ (5)

$\frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0 \; / \frac{d}{dt}$; $I = \frac{dQ}{dt}$

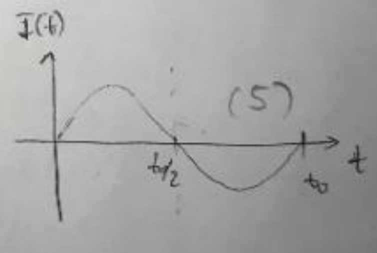
$\frac{I}{C} + L \frac{d^2 I}{dt^2} = 0$

$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{LC} I = 0$ (5) nihajna enačba → Nastavek (*)

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

$\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$; $t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$\boxed{t_0 = 2\pi \sqrt{LC}}$ (5)



(*) $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$

ali

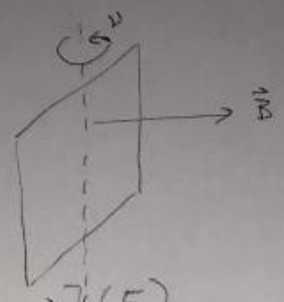
$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$

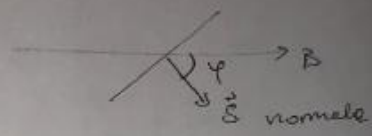
3.) $a = 0,5\ m = \frac{1}{2}\ m$

$\nu = \frac{2}{\pi}\ Hz$

$B = 0,1\ T$

$R = 0,1\ \Omega$





Stranski ris

$\varphi = \omega t = 2\pi\nu t$

$$\Phi_n = \vec{B}\cdot\vec{S} = BS\cos(\omega t) \quad (5)$$

$$\Phi_n = Ba^2\cos(\omega t)$$

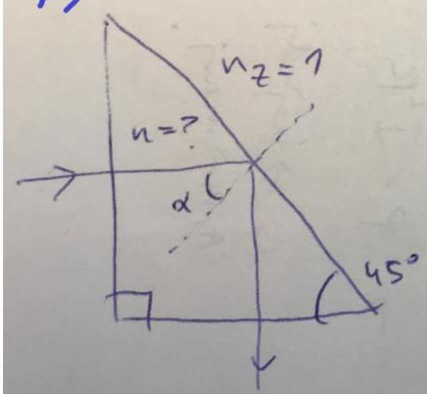
$$U_i = -\frac{d\Phi_n}{dt} = Ba^2\omega\sin(\omega t) \quad (5)$$

$$I_i = \frac{U_i}{R} = \frac{Ba^2\omega}{R}\sin(\omega t) \quad (5)$$

I_0 amplituda toka. ~~[illegible]~~, ~~[illegible] $\sin(\omega t)$~~ = 1.

$$I_0 = \frac{Ba^2\omega}{R} = \frac{0,1\,T\cdot(\frac{1}{4})\,m^2\cdot 2\pi\cdot(\frac{2}{\pi})\,Hz}{0,1\,\Omega} = \boxed{1\ A} \quad (5)$$

4)



Potpuni odboj:

$$n\cdot\sin\alpha = n_z\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$n = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$n = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$