

3.3 POISSONOVA ENAČBA

3.3.1 SPLOŠNO*

Gaussov zakon o električnem pretoku:

integralna oblika:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \rho_e dV$$

diferencialna oblika:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_e \quad (3.3.1)$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Zveza med \vec{E} in φ :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi \quad (3.3.2)$$

Iz enačb (3.3.1), (3.3.2) in $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$ sledi:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot (-\varepsilon \varepsilon_0 \vec{\nabla} \varphi) = \rho_e,$$

oziroma:

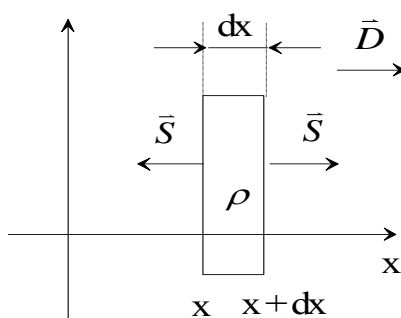
$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_e}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad (3.3.3)$$

kjer smo upoštevali:

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (3.3.4)$$

Enačbo (3.3.3) imenujemo Poissonova enačba.

3.3.2 1-D PRIMER



$$\left. \begin{aligned} \oint \bar{D} d\bar{S} &= \int \rho_e dV, \\ D(x+dx)S - D(x)S &= \rho_e S dx, \end{aligned} \right\} \text{Gaussov zakon}$$

$$dD = \rho_e dx,$$

$$\frac{dD}{dx} = \rho_e,$$

$$\boxed{\varepsilon \varepsilon_0 \frac{dE}{dx} = \rho_e} . \quad (3.3.5)$$

V enačbo (3.3.5) vstavimo zvezo:

$$E = -\frac{d\varphi}{dx} \quad (3.3.6)$$

in dobimo Poissonovo enačbo v eni dimenziji:

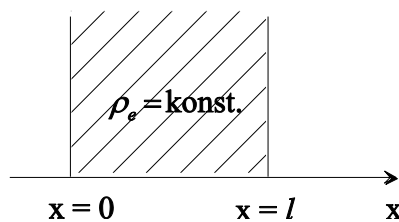
$$\frac{d}{dx} \left(-\frac{d\varphi}{dx} \right) = \frac{\rho_e}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad (3.3.7)$$

oziroma:

$$\boxed{\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho_e(x)}{\varepsilon \varepsilon_0}} . \quad (3.3.8)$$

3.3.3 PRIMER:

Reševanje Poissonove enačbe v območju s konstantno volumsko gostoto naboja $\rho = \rho_e = \text{konst.}$



Rešujemo enačbo (3.3.8) v območju od $x = 0$ do $x = l$, kjer $\rho = \rho_e$:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho_e}{\varepsilon \varepsilon_0}, \text{ kjer smo upoštevali } \rho = \rho_e = \text{konst.} \quad (3.3.9)$$

Enačbo (3.3.8) integriramo in dobimo:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -E(x) = -\frac{\rho_e x}{\varepsilon \varepsilon_0} + B \quad (3.3.10a)$$

Integracija enačbe (3.3.10a) pa da:

$$\varphi(x) = -\frac{\rho_e x^2}{2\epsilon\epsilon_0} + Bx + \varphi_0, \quad (3.3.10b)$$

kjer sta B in φ_0 konstanti.

- **Kakšna je vrednost konstante B ?**

Zaradi simetrije je sila na točkasti naboj pri $x = \frac{l}{2}$ enaka nič, torej je $E\left(x = \frac{l}{2}\right) = 0$:

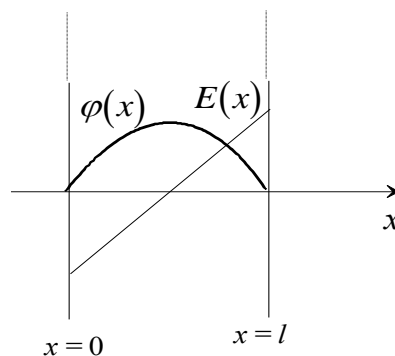
$$E\left(x = \frac{l}{2}\right) = +\frac{\rho_e l}{2\epsilon\epsilon_0} - B = 0 \Rightarrow \boxed{B = \frac{\rho_e l}{2\epsilon\epsilon_0}}. \quad (3.3.11)$$

Torej:

$$\boxed{\varphi(x) = -\frac{\rho_e x^2}{2\epsilon\epsilon_0} + \frac{\rho_e l x}{2\epsilon\epsilon_0} + \varphi_0}, \quad (3.3.12)$$

$$\boxed{E(x) = +\frac{\rho_e x}{\epsilon\epsilon_0} - \frac{\rho_e l}{2\epsilon\epsilon_0}}. \quad (3.3.13)$$

- maksimum funkcije $\varphi(x)$ je pri $\frac{d\varphi}{dx} = -E = 0$, to je pri $x = \frac{l}{2}$ kot smo že prej predpostavili (enačba (3.3.11)).
- če izberemo $\varphi_0 = 0$:



- če bi hoteli poznati $\varphi(x)$ in $E(x)$ še za $x < 0$ in $x > l$, bi morali rešiti Poissonovo enačbo še v teh dveh območjih, kjer je $\rho = 0$. Pri tem bi morali upoštevati še ustrezne robne pogoje za E in φ pri $x = 0$ in $x = l$.

3.4 ELEKTRIČNA DVOJNA PLAST

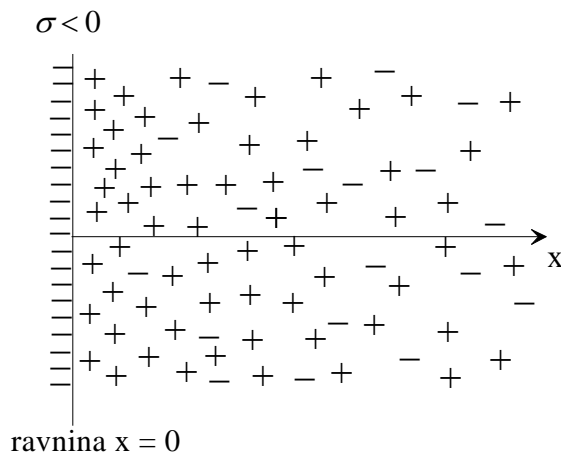
V ravnini $x = 0$ si zamislimo neskončno razsežno ravno ploščo, ki je na površini enakomerno nabita. Površinska gostota naboja plošče σ je negativna ($\sigma < 0$). Ta plošča je v stiku z elektrolitsko raztopino, v kateri so pozitivni in negativni ioni. V okviru modela predpostavimo, da so ioni točkasti nosilci naboja.

Ker je površina plošče negativno nabita, privlači pozitivne ione in odbija negativne. Zato je v bližini plošče več pozitivnih ionov kot negativnih. Prostorninska gostota naboja v raztopini se spreminja v smeri, ki je pravokotna na ravnino $x = 0$.

$$\rho(x) = \sum_i \nu_i e_0 n_i(x) , \quad (3.4.1)$$

kjer je ν_i valenca ionov i -te vrste, e_0 osnovni naboj in $n_i(x)$ številska gostota ionov i -te vrste. V našem primeru imamo v raztopini samo dve vrsti enovalentnih ionov ($i = +, -$), za katere velja:

$$\nu_+ = 1, \quad \nu_- = -1. \quad (3.4.2)$$



Slika 3.4.1. Električna dvojna plast (elektrolitska raztopina v stiku z negativno nabito ploščo).

Predpostavimo, da je celotni naboj v raztopini na enoto površine enak nič:

$$\int_0^{\infty} \rho(x) dx + \sigma = 0 . \quad (3.4.3)$$

Prebitek pozitivnega naboja v raztopini (t.j. prebitek pozitivnih ionov) uravnovesi negativni naboj na površini plošče.

Na lego ionov v raztopini vpliva elektrostatično polje, katerega potencial označimo s $\Phi(x)$. Daleč od plošče ne deluje na posamezen ion v raztopini v povprečju nobena sila, torej je tam električni potencial konstanten. Dogovorimo se, da je

$$\Phi(x \rightarrow \infty) = 0 . \quad (3.4.4)$$

Predpostavimo, da je sistem v termodinamskem ravnovesju, tako da za ione v raztopini velja Boltzmannova porazdelitev:

$$n_+(x) = n_+(\infty) \exp\left(-\frac{v_+ e_0 \Phi(x)}{kT}\right), \quad (3.4.5)$$

$$n_-(x) = n_-(\infty) \exp\left(-\frac{v_- e_0 \Phi(x)}{kT}\right), \quad (3.4.6)$$

kjer je k Boltzmannova konstanta in T absolutna temperatura.

Predpostavimo, da je daleč stran od negativno nabite plošče elektrolitska raztopina električno nevtralna. V našem primeru mora biti zaradi (3.4.2) in (3.4.4) zato izpolnjeno

$$n_+(\infty) = n_-(\infty) = n. \quad (3.4.7)$$

Da določimo krajevno odvisnost električnega potenciala $\Phi(x)$ zapišemo Poissonovo enačbo. V našem primeru imamo ravno geometrijo, zato velja:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon \varepsilon_0}. \quad (3.4.8)$$

kjer je ε dielektričnost raztopine, ε_0 pa influenčna konstanta.

Ko upoštevamo (3.4.8), (3.4.1), (3.4.5) in (3.4.6) dobimo

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \frac{2n e_0}{\varepsilon \varepsilon_0} \cdot \text{sh} \left(\frac{e_0 \Phi}{kT} \right). \quad (3.4.9)$$

Če je potencialna energija $e_0 \Phi(x)$ veliko manjša od termične kT , lahko desno stran enačbe (3.4.9) razvijemo v vrsto. Pri tem upoštevamo samo prvi člen v razvoju. Enačba (3.4.9) preide v

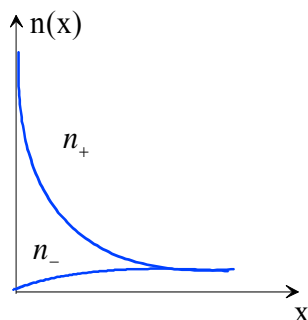
$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \kappa^2 \Phi, \quad (3.4.10)$$

kjer je $\kappa^2 = \frac{2n e_0^2}{\varepsilon \varepsilon_0 kT}$. Rešitev enačbe (3.4.10), ki ustreza robnemu pogoju (3.4.4) je:

$$\Phi(x) = \Phi_0 \exp(-\kappa x),$$

kjer je Φ_0 vrednost električnega potenciala v ravnini $x = 0$.

Električno dvojno plast sestavljata torej negativni naboj v ravnini $x = 0$ in pozitivna plast naboja ionov, ki se razširja v raztopino. Na razdalji $\frac{1}{\kappa}$, ki ji pravimo efektivna debelina električne dvojne plasti, pade električni potencial za faktor e .



Slika 3.4.2. Številskata gostota ionov v odvisnosti od x .

Tabela: Odvisnost $\frac{1}{\kappa}$ od n pri $T = 298$ K.

$\frac{n}{N_A} \left[\frac{\text{mol}}{\text{l}} \right]$ *	$\frac{1}{\kappa} \left[10^{-10} \text{ m} \right]$
0.5	4.30
0.2	6.80
0.1	9.62
0.05	13.6
0.02	21.5
0.01	30.4
0.005	43.0
0.002	68.0
0.001	96.2

* N_A je Avogadrovo število

Robni pogoj:

Gaussov zakon o električnem pretoku $\Rightarrow E=0$ za $x < 0 \Rightarrow \left. \frac{d\Psi}{dx} \right|_{x=0} = \frac{-\sigma}{\epsilon \epsilon_0}$

3.5 ENERGIJA ELEKTRIČNEGA POLJA *

Vsota dvodelčnih energij za sistem nabojev :

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{e_i e_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i \left(\sum_j \frac{e_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \right) e_i = \frac{1}{2} \sum_i \Phi_i e_i$$

$$\sum_j \frac{e_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \equiv \Phi_i \rightarrow \text{električni potencial na mestu naboja } e_i$$

Če vpeljemo volumsko gostoto naboja: $\rho = \frac{de}{dV}$ lahko zapišemo energijo električnega polja v obliki:

$$W_e = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) dV \quad (3.5.1)$$

Ob upoštevanju Poissonove enačbe:

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

iz enačbe (3.5.1) sledi:

$$W_e = -\frac{\epsilon_0}{2} \int \Phi \nabla^2 \Phi dV \quad (3.5.2)$$

Ob upoštevanju Greenovega teorema:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) &= \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \Phi \nabla^2 \Phi, \text{ oziroma} \\ \Phi \nabla^2 \Phi &= \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) - \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

iz enačbe (3.5.2) sledi:

$$W_e = -\frac{\epsilon_0}{2} \int \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) dV + \frac{\epsilon_0}{2} \int \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi dV \quad (3.5.4)$$

Poglejmo si sedaj prvi člen v enačbi (3.5.4), ki ga ob upoštevanju Gauss-ovega teorema zapišemo v obliki:

$$\int_V \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) dV = \oint_A (\Phi \nabla \Phi) \cdot \vec{n} dA \quad (3.5.5)$$

kjer je $d\vec{A} = \vec{n} dA$. Desno stran enačbe (3.5.5) lahko zapišemo tudi kot

$$\oint_A \Phi (\nabla \Phi \cdot \vec{n}) dA = \oint_A \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA,$$



torej

$$W_e = -\frac{\epsilon_0}{2} \oint_A \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA + \frac{\epsilon_0}{2} \int_V |\nabla \Phi|^2 dV \quad (3.5.6)$$

Če je naboj lokaliziran je $\Phi(\vec{r} \rightarrow \infty) \rightarrow 0$.

Če izberemo poljubno površino za integracijo v prvem členu v enačbi (3.5.6) pri zelo velikih \vec{r} , kjer je $\Phi \rightarrow 0$, velja

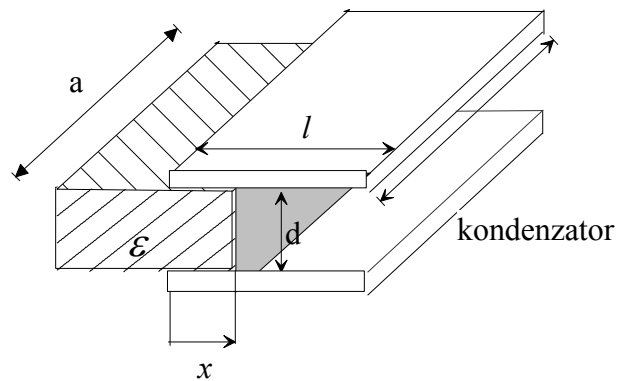
$$-\frac{\epsilon_0}{2} \oint_A \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA \rightarrow 0, \quad (3.5.7)$$

$\vec{r} \rightarrow \infty$

Torej preide enačba (3.5.6) v:

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V |\nabla \Phi|^2 dV = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} dV. \quad (3.5.8)$$

3.6 SILA NA DIELEKTRIK



ϵ = dielektrična konstanta

- Ko "vstavimo" dielektrik med plošči izoliranega kondenzatorja (do globine x) se **naboj na ploščah ne spremeni**, torej velja:

$$e = C_0 U_0 = \epsilon_0 \frac{S}{d} U_0 = \text{konstanta za vse } x,$$

kjer $C_0 = \epsilon_0 \frac{S}{d} \equiv$ kapaciteta pri $x = 0$ in U_0 napetost med ploščama pri $x = 0$.

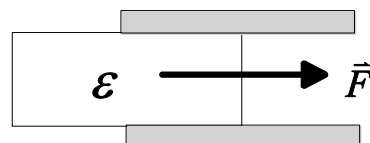
- Pri $x \neq 0$ sistem obravnavamo kot dva vzporedno vezana kondenzatorja

$$W(x) = \frac{1}{2} \frac{e^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{C_0^2 U_0^2}{\epsilon \epsilon_0 \frac{ax}{d} + \epsilon_0 \frac{a(l-x)}{d}}$$

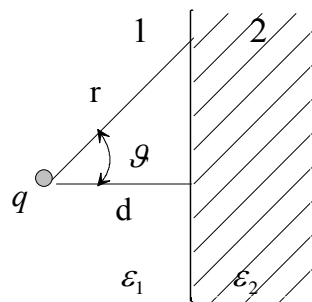
$$W(x) < W(x=0)$$

- Sila na dielektrik \equiv sila med nabojem na ploščah in dipoli v dielektriku

$$F = - \frac{dW(x)}{dx} = \frac{1}{2} U_0^2 \frac{\epsilon_0 a l^2}{d} \frac{(\epsilon - 1)}{[(\epsilon - 1)x + l]^2}$$



3.7 SILA NA TOČKASTI NABOJ V BLIŽINI MEJE DVEH DIELEKTRIKOV

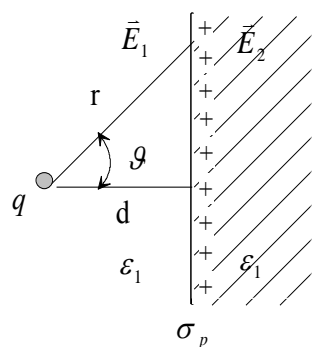


q = točkast naboj

$$\cos \vartheta = \frac{d}{r}$$

MODEL:

Predpostaviš, da tudi na desni strani $\varepsilon \equiv \varepsilon_1$, razliko v ε -ih pa upoštevaš s površinskim nabojem desnega področja (σ_p)



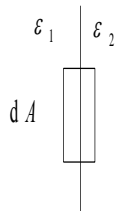
$$E_p = \pm \frac{\sigma_p}{2\varepsilon_0\varepsilon_1} \left\{ \begin{array}{c} \leftarrow \vec{E}_p + \vec{E}_p \rightarrow \\ + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ \sigma_p \end{array} \right.$$

Vrednosti polja na stični ploskvi:

$$E_{\perp} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \frac{1}{r^2} \frac{d}{r} - \frac{\sigma_p}{2\varepsilon_0\varepsilon_1} \quad (\text{v sredstvu 1}) \quad (3.7.1)$$

$$E_{2\perp} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon_1} \frac{d}{r^2} + \frac{\sigma_p}{2\epsilon_0\epsilon_1} \quad (\text{v sredstvu 2}) \quad (3.7.2)$$

Robni pogoj (sledi iz Gaussov-ega zakona o električnem pretoku):



$$-\epsilon_1 E_{1\perp} dA + \epsilon_2 E_{2\perp} dA = 0 \quad (3.7.3)$$

Iz enačbe (3.7.3) sledi:

$$-\epsilon_1 E_{1\perp} + \epsilon_2 E_{2\perp} = 0 \quad (3.7.4)$$

V enačbo (3.7.4) vstavimo vrednosti $E_{1\perp}$ in $E_{2\perp}$ iz enačb (3.7.1) in (3.7.2), ter iz nastale enačbe izračunamo velikost σ_p . Potem pa izračunamo še E_p :

$$E_p = \frac{\sigma_p}{2\epsilon_0\epsilon_1} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon_1} \frac{d}{r^2} \frac{1}{r}. \quad (3.7.5)$$

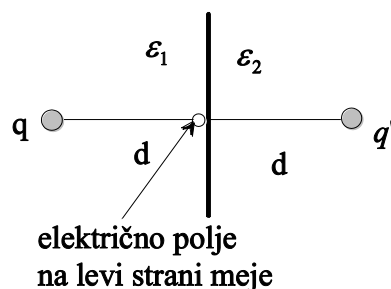
Enačbo (3.7.5) lahko zapišemo v obliki:

$$E_p = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1} \frac{1}{r^2} \frac{d}{r}, \quad (3.7.6)$$

kjer je

$$q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q. \quad (3.7.7)$$

Prispevek k električnemu polju **na levi strani meje** zaradi $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ izgleda torej kot električno polje točkastega naboja q' na **desni strani meje**:



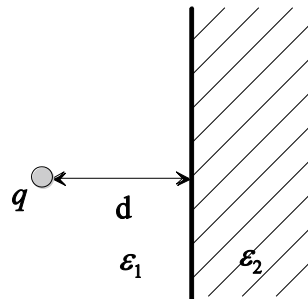
Tako lahko zapišemo silo med nabojem q na levi strani v mediju $\varepsilon = \varepsilon_1$ in nabojem

$q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q$ na desni strani v mediju $\varepsilon = \varepsilon_1$ na razdalji $2d$ v obliki:

$$F = \frac{q q'}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_1 (2d)^2} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_1} \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right) \frac{q^2}{4d^2}. \quad (3.7.8)$$

Zaključek: sila na točkasti naboj q v mediju 1 je:

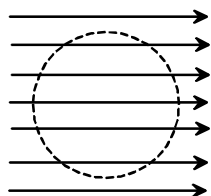
$$F = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_1} \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right) \frac{q^2}{4d^2}.$$



1. če $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 \Rightarrow F > 0$ (odbojna sila stran od mejne ploskve)
2. če $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow F < 0$ (privlačna sila proti mejni ploskve)

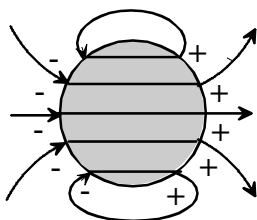
3.8 INFLUENCA

PRVOTNO
ELEKTRIČNO
POLJE

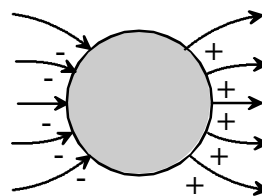


kovinska krogla

ELEKTRIČNO
POLJE NABOJA
NA POVRŠINI
PREVODNIKA



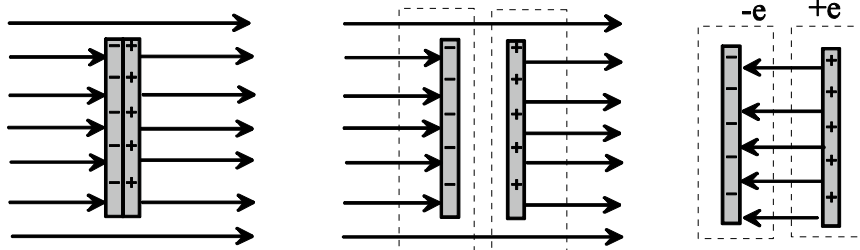
CELOTNO POLJE JE
VSOTA OBEH POLJ



Opomba: površina prevodnika postane ekvipotencialna ploskev

- **Neposredna meritev gostote električnega polja**

Izmerimo influenciran naboj (e) na ploščah, ki jih razmaknemo:



Nabojema $+e$ in $-e$ pravimo influencirana (ali inducirana) naboja.

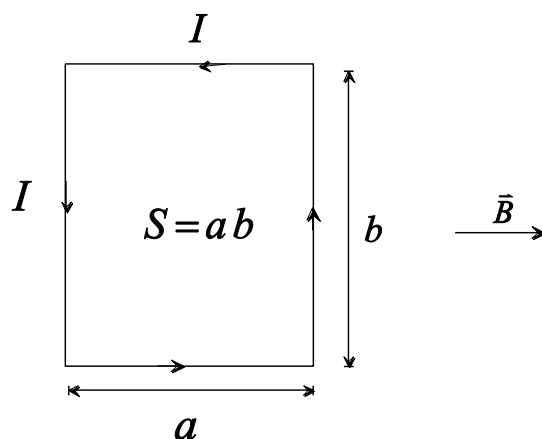
Potem izračunamo gostoto električnega polja $D = \frac{e}{S}$.

4. Snov v magnetnem polju

4.1 NAVOR NA TOKOVNO ZANKO

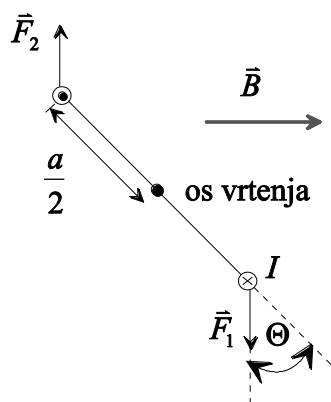
4.1.1 ZANKA V OBLIKI PRAVOKOTNIKA

Tloris:

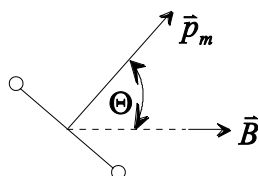


\vec{B}

○ Navor $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, $\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B}$



Stranski pogled:



$\vec{B} \equiv$ gostota magnetnega polja

$$F_1 = I b B$$

$$F_2 = I b B$$

$$M = F_1 \frac{a}{2} \sin \Theta + F_2 \frac{a}{2} \sin \Theta = \frac{a}{2} (F_1 + F_2) \sin \Theta = \frac{a}{2} (2IbB) \sin \Theta = IabB \sin \Theta$$

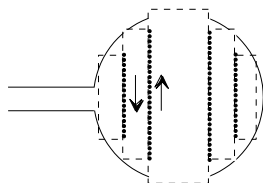
$ab = S$ (površina tokovne zanke)

$$M = ISB \sin \Theta$$

če $\vec{p}_m = I\vec{S}$ ($\vec{p}_m \equiv$ magnetni dipolni moment tokovne zanke)

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$

4.1.2 POLJUBNA OBLIKA ZANKE (posplošitev):

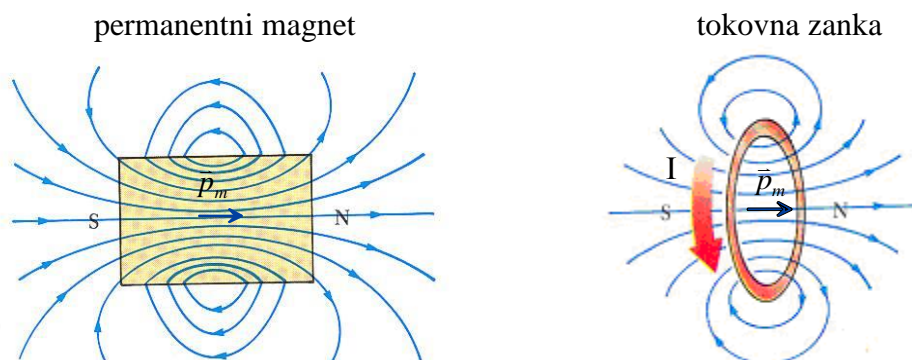


Po pikčastih črtah gre tok enkrat gor, drugič dol, tako, da je vsota nič.
Zato velja: $M = ISB \sin \Theta = p_m B \sin \Theta$ v splošnem za poljubno obliko zanke.

- o **Več zank** druga na drugi:

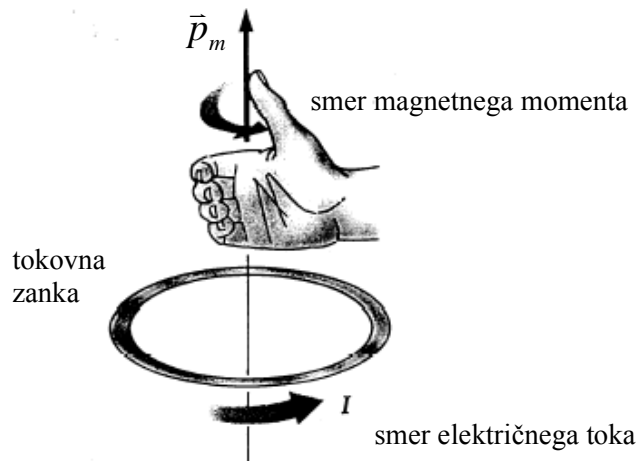
$$\vec{p}_m = NI\vec{S}, \quad N \equiv \text{število zank (na primer v ploščati tuljavi)}$$

4.1.3 PODOBNOST med magnetnim poljem paličastega permanentnega magneta in magnetnim poljem tokovne zanke



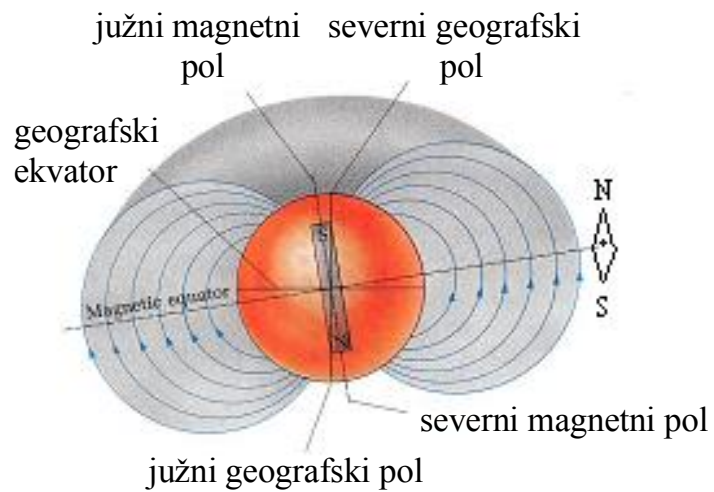
sliki: Serway, 1992

○ smer \vec{p}_m :

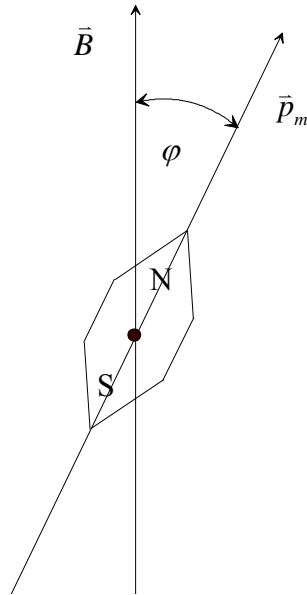


slika: Serway, 1992

4.1.4 NIHANJE MAGNETNICE V ZEMELJSKEM MAGNETNEM POLJU



Silnice zemeljskega magnetnega polja (Serway, 1992)



Enačba vrtenja:

$$\boxed{M = J \alpha} \quad (4.1.1)$$

J = vztrajnostni moment

$M = -p_m B \sin \varphi \equiv$ navor

$\alpha = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \equiv$ kotni pospešek

torej:

$$-p_m B \sin \varphi = J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} .$$

Če so odmiki majhni ($\varphi \ll 1$): $\sin \varphi \approx \varphi$:

$-p_m B \varphi \cong J \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$, oziroma

$$\boxed{-\left[\frac{p_m B}{J} \right] \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}} . \quad (4.1.2)$$

Rešitev enačbe (4.1.2) je:

$$\varphi = \varphi_0 \sin \left[\left(\frac{2\pi}{t_0} \right) t + \delta \right], \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\varphi_0 \left(\frac{2\pi}{t_0} \right)^2 \sin \left[\left(\frac{2\pi}{t_0} \right) t + \delta \right]. \quad (4.1.3)$$

Izraza (4.1.3) vstavimo v enačbo (4.1.2) in dobimo:

$$\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2 = \frac{p_m B}{J}, \quad (4.1.4)$$

torej:

$$t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{p_m B}} \quad \text{nihajni čas magnetne igle} \quad (4.1.5)$$

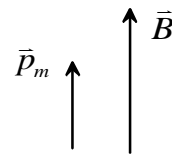
4.1.5 ENERGIJA MAGNETNICE V ZUNANJEM MAGNETNEM POLJU

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p_m \sin \varphi B d\varphi = -p_m B \cos \varphi_2 - (-p_m B \cos \varphi_1) = \Delta W_m,$$

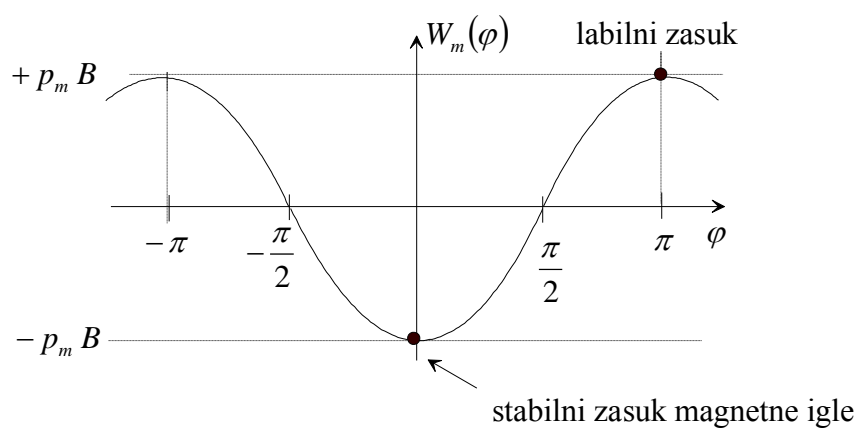
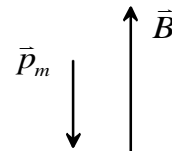
kjer

$$W_m = -p_m B \cos \varphi = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$$

$\varphi = 0$: $W_m = -p_m B$ (energijski minimum):



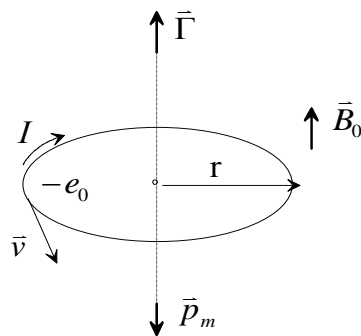
$\varphi = \pi$: $W_m = +p_m B$ (energijski maximum):



4.2 KLASIČNI MODEL DIAMAGNETIZMA

4.2.1 MODEL

- snov damo v magnetno polje gostote \vec{B}_0
- na »inducirano« gibanje elektrona v atomu (v skladu z Lenzovim pravilom) gledamo kot na majhno tokovno zanko
- $A = \pi r^2$ (površina zanke)
- vrtilna količina: $\vec{\Gamma} = m_e \vec{r} \times \vec{v}$
-
- v našem primeru: $\Gamma = m_e r v$
- $m_e \equiv$ masa elektrona
- $\vec{v} \equiv$ hitrost elektrona
- $e_0 \equiv$ osnovni naboj



$$I = \frac{e_0}{t_0}, \quad t_0 \equiv \text{obhodni čas elektrona}$$

$$I = \frac{e_0}{t_0} = \frac{e_0 v}{2\pi r} = \frac{e_0 v}{2\pi r}$$

$$p_m = I A = \frac{e_0 v}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{e_0}{2m_e} \Gamma$$

- Vektorja \vec{p}_m in $\vec{\Gamma}$ kažeta v nasprotno smer (glejte sliko):

$$\boxed{\vec{p}_m = -\frac{e_0}{2m_e} \vec{\Gamma}}$$

- Kroženje elektrona v magnetnem polju

$$\text{Newtonov zakon: } m_e a_r = m_e \frac{v^2}{r} = e_0 v B_0 \quad ; \quad a_r \equiv \text{radialni pospešek}$$

$$m_e v = e_0 r B_0 \Rightarrow \Gamma = m_e r v = e_0 r^2 B_0$$

torej: $p_m = -\frac{e_0}{2m_e} \Gamma = \frac{-e_0}{2m_e} (e_0 r^2 B_0) = -\frac{e_0^2 r^2}{2m_e} \mu_0 H$

- o Magnetizacija

$$M = n p_m = -\frac{n e_0^2 r^2}{2m_e} \mu_0 H,$$

kjer je $n = \frac{N}{V}$ število atomov na enoto volumna.

- o Če ima en atom Z elektronov in je $\langle r^2 \rangle \equiv$ povprečna vrednost kvadratov polmerov tirov vseh elektronov, velja:

$$M = -\frac{n e_0^2 \langle r^2 \rangle Z}{2m_e} \mu_0 H.$$

Od tod pa sledi izraz za susceptibilnost χ :

$$\chi = -\mu_0 n Z \frac{e_0^2 \langle r^2 \rangle}{2m_e}, \text{ torej } \chi < 0.$$

- o **Primer:**

$$\begin{aligned} \text{če je: } n &= 10^{29} \text{ m}^{-3} \\ Z &= 10 \\ \langle r^2 \rangle &= 10^{-20} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$\text{sledi: } \chi \cong -10^{-5}$$

- o **Zaključek:**

Inducirani magnetni moment atoma \bar{p}_m kaže v nasprotni smeri kot zunanje magnetno polje \bar{B}_0 .

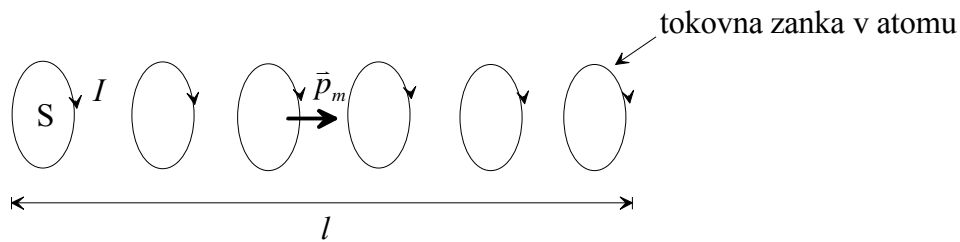
DIAMAGNETIZEM je lastnost vseh snovi, vendar so inducirani magnetni momenti p_m opazni samo v snoveh, ki imajo »trajni« magnetni dipolni moment enak **nič**, t.j. v snoveh, ki niso paramagnetne ali feromagnetne.

4.2.2. DODATEK:

Izpeljava zveze $B_m = \mu_0 n p_m = \mu_0 M,$

kjer je $M = n p_m$, za posebni primer 1-D kristala:

- l \equiv dolžina 1-D kristala
- S \equiv površina tokovne zanke v enem atomu
- N \equiv število atomov (število tokovnih zank) v 1-D kristalu



Iz Amperovega zakona $\oint \vec{B}_m \cdot d\vec{s} = \mu_0 N I$ izračunamo magnetno polje v kristalu $B_m = \mu_0 \frac{N I}{l}$.

Torej:

$$B_m = \mu_0 \frac{N I}{l} = \mu_0 \frac{N}{l S} S I = \mu_0 \frac{N}{V} p_m = \mu_0 n p_m = \mu_0 M ,$$

kjer smo definirali magnetizacijo M kot:

$$M = n p_m$$

magnetni moment atoma $p_m = I S$, $V = S l \equiv$ volumen kristala

$$n = \frac{N}{V} \quad (\text{volumska gostota atomov})$$

Zaključek:

$$B_m = \mu_0 n p_m = \mu_0 M$$

4.3 KLASIČNI MODEL PARAMAGNETIZMA*

Če damo paramagnetno snov v zunanje magnetno polje gostote B_0 , se zaradi orientacije mag. dipolnih momentov atomov (molekul) v smeri zunanjega magnetnega polja celotno magnetno polje (B) poveča:

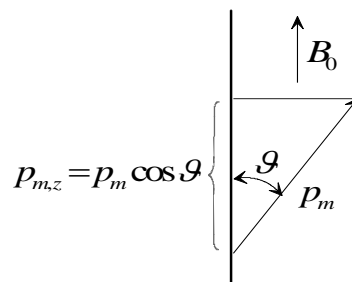
$$B = B_0 + B_m, \quad (4.3.1)$$

kjer je B_m prispevek snovi.

Vzrok: energija atoma z magnetnim momentom \vec{p}_m , ki je zasukan za kot \mathcal{G} glede na smer magnetnega polja \vec{B}_0 :

$$W_m = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}_0 = -p_m B_0 \cos \mathcal{G} \quad (4.3.2)$$

je najmanjša, če je mag. moment p_m usmerjen v smeri magnetnega polja. Takrat je namreč kot $\mathcal{G}=0$, energija W_m pa je zato najmanjša možna. Zaradi termične energije atomov (molekul) seveda pri končnih temperaturah povprečna vrednost kota \mathcal{G} ni nič.



Magnetno polje B_m je sorazmerno povprečni vrednosti komponente magnetnega momenta enega atoma (molekule) v smeri zunanjega magnetnega polja:

$$B_m = \mu_0 n \langle p_{m,z} \rangle, \quad (4.3.3)$$

kjer je $n = N/V$ število atomov na enoto volumna snovi. Definirajmo magnetizacijo M kot:

$$M = n \langle p_{m,z} \rangle. \quad (4.3.4)$$

Enačba (4.3.3) tako preide v:

$$B_m = \mu_0 M. \quad (4.3.5)$$

Za paramagnetne snovi je magnetizacija M sorazmerna jakosti magnetnega polja, kar bomo v nadaljevanju tudi dokazali. Sorazmernostni koeficient χ uvedemo kot susceptibilnost ($M = \chi H$). Upoštevamo še $B_0 = \mu_0 H$ in dobimo (glejte enačbo (4.3.1)):

$$B = \mu_0 H + \mu_0 \chi H = \mu_0 \mu H, \quad (4.3.6)$$

kjer smo definirali $\mu = 1 + \chi$ kot permeabilnost in upoštevali $B_m = \mu_0 \chi H$.

V nadaljevanju poiščemo izraz za susceptibilnost χ paramagnetne snovi. Najprej upoštevamo, da je $p_{m,z} = p_m \cos \mathcal{G}$ (glejte še sliko), kjer je \mathcal{G} kot med vektorjem p_m in komponento vektorja p_m v smeri magnetnega polja ($p_{m,z}$) (t.j. kot med vektorjem B_0 in vektorjem p_m). Enačbo (4.3.4) lahko tako zapišemo v obliki:

$$M = n p_m \langle \cos \mathcal{G} \rangle. \quad (4.3.7)$$

Sedaj poiščemo povprečno vrednost kosinusa kota \mathcal{G} ($\langle \cos \mathcal{G} \rangle$), ki ni enak ena zaradi termičnih fluktuacij. Pri tem upoštevamo, da je energija atoma z magnetnim momentom p_m , ki je zasukan za kot \mathcal{G} glede na smer magnetnega polja B_0 enaka:

$$W_m = -p_m \cdot B_0 = -p_m B_0 \cos \mathcal{G} \quad (4.3.8)$$

Izračunajmo povprečno vrednost kosinusa kota \mathcal{G} , to je $\langle \cos \mathcal{G} \rangle$:

$$\langle \cos \mathcal{G} \rangle = \frac{\int \cos \mathcal{G} e^{-\beta W_m} d\Omega}{\int e^{-\beta W_m} d\Omega}, \quad (4.3.9)$$

kjer je faktor $e^{-\beta W_m}$ verjetnost (Boltzmannov faktor), da je atom (molekula) v stanju z zasukom \mathcal{G} (glejte še sliko). Pomen ostalih simbolov in konstant pa je naslednji; $\beta = 1/kT$, k je Boltzmannova konstanta, T pa absolutna temperatura.

Izraz $d\Omega = dS/r^2 = \sin \mathcal{G} d\mathcal{G} d\varphi$ označuje infinitezimalni element prostorskega kota v sferičnih koordinatah:

$$\langle \cos \mathcal{G} \rangle = \frac{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos \mathcal{G} e^{-\beta W_m} \sin \mathcal{G} d\mathcal{G} d\varphi}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{-\beta W_m} \sin \mathcal{G} d\mathcal{G} d\varphi}, \quad (4.3.10)$$

Ker energija W_m ni odvisna od kota φ lahko v zgornji enačbi izvedemo integral po φ -ju. Tako dobimo:

$$\langle \cos \mathcal{G} \rangle = \frac{\int_0^\pi 2\pi \cos \mathcal{G} e^{-\beta W_m} \sin \mathcal{G} d\mathcal{G}}{\int_0^\pi 2\pi e^{-\beta W_m} \sin \mathcal{G} d\mathcal{G}}. \quad (4.3.11)$$

V nadaljevanju uvedemo novo spremenljivko $s = \cos \mathcal{G}$ ter oznako $x = p_m B_0 / kT = \beta p_m B_0$:

$$\langle \cos \mathcal{G} \rangle = \frac{-\int_{-1}^{-1} s e^{xs} ds}{-\int_{-1}^{-1} e^{xs} ds} = \coth x - \frac{1}{x} \equiv L(x), \quad (4.3.12)$$

kjer je $L(x)$ Langevinova funkcija. Funkcijo $\coth x$ razvijemo v vrsto ($0 < |x| < \pi$) in zadržimo samo prva dva člena:

$$\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \dots, \quad (4.3.13)$$

torej

$$\langle \cos \mathcal{G} \rangle = \coth x - \frac{1}{x} \cong \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{1}{x} = \frac{x}{3} = \frac{p_m B_0}{3kT} \quad (4.3.14)$$

in

$$M = n p_m \langle \cos \mathcal{G} \rangle = \frac{n p_m^2 B_0}{3kT} = \frac{\mu_0 n p_m^2}{3kT} H = \chi H. \quad (4.3.15)$$

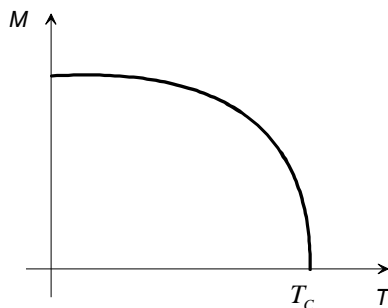
Končno smo tako dobili aproksimativni izraz za susceptibilnost paramagnetne snovi v obliki:

$$\boxed{\chi = \frac{\mu_0 n p_m^2}{3kT}}. \quad (4.3.16)$$

Vidimo, da je v našem približku susceptibilnost χ obratno sorazmerna z absolutno temperaturo T .

4.4 FEROMAGNETIZEM

Spontana magnetizacija znotraj domen (tudi brez zunanje magnetnega polja)



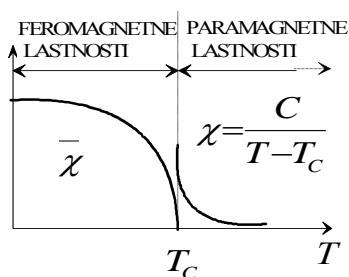
$T_c \equiv$ Curiejeva temperatura

Curie-jeva temperatura za nekaj feromagnetnih snovi	
snov	T_c (K)
železo	1043
kobalt	1394
nikelj	631
gadolinij	317
Fe_2O_3	893

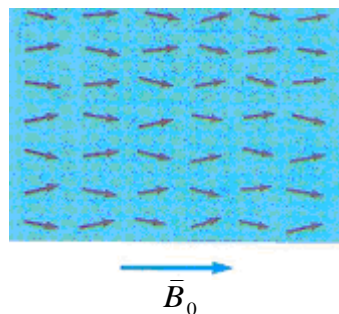
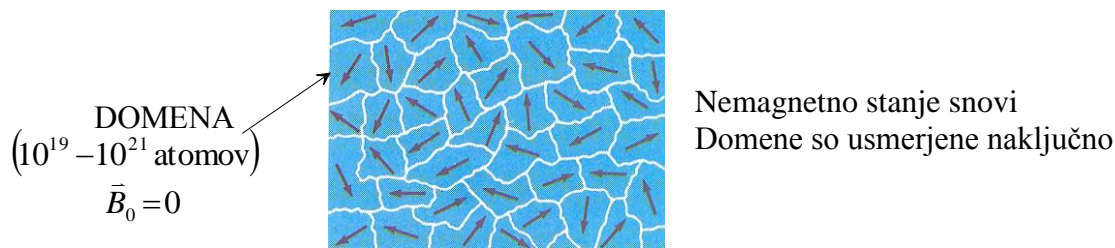
Če je $T \geq T_c$ feromagnetne snovi izgubijo spontano magnetizacijo in postanejo paramagneti.

Za $T \geq T_c$ za feromagnete velja Curie – Weissov zakon:

$$\chi = \frac{C}{T - T_c} \quad \chi \equiv \text{susceptibilnost}$$



$\bar{\chi} \equiv$ povprečna susceptibilnost feromagneta



Ureditev domen v zunanjem magnetnem polju (\vec{B}_0), μ ni konstanta.

$$\mu(H) = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH}$$

$\bar{\mu} \equiv$ povprečna permeabilnost

sliki: Serway, 1992

Isingov model feromagnetizma

Isingov model, ki se uporablja predvsem za opis feromagnetizma, se imenuje po fiziku Ernstu Isingu, ki se je rodil v Nemčiji leta 1900 in umrl v ZDA leta 1998. Isingov model je osnova nekaterih statistično-mehanskih teoretičnih modelov, ki se uporabljajo za opis feromagnetizma. Med feromagnete uvrščamo železo, kobalt, nikelj, magnetit (Fe_3O_4) in druge.

Na kratko ponovimo kar smo se naučili v prejšnjem poglavju. K celotnemu magnetnemu polju v snovi B_{tot} prispeva zunanje magnetno polje (B) in magnetno polje atomov (molekul) v snovi (B_m): $B_{\text{tot}} = B + B_m$. Magnetno polje v snovi B_m je sorazmerno magnetizaciji: $B_m = \mu_0 M$, ki je definirana kot $M = n \langle p_m \rangle$, kjer je $\langle p_m \rangle$ povprečna vrednost komponentne magnetnega dipolnega momenta molekule v smeri magnetnega polja, $n = N/V$ število molekul na enoto volumna in μ_0 indukcijska konstanta. Magnetizacija je sorazmerna jakosti magnetnega polja H : $M = \chi H$, kjer je χ susceptibilnost:

$$B_{\text{tot}} = B + B_m = B + \mu_0 \chi H = \mu_0 H + \mu_0 \chi H = \mu_0 (1 + \chi) H = \mu_0 \mu H, \quad (4.4.1)$$

kjer je $\mu = 1 + \chi$ permeabilnost.

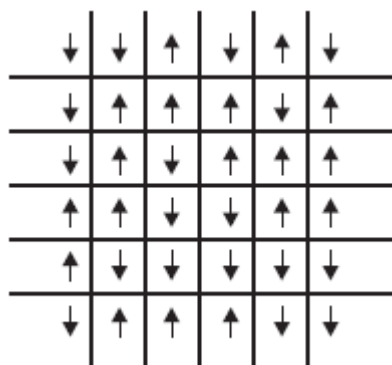
V nadaljevanju obravnavamo 2-dimenzionalni Isingov model feromagnetizma v okviru mrežnega modela, ki je shematsko prikazan na sliki 1. Prosto energijo F modelnega sistema, ki je prikazan na sliki 1, zapišemo v obliki:

$$F = E - TS, \quad (4.4.2)$$

kjer je E notranja energija sistema, ki zajema povprečno energijo lastnih in medsebojnih interakcijskih energij vseh molekul v sistemu, S je entropija sistema, T pa

absolutna temperatura merjena v stopinjah Kelvina. Najprej bomo izračunali entropijo sistema (S), ki nastopa v enačbi (4.4.2). V našem primeru 2-dimenzionalnega Isingovega modela feromagnetizma obravnavamo N molekul v 2-dimenzionalni mreži z N mesti. Posamezna molekula je lahko v dveh stanjih glede na usmeritev njenega magnetnega dipolnega momenta, ki lahko kaže samo gor (+) (v smeri magnetnega polja) ali dol (−) (glejte še sliko 1).

Izračunajmo konfiguracijsko entropijo sistema. Število možnih prostorskih razporeditev za prvo molekulo, ki jo postavimo v prazno 2-dimenzionalno mrežo z N mesti je N , za drugo molekulo ($N - 1$), za tretjo molekulo ($N - 2$) in tako naprej. Vseh možnih razporeditev je tako $N(N-1)(N-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = N!$. Pri tem smo upoštevali, da so vse molekule med seboj razločljive. V resnici pa molekul, ki imajo magnetni dipolni moment obrnjen navzgor (označimo njihovo število z N_+) med seboj ne moremo razločevati. Prav tako ne moremo razločevati med molekulami, ki imajo magnetne dipolne momente.



Slika 1: Prikaz magnetnih dipolnih momentov molekul v Isingovem modelu, ki so razporejeni v kvadratno 2-dimenzionalno mrežo in imajo lahko samo dve orientaciji (↑ in ↓) .

Obrnjene navzdol (označimo njihovo število z N_-). Tako, da celotno število možnih razporeditev N molekul na N mrežnih mest ni $N!$ pač pa W :

$$W = \frac{N!}{N_+! N_-!} \quad (4.4.3)$$

Za sistem, ki je v termičnem ravnovesju zapišemo konfiguracijsko entropijo v 2-dimenzionalnem Isingovem mrežnem modelu kot (glejte še učbenik Mehanika in termodinamika) :

$$S = k \ln W = k \ln \left[\frac{N!}{N_+! N_-!} \right] = k [\ln N! - \ln N_+! - \ln N_-!], \quad (4.4.4)$$

kjer predpostavimo samo dve možni orientaciji magnetnih dipolnih momentov (↑ in ↓) posamezne molekule v sistemu. Pri računanju konfiguracijske entropije (S) privzamemo, da je verjetnost za orientacijo posameznega spina neodvisna od orientacij sosednjih spinov.

Za velike N -je uporabimo Stirling-ovo aproksimacijo: $\ln N! \approx N \ln N - N$, ter tako iz enačbe (4.4.4) dobimo sledeče:

$$\begin{aligned}
S &= k \left[N (\ln N - 1) - N_+ (\ln N_+ - 1) - N_- (\ln N_- - 1) \right] = \\
&= k \left[(N_+ + N_-) \ln N - N_+ \ln N_+ - N_- \ln N_- \right] = \\
&= k \left[N_+ \ln N + N_- \ln N - N_+ \ln N_+ - N_- \ln N_- \right],
\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

oziroma:

$$S = k \left[N_+ \ln \frac{N}{N_+} + N_- \ln \frac{N}{N_-} \right] = -kN \left[\frac{N_+}{N} \ln \frac{N_+}{N} + \frac{N_-}{N} \ln \frac{N_-}{N} \right] = -kN \left[c_+ \ln c_+ + c_- \ln c_- \right], \tag{4.4.6}$$

kjer je $c_+ = \frac{N_+}{N}$ verjetnost, da je magnetni dipolni moment molekule obrnjen navzgor, $c_- = \frac{N_-}{N}$ pa verjetnost, da je obrnjen navzdol. Od tod sledi:

$$c_+ + c_- = 1, \tag{4.4.7}$$

kjer smo upoštevali $N = N_+ + N_-$.

V nadaljevanju izpeljemo izraz za energijo sistema, ki jo sestavlja vsota lastnih energij magnetnih dipolnih momentov molekul (2. člen) ter njihove medsebojne interakcijske energije (1. člen):

$$E = - \sum_{i,k} J_{ik} \sigma_i \sigma_k - p_m B \sum_i \sigma_i, \tag{4.4.8}$$

kjer je p_m velikost magnetnega dipolnega momenta ene molekule, B gostota magnetnega polja, J_{ik} moč interakcijske energije (t.j. moč sklopitve) med i -tim in k -tim sosednjim magnetnim dipolom (pri čemer upoštevamo samo najbližje sosedbe), spremenljivka σ_i določa orientacijo posameznega magnetnega dipola (\uparrow pomeni usmeritev v smeri magnetnega polja (σ_\uparrow), \downarrow pa usmeritev v nasprotni smeri (σ_\downarrow)). Poljubno orientacijo magnetnih dipolnih momentov atomov (molekul) smo torej tako kot že prej pri izpeljavi entropije sistema nadomestili z dvema orientacijama (\uparrow in \downarrow , glejte sliko 1). Pravimo, da obravnavamo orientacijo magnetnega dipolnega momenta molekule v okviru 2-stanjskega modela.

V prvem členu v enačbi (4.4.8), to je v izrazu za interakcijsko energijo magnetnih dipolnih momentov molekul v sistemu upoštevamo le interakcijske energije najbližjih sosedov, kjer upoštevamo $J_{ik} = J$. Tako lahko prvi člen v enačbi (4.4.8) zapišemo v obliki:

$$- J \sum_{i,k} \sigma_i \sigma_k. \tag{4.4.9}$$

Energijo sklopitve magnetnih dipolnih momentov $-J \sum_{i,k} \sigma_i \sigma_k$ zapišemo v dveh korakih.

Najprej izračunamo povprečno energijo magnetnih dipolov, ki so usmerjeni navzgor (\uparrow):

$$-J(Nc_+) \sigma_{\uparrow} \bar{\sigma}_{\text{soсед}} z, \quad (4.4.10)$$

kjer je Nc_+ povprečno število magnetnih dipolov v sistemu, ki so usmerjeni navzgor (\uparrow), N število vseh magnetnih dipolov v sistemu, $\bar{\sigma}_{\text{soсед}}$ pa povprečna vrednost σ najbližjih sosedov, ki jih je z :

$$\bar{\sigma}_{\text{soсед}} = (c_+ - c_-). \quad (4.4.11)$$

Kombinacija enačb (4.4.10) in (4.4.11) nam da:

$$-J N c_+ \sigma_{\uparrow} \bar{\sigma}_{\text{soсед}} z = -J N c_+ (c_+ - c_-) z, \quad (4.4.12)$$

kjer smo upoštevali $\sigma_{\uparrow} = 1$. Podobno izračunamo še povprečno energijo magnetnih dipolov v sistemu, ki so usmerjeni navzdol (\downarrow):

$$-J N c_- \sigma_{\downarrow} \bar{\sigma}_{\text{soсед}} z = -J N c_- (-1)(c_+ - c_-) z = -J N c_- (c_- - c_+) z, \quad (4.4.13)$$

kjer smo upoštevali $\sigma_{\downarrow} = -1$. Povprečno interakcijsko energijo vseh magnetnih dipolov v sistemu dobimo tako, da seštejemo enačbi (4.4.12) in (4.4.13) (\uparrow in \downarrow):

$$-J \sum_{i,k} \sigma_i \sigma_k = -\frac{1}{2} z N J [c_+ c_+ + c_- c_- - 2c_+ c_-], \quad (4.4.14)$$

kjer je faktor $1/2$ dodan zato, ker smo vse interakcije šteli dvakrat (pri \uparrow in \downarrow). Število najbližnjih sosedov (z) okoli izbranega atoma je v našem primeru 2-dimenzionalne mreže enako 4 (glejte sliko 1), v 1-dimenzionalnem modelu je $z = 2$, v 3-dimenzionalnem mrežnem modelu pa je $z = 6$. Drugi člen iz enačbe (4.4.8), to je $p_m B \sum_i \sigma_i$, ki opisuje energijo magnetnih dipolov v povprečnem magnetnem polju B izrazimo kot:

$$-p_m B \sum_i \sigma_i = -p_m B N (c_+ - c_-). \quad (4.4.15)$$

Celotno povprečno energijo sistema E (glejte enačbe (4.4.8), (4.4.14) in (4.4.15)) lahko tako zapišemo v obliki:

$$E = -\frac{1}{2} z N J [c_+^2 + c_-^2 - 2c_+ c_-] - p_m B N (c_+ - c_-). \quad (4.4.16)$$

Vpeljemo novo spremenljivko $x = c_+ - c_-$ in upoštevamo enačbo (4.4.7), od koder sledi:

$$c_+ = \frac{1}{2}(1+x), \quad (4.4.17)$$

$$c_- = \frac{1}{2}(1-x). \quad (4.4.18)$$

Ob upoštevanju izrazov (4.4.17) in (4.4.18) lahko zapišemo izraz za energijo E (en.(4.4.16)) v obliki:

$$E = N \left\{ -\frac{1}{2} z J x^2 - p_m B x \right\}, \quad (4.4.19)$$

izraz za entropijo sistema S (en.(4.4.6)) pa kot:

$$S = -kN \left\{ \frac{1}{2} (1+x) \ln(1+x) + \frac{1}{2} (1-x) \ln(1-x) - \ln 2 \right\}. \quad (4.4.20)$$

Prosto energijo sistema $F = E - TS$ ima sedaj obliko:

$$F = N \left\{ -\frac{1}{2} z J x^2 - p_m B x + \frac{kT}{2} (1+x) \ln(1+x) + \frac{kT}{2} (1-x) \ln(1-x) \right\}, \quad (4.4.21)$$

kjer smo izpustili člen $-kTN \ln 2$, ki ni odvisen od x . V nadaljevanju poiščemo minimum proste energije sistema F tako, da odvajamo enačbo (4.4.21) po spremenljivki x :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial F}{\partial x} &= -z J x - p_m B + \frac{kT}{2} \left[\ln(1+x) + \frac{(1+x)}{(1+x)} \right] + \frac{kT}{2} \left[-\ln(1-x) - \frac{(1-x)}{(1-x)} \right] = \\ &= -z J x - p_m B + \frac{kT}{2} \ln \left[\frac{(1+x)}{(1-x)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

Uvedemo oznako:

$$\alpha = \ln \left[\frac{1+x}{1-x} \right] \Rightarrow e^\alpha = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow, \quad (4.4.23)$$

od koder sledi:

$$x = \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha + 1} = \tanh \frac{\alpha}{2}. \quad (4.4.24)$$

Izraz za e^α iz enačbe (4.4.23) vstavimo v enačbo (4.4.22), upoštevamo $\ln(e^\alpha) = \alpha$, in dobimo:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{p_m B + z J x}{kT}. \quad (4.4.25)$$

Izraz za $\alpha/2$ iz enačbe (4.4.25) nato vstavimo v desno stran enačbe (4.4.24) in končno dobimo:

$$x = \tanh \left[\frac{p_m B + z J x}{k T} \right]. \quad (4.4.26)$$

V okviru obravnavanega 2-dimenzionalnega Isingovega modela lahko magnetizacijo sistema M zapišemo v obliki:

$$M = n \langle p_m \rangle = p_m n (c_+ - c_-) = p_m n x, \quad (4.4.27)$$

kjer je $n = N/V$ volumska gostota molekul.

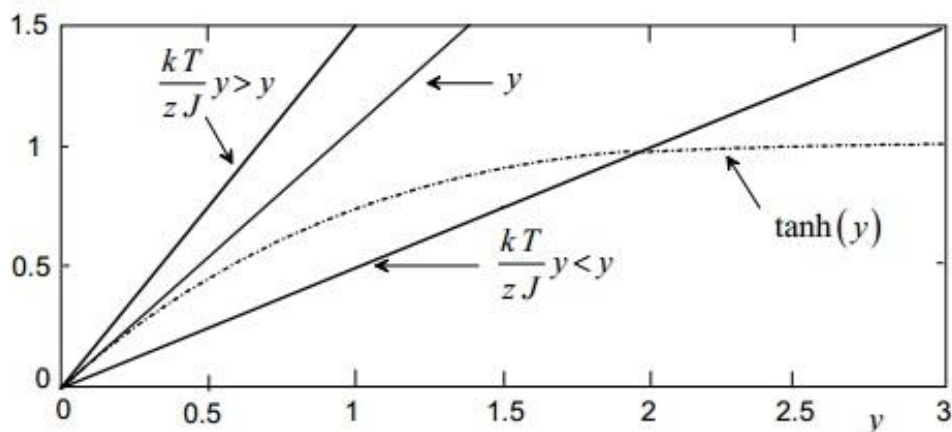
V nadaljevanju se lotimo reševanja enačbe (4.4.26) za več posebnih primerov.

1. **V sistemu ni zunanega magnetnega polja ($B = 0$).** Enačba (4.4.26) se v tem primeru transformira v obliko:

$$x = \tanh \left[\frac{z J x}{k T} \right] \quad (4.4.28)$$

Vpeljemo novo spremenljivko $y = \frac{z J}{k T} x$ in enačbo (4.4.28) zapišemo v obliki:

$$\frac{k T}{z J} y = \tanh(y). \quad (4.4.29)$$



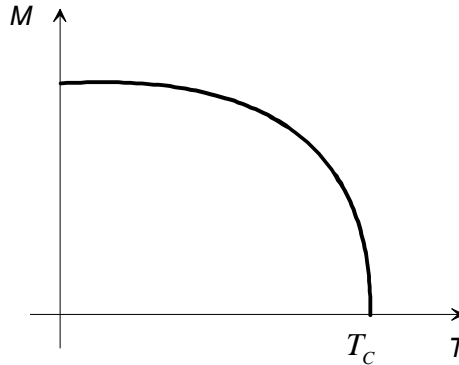
Slika 2: K reševanju enačbe (4.4.29).

Rešitev enačbe (4.4.29) je pri vrednosti y , kjer se funkciji $\frac{k T}{z J} y$ in $\tanh(y)$ sekata (glejte še sliko 2). Premica $\frac{k T}{z J} y$ mora imeti naklonski koeficient $\frac{k T}{z J}$ manjši od 1, da se funkciji $\frac{k T}{z J} y$ in $\tanh(y)$ sekata. Mejna vrednost $\frac{k T_c}{z J} = 1$, ustreza temperaturi

$$T_c = \frac{z J}{k}, \quad (4.4.30)$$

ki ji pravimo kritična temperatura.

Pri temperaturah pod T_c obstaja v sistemu spontana magnetizacija $M = p_m n x$, ki ustreza neničelni rešitvi enačbe (4.4.28) (t.j. $x \neq 0$). Nad kritično temperaturo se spontana magnetizacija poruši, enačba (4.4.28) takrat nima rešitve za $x \neq 0$. Slika 3 shematsko prikazuje spontano magnetizacijo kot funkcijo temperature T .



Slika 3: Temperaturna odvisnost spontane magnetizacije M za $B = 0$.

Tabela za enačbo (4.4.37) pa navaja kot primer vrednosti kritične temperature T_C (Curiejeve temperature) za nekatere feromagnetne materiale.

2. Vrnimo se k splošni enačbi (4.4.26) za primer $B \neq 0$ in vprašajmo se, kaj se dogaja z magnetizacijo **pri visokih temperaturah**, ki so nad kritično temperaturo T_C .

Pri visokih temperaturah ($T > T_C$) je argument v enačbi (4.4.26) majhen. Tako uporabimo samo prvi člen razvoja funkcije $\tanh(x) \approx x$ v vrsto in enačbo (4.4.26) zapišemo v obliki:

$$x \approx \left(\frac{p_m B + z J x}{kT} \right) \Rightarrow x \left(1 - \frac{zJ}{kT} \right) = \frac{p_m B}{kT}. \quad (4.4.31)$$

V enačbi (4.4.31) upoštevamo še zvezo $T_C = \frac{zJ}{k}$ in jo prepisemo v obliko:

$$x \left(1 - \frac{T_C}{T} \right) = \frac{p_m B}{kT} \Rightarrow x = \frac{\frac{p_m B}{kT}}{1 - \frac{T_C}{T}}. \quad (4.4.32)$$

V enačbo za magnetizacijo (4.4.27): $M = \frac{N}{V} p_m x$ vstavimo enačbo (4.4.32) in dobimo:

$$M = \frac{N}{V} p_m x = \frac{N}{V} p_m \frac{\frac{p_m B}{kT}}{1 - \frac{T_C}{T}} = \frac{\frac{N p_m^2 B}{V k}}{T - T_C}. \quad (4.4.33)$$

Ob upoštevanju zveze $B = \mu_0 H$ iz enačbe (4.4.33) sledi :

$$M = \frac{N \mu_0 p_m^2}{V} \frac{k}{T - T_c} H, \quad (4.4.34)$$

oziroma:

$$M = \chi H, \quad (4.4.35)$$

kjer je χ magnetna susceptibilnost:

$$\chi = \frac{C}{T - T_c}, \quad (4.4.36)$$

konstanta C pa je enaka:

$$C = \frac{N \mu_0 p_m^2}{V k}. \quad (4.4.37)$$

Tabela : Kritične temperature T_c nekaterih feromagnetnih materialov :

snov	T_c /[K]
Co	1400
Fe	1043
Ni	631

4.5 ENERGIJA MAGNETNEGA POLJA⁺ (primer dolge tuljave z gostim navitjem)

Dolga tuljava:

Amperov zakon

$Hl = NI$, $l \equiv$ dolžina tuljave, $I \equiv$ tok skozi tuljavo, $N \equiv$ število ovojev.

$$B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

$$B = \mu_0 H$$

Med naraščanjem električnega toka skozi tuljavo, mora generator opravljati delo:

$$A = \int U_L I dt = \int L \frac{dI}{dt} I dt = \int_{I_{zač}}^{I_{kon}} LI dI = L \frac{I^2}{2} \Big|_{I_{zač}}^{I_{kon}} = L \frac{I_{kon}^2}{2} - L \frac{I_{zač}^2}{2}$$

Prejeto delo **ni** odvisno od tega kako narašča tok po tuljavi, ampak samo od začetnega in končnega toka. Zato **definiramo magnetno energijo tuljave:**

$$W_m = L \frac{I^2}{2} = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} \frac{I^2}{2} = \mu_0 \frac{N^2 S l}{l} \frac{I^2}{2} = \frac{1}{2} \mu_0 (Sl) \left(\frac{NI}{l} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 V = \frac{1}{2} HBV ,$$

kjer je $V = Sl$

Torej je gostota energije magnetnega polja w_m (predpostavili smo, da je magnetno polje **samo** znotraj tuljave):

$$w_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$