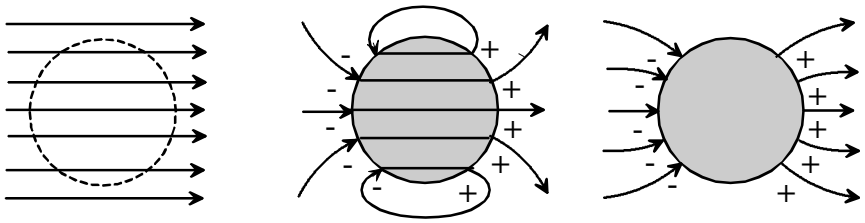
Snov v električnem polju

Kovina v električnem polju (smo že obravnavali)

PRVOTNO ELEKTRIČNO POLJE

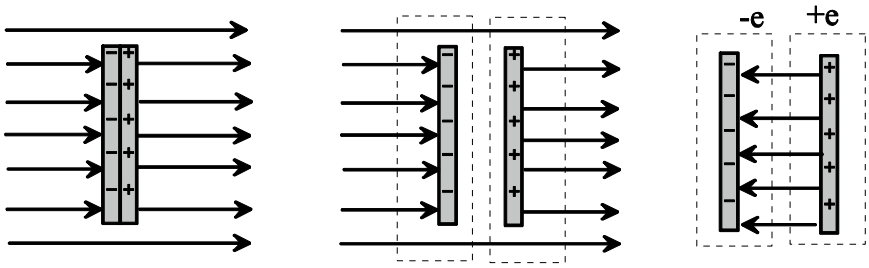
ELEKTRIČNO POLJE NABOJA NA POVRŠINI PREVODNIKA

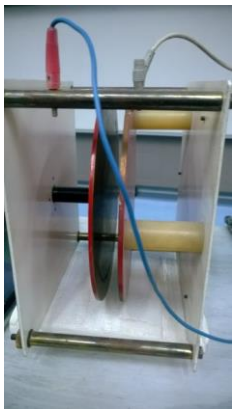
CELOTNO POLJE JE VSOTA OBEH POLJ

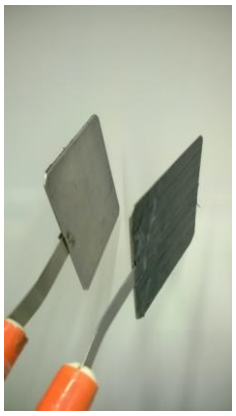


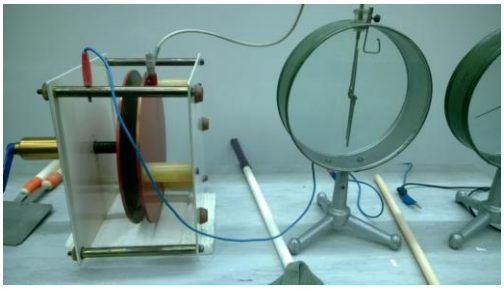
kovinska krogla

EKSPERIMENT (influenca): dve staknjeni kovinski plošči razmaknemo v električnem polju in izmerimo njun naboj na elektroskopu



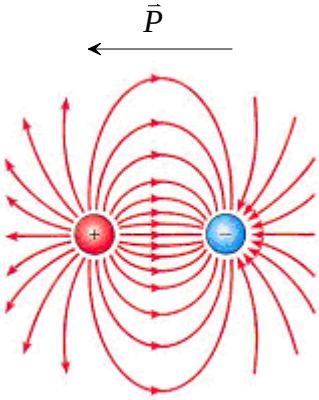




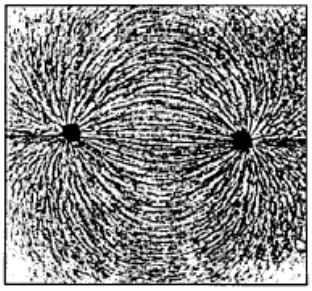


DIELEKTRIČNE TRDNE SNOVI

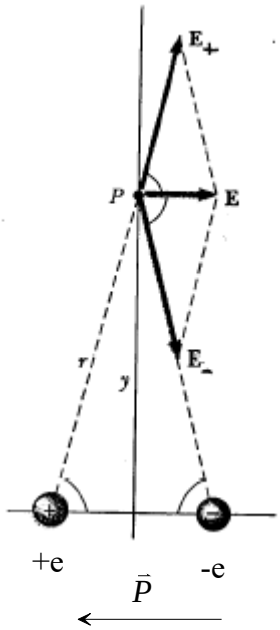
Električni dipol



(a)



(b)

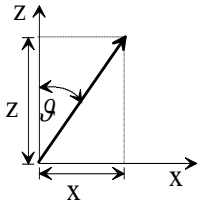


$$E_x = \frac{3\, p_e \cos\vartheta \sin\vartheta}{4\pi\, \varepsilon_0\, r^3}$$

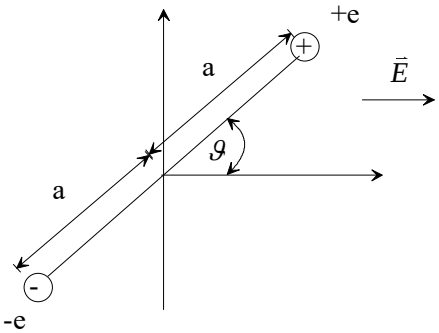
$$E_y = 0$$

$$E_z = \frac{p_e \left(3\cos^2\vartheta - 1\right)}{4\pi\, \varepsilon_0\, r^3}$$

električni dipolni moment: $p_e = d\, e$



NAVOR NA ELEKTRIČNI DIPOL IN ENERGIJA ELEKTRIČNEGA DIPOLA V ZUNANJEM ELEKTRIČNEM POLJU



$$p_e = e\,d = e\,2a \qquad d = 2a$$

Navor na električni dipol:

$$+e: \quad F_+ = +e\,E,\; M_+ = a\,e\,E\sin\vartheta$$

$$-e: \quad F_- = -e\,E,\; M_- = (-a)(-e)\,E\sin\vartheta = a\,e\,E\sin\vartheta$$

Celoten navor :

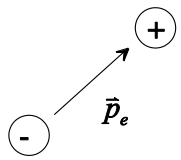
$$M = M_- + M_+ = 2a\,e\,E\sin\vartheta = p_e\,E\sin\vartheta$$

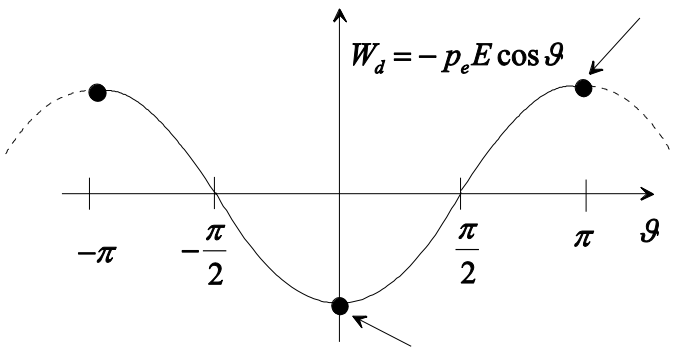
$$\vec{M} = \vec{p}_e \times \vec{E}$$

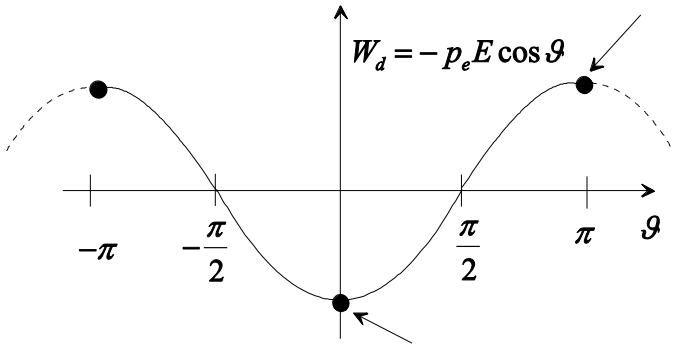
Energija dipola je enaka delu, ki ga mora opraviti zunanji navor proti navoru zunanjega električnega polja :

$$W_d = \int M\,\mathrm{d}\vartheta = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} p_e\,E\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = -\,p_e\,E\cos\vartheta\,\Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$$

$$W_d = -\,\vec{p}_e \cdot \vec{E}$$



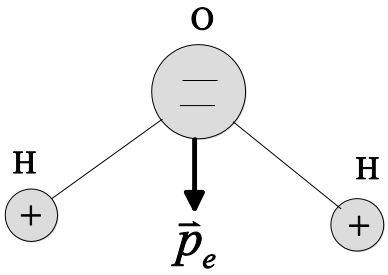




minimum energije: $\overset{\vec{E}}{\uparrow}$ $\uparrow \vec{p}_e$ $\vartheta = 0$: $W_d = -p_e E$

maksimum energije: $\overset{\vec{E}}{\uparrow}$ $\downarrow \vec{p}_e$ $\vartheta = \pi$: $W_d = +p_e E$

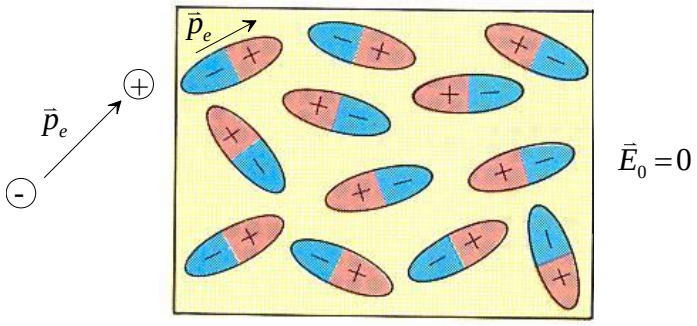
SNOV SESTAVLJENA IZ POLARNIH MOLEKUL



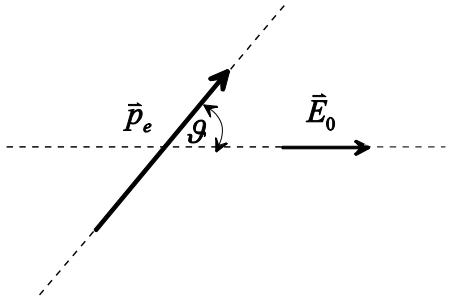
Primer polarne molekule: molekula vode (H_2O)

Polarne molekule imajo **permanentne električne dipolne momente**, ki se v zunanjem električnem polju $\vec{E}_0$ uredijo:

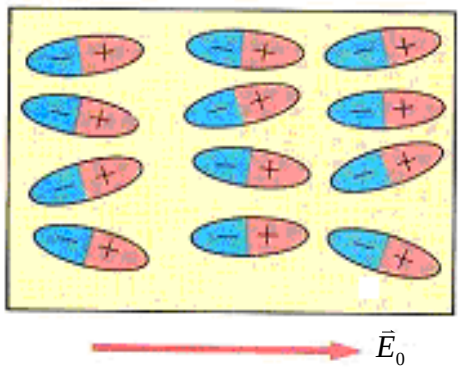
NI ORIENTACIJE ELEKTRIČNIH DIPOLOV



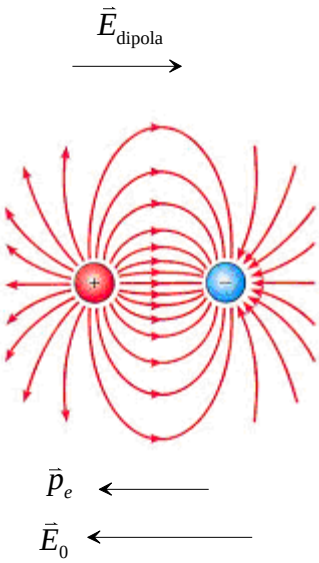
Orientacija električnih dipolov v smeri zunanjega električnega polja je energijsko ugodna, ker velja $W_d = -p_e E_0 \cos\vartheta$



JE ORIENTACIJA ELEKTRIČNIH DIPOLOV



$\vec{E}_0 \neq 0$



SKLEP: zaradi orientacije polarnih molekul v zunanjem električnem polju $\vec{E}_0$ se celotno električno polje **zmanjša**.

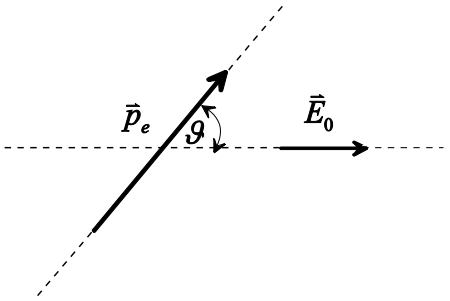
$$E = E_0 - E_i$$

električno polje na mestu električnega dipola (E) je vsota zunanjega električnega polja E_0 in električnega polja zaradi orientacije polarnih molekul E_i

- **Povprečna orientacija polarnih molekul v električnem polju***

Energija polarne molekule s permanentnim električnim dipolnim momentom $\vec{p}_e$

$$W_d = -\vec{p}_e \cdot \vec{E} = -p_e E \cos\vartheta$$



Električno polje na mestu električnega dipola (E) je vsota zunanjega električnega polja E_0 in električnega polja zaradi orientacije polarnih molekul E_i :

$$E = E_0 - E_i$$

Zaradi termične energije atomov (molekul) pri končnih T povprečna kota ϑ ni nič. Povprečna vrednost cosinusa kota ϑ, to je $\langle \cos\vartheta \rangle$:

$$\langle \cos\vartheta \rangle = \frac{\int \cos\vartheta \, e^{-\beta W_d} \, \mathrm{d}\Omega}{\int e^{-\beta W_d} \, \mathrm{d}\Omega}$$

faktor $e^{-\beta W_d}$ = verjetnost (Boltzmannov faktor), da je molekula v stanju z zasukom ϑ.

$\beta = 1/\mathrm{kT}$
k je Boltzmannova konstanta
T = absolutna temperatura
$\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}S/r^2 = \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi$ = infinitezimalni element prostorskega kota v sferičnih koordinatah

$$\langle \cos\vartheta \rangle = \frac{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \cos\vartheta \, e^{-\beta W_m} \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\beta W_m} \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi}$$

$$\langle\cos\vartheta\rangle=\frac{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\vartheta\, e^{-\beta W_m}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}e^{-\beta W_m}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi}$$

Ker energija W_d ni odvisna od kota φ lahko v zgornji enačbi izvedemo integral po φ - ju

$$\langle\cos\vartheta\rangle=\frac{\int_0^{\pi}2\pi\cos\vartheta\, e^{-\beta W_d}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta}{\int_0^{\pi}2\pi\, e^{-\beta W_d}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta}$$

nova spremenljivka: $s=\cos\vartheta$ ter oznaka

$$x=p_e E/kT=\beta\, p_e E$$

$$\langle\cos\vartheta\rangle=\frac{-\int_1^{-1}s\,e^{xs}\,\mathrm{d}s}{-\int_1^{-1}e^{xs}\,\mathrm{d}s}=\coth x-\frac{1}{x}\equiv L(x)$$

Langevinova funkcija: $L(x)=\coth x-1/x$

za $(0<|x|<\pi)$: $\quad \coth x\cong\frac{1}{x}+\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}+....$

$$|x|\ll 1:\qquad \langle\cos\vartheta\rangle=L(x)=\coth x-\frac{1}{x}\cong\frac{1}{x}+\frac{x}{3}-\frac{1}{x}=\frac{x}{3}=\frac{p_e E}{3kT}$$

(zadržali smo samo prva dva člena v razvoju)

Zaključek: vidimo, da je v približku **majhnih** $\frac{p_e E}{kT}$ $\langle\cos\vartheta\rangle$ sorazmeren jakosti električnega polja E na mestu, kjer se nahaja dipol in obratno sorazmeren z absolutno temperaturo T

Povprečni električni dipolni moment v smeri električnega polja $(\langle p_e \rangle)$ zapišemo v obliki:

$$|p_e E / kT| \ll 1: \qquad \langle p_e \rangle = p_e \langle \cos\vartheta \rangle = p_e \frac{p_e E}{3kT}$$

Polarizacija (P) v snovi, ki je sestavljena iz polarnih molekul v obliki:

$$P = n\langle p_e \rangle = n\, p_e \langle \cos\vartheta \rangle = n\, p_e \frac{p_e E}{3kT} = \frac{n p_e^2 E}{3kT} \qquad n = \frac{N}{V}$$

susceptibilnost χ :

$$P = \chi \varepsilon_0 E \qquad \chi = P / \varepsilon_0 E$$

susceptibilnost snovi, ki jo sestavljajo **polarne molekule**:

$$\chi_{pol} = \frac{n\, p_e^2}{3\varepsilon_0 kT}$$

OPOMBA: *gornji* izraz za susceptibilnost polarnih snovi velja samo za **majhne** $\frac{p_e E}{kT}$!!!

V SPLOŠNEM pa velja, kot smo pokazali zgoraj:

$$\boxed{\langle \cos\vartheta \rangle = L\left(\frac{p_e E}{kT}\right)},$$ kjer je $L(x)$ Langevinova funkcija

TOREJ: $\langle p_e \rangle = p_e \langle \cos\vartheta \rangle = p_e L\left(\frac{p_e E}{kT}\right)$

polarizacija: $\boxed{P = n\langle p_e \rangle = n p_e L\left(\frac{p_e E}{kT}\right)}$

$n = \frac{N}{V}$

$$P = \chi \varepsilon_0 E \Rightarrow \chi = \frac{P}{\varepsilon_0 E}$$

$$\boxed{\chi = \frac{P}{\varepsilon_0 E} = \frac{n p_e}{\varepsilon_0} \frac{L\left(\frac{p_e E}{kT}\right)}{E}}$$ ← NI konstanta odvisna od E

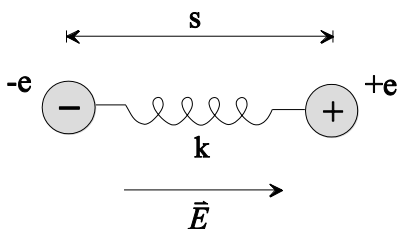
SNOV JE SESTAVLJENA IZ NEPOLARNIH MOLEKUL

Nepolarne molekule nimajo permanentnih električnih dipolnih momentov. Če pa jih postavimo v zunanje električno polje, to polje razmakne težišči negativnega in pozitivnega dela nepolarne molekule.

Inducirani električni dipolni moment **nepolarne molekule** :

$$p_e = e\,s$$

s = inducirani razmik med težiščema negativnega in pozitivnega dela nepolarne molekule:



predpostavka: med negativnim in pozitivnim delom nepolarne molekule deluje privlačna sila

$$F = -ks$$

pogoj za ravnovesje sil :

$$ks = e\,E$$

$$s = \frac{e\,E}{k}$$

E = vsota zunanjega električnega polja E_0 in električnega polja zaradi induciranih dipolnih momentov nepolarnih molekul

$$E_i : E = E_0 - E_i$$

Inducirani dipolni moment nepolarne molekule lahko:

$$p_e = e\,s = \frac{e^2\,E}{k}$$

Polarizacija v snovi:

$$P = n\,p_e = \frac{n\,e^2\,E}{k}$$

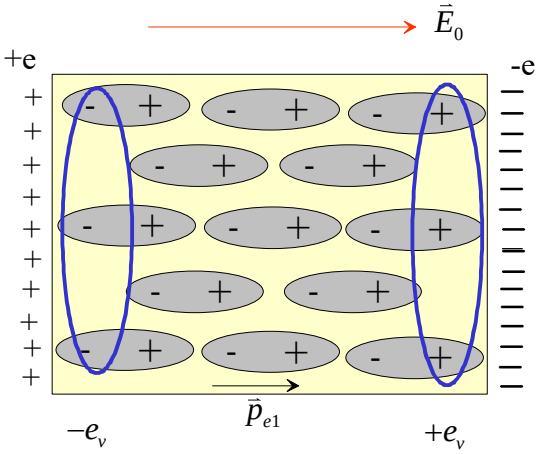
Susceptibilnost: $P = \chi\,\varepsilon_0\,E$, torej $\chi = P / \varepsilon_0\,E$:

$$\chi_{\text{nepol}} = \frac{n\,e^2}{\varepsilon_0 k}$$

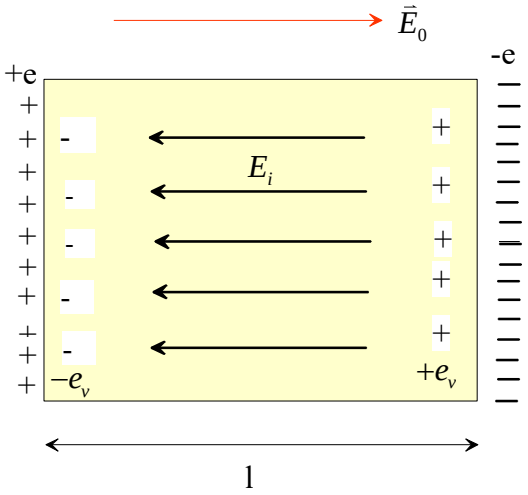
ZVEZA MED SUSCEPTIBILNOSTJO (χ) in RELATIVNO DIELEKTRIČNOSTJO (ε)

Obravnavamo primer **ploščatega kondenzatorja**, ki ima v prostoru med ploščama snov. Zaradi enostavnosti vpeljemo tako imenovani vezani naboj.

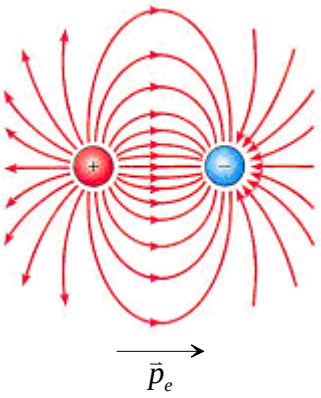
DEJANSKO STANJE:



NADOMESTNA SLIKA:

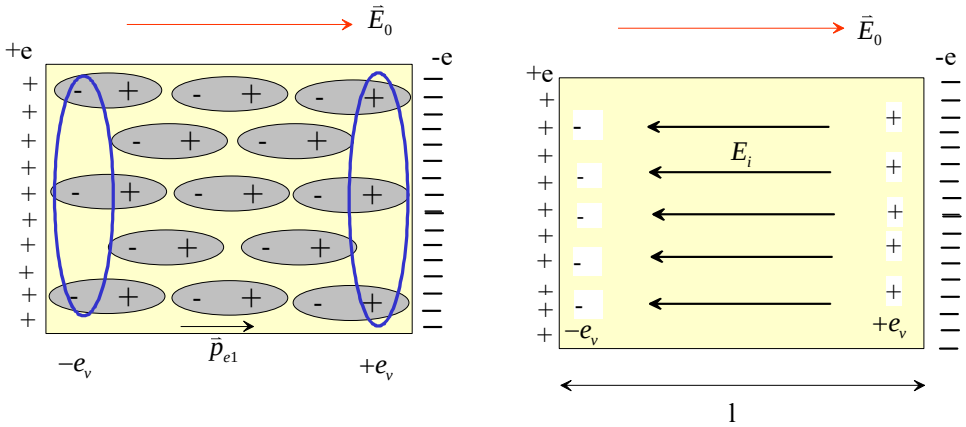


električno polje ene molekule



E_0	≡	jakost zunanjega električnega polja
l	≡	razdalja med ploščama kondenzatorja
S	≡	površina ene plošče kondenzatorja
e_v	≡	vezan naboj
e	≡	naboj na ploščah kondenzatorja
E_i	≡	električno polje zaradi snovi

DEJANSKO STANJE: NADOMESTNA SLIKA:



V nadomestni sliki nadomestimo električne dipole molekul v snovi med ploščama kondenzatorja z **vezanim** nabojem (e_v) na notranji strani plošč kondenzatorja:

$$PV = e_v\, l \qquad\qquad V = l\ S$$

sledi:

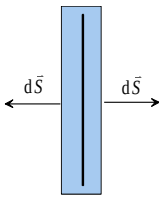
$$P(l\,S) = e_v\, l$$

$$e_v = P\,S$$

V Gaussovem zakonu o električnem pretoku ne upoštevamo vezanega naboja e_v kot dejanski naboj, ker obravnava snov med ploščama kondenzatorja kot električno nevtralno z volumsko gostoto naboja $\rho_e = 0$. Od tod:

$$\oint \vec{D}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = e$$

kjer integriramo po prostoru okoli ene plošče kondenzatorja, ki nosi naboj e:



torej:

$$D_1\, 2S = e \qquad\qquad D_1 = \frac{e}{2S} = \varepsilon_0\, E_{01} \qquad\qquad E_{01} = \frac{e}{2\,\varepsilon_0\, S}$$

E_{01} = električno polje zaradi naboja e na eni plošči kondenzatorja

Električno polje v prostoru med ploščama kondenzatorja (E_0) zaradi naboja na obeh ploščah:

$$E_0 = 2E_{01} = \frac{e}{\varepsilon_0 S} \qquad D_1 = D_2 = \frac{e}{2S} \qquad D = D_1 + D_2 = \frac{e}{S} = \varepsilon_0 E_0$$

Zaključek: gostota električnega polja D se nanaša samo na električno polje E_0, ki je posledica dejanskega naboja na obeh ploščah kondenzatorja. Vezani naboj e_v **ni upoštevan.**

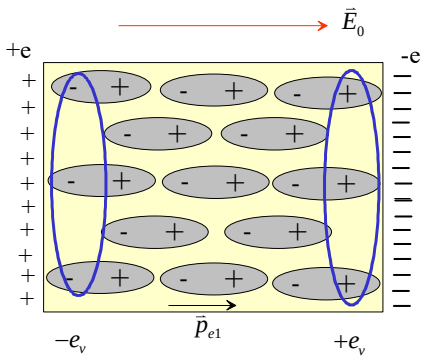
Celotno električno polje med ploščama kondenzatorja E pa je enako:

$$E_i : E = E_0 - E_i$$

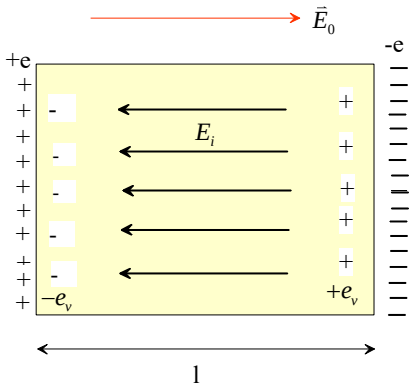
E_i = prispevek snovi med ploščama kond. (izračunamo s pomočjo vezanega naboja):

$$E_i = \frac{e_v}{S\,\varepsilon_0}$$

DEJANSKO STANJE:



NADOMESTNA SLIKA:



$$E_i = \frac{e_v}{S\,\varepsilon_0} \qquad \text{od prej :} \qquad e_v = P\,S$$

$$E_i = \frac{e_v}{S\,\varepsilon_0} = \frac{P\,S}{S\varepsilon_0} = \frac{P}{\varepsilon_0}$$

$$E = E_0 - E_i = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0}$$

$$E = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0}$$

$$\varepsilon_0 E = \varepsilon_0 E_0 - P$$ od prej : $$D = \varepsilon_0 E_0$$

iz $$D = \varepsilon_0 E + P$$ in $$P = \chi \varepsilon_0 E$$ dobimo _

$$D = \varepsilon_0 E + \chi \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 (1 + \chi) E$$

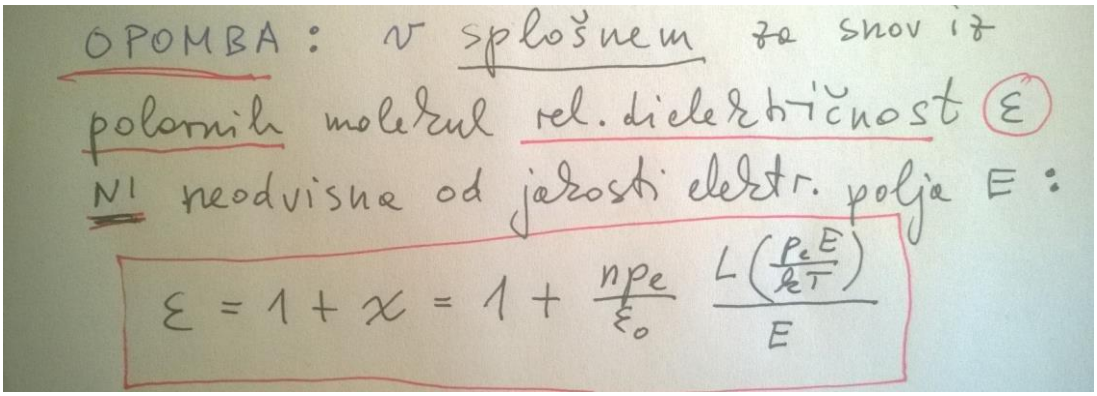
$$D = \varepsilon_0 \varepsilon E$$ $$\varepsilon = 1 + \chi$$

relativna dielektričnost

Zaključek:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$ $$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_0$$

$$\oint \vec{D} \, dS = e$$ $$\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{E}_i$$.



ELEKTROLITSKA RAZTOPINA V ELEKTRIČNEM POLJU

(stacionarno stanje v TD ravnovesju)

POISSONOVA ENAČBA

Gaussov zakon o električnem pretoku:

integralna oblika **diferencialna oblika**

vakuum: $\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int \rho_e \, \mathrm{d}V$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_e / \varepsilon_0$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

snov: $\vec{D} = \varepsilon \, \varepsilon_0 \, \vec{E}$

$\oint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int \rho_e \, \mathrm{d}V$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_e$

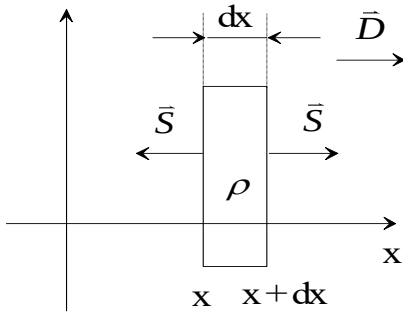
Zveza med $\vec{E}$ in φ:

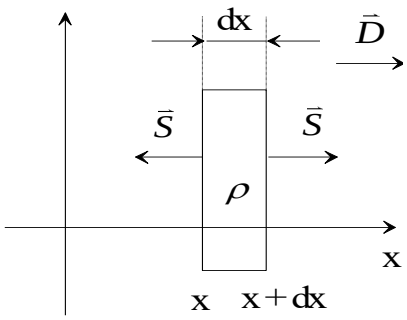
$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon \, \varepsilon_0 \, \vec{E} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left(-\varepsilon \, \varepsilon_0 \, \vec{\nabla} \varphi \right) = \rho_e$$

Poissonova enačba $\nabla^2 \varphi = -\dfrac{\rho_e}{\varepsilon \, \varepsilon_0}$ $\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$

1-D PRIMER :





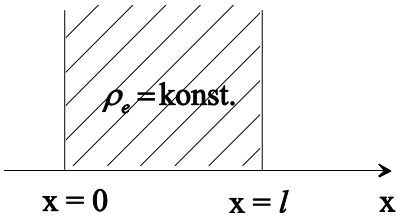
$$\left.\begin{aligned}&\oint \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{S}=\int \rho_e\,\mathrm{d}V,\\ &D(x+dx)S-D(x)S=\rho_e S\,\mathrm{dx},\end{aligned}\right\}\quad \text{Gaussov zakon}$$

$$\mathrm{d}D=\rho_e\,\mathrm{dx}\qquad \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{dx}}=\rho_e\qquad \vec{D}=\varepsilon\,\varepsilon_0\,\vec{E}$$

$$\varepsilon\,\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{dx}}=\rho_e\qquad E=-\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\,x}$$

Poissonova enačba v eni dimenziji $\quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(-\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dx}}\right)=\dfrac{\rho_e}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\qquad \dfrac{d^2\varphi}{dx^2}=-\dfrac{\rho_e(x)}{\varepsilon\,\varepsilon_0}$

PRIMER uporabe : reševanje Poissonove enačbe v območju s konstantno volumsko gostoto naboja $\rho=\rho_e=\text{konst.}$

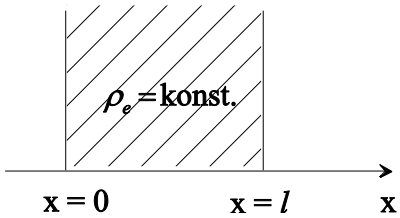


rešujemo enačbo $\dfrac{d^2\varphi}{dx^2}=-\dfrac{\rho_e}{\varepsilon\,\varepsilon_0}$ v območju od x = 0 do x = l, kjer $\rho=\rho_e=\text{konst.}$

enkratna integracija : $\quad \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dx}}=-E(x)=-\dfrac{\rho_e\,x}{\varepsilon\,\varepsilon_0}+B$

še ena integracija : $\quad \varphi(x)=-\dfrac{\rho_e\,x^2}{2\,\varepsilon\varepsilon_0}+Bx+\varphi_0\qquad$ B in φ_0 sta konstanti

- **Kakšna je vrednost konstante *B* ?**



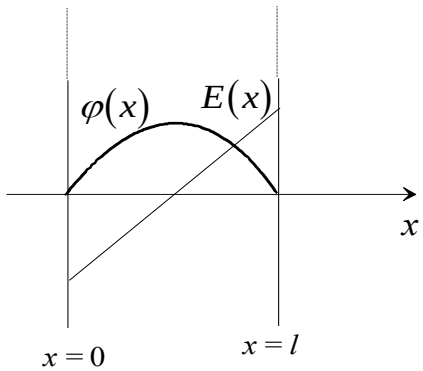
zaradi simetrije je sila na točkasti naboj pri $x=\frac{l}{2}$ enaka nič, torej $E\left(x=\frac{l}{2}\right)=0$:

$$E(x)=\frac{\rho_e x}{\varepsilon\varepsilon_0}-B \qquad E\left(x=\frac{l}{2}\right)=+\frac{\rho_e l}{2\varepsilon\varepsilon_0}-B=0 \quad\Rightarrow\quad B=\frac{\rho_e l}{2\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$E(x)=+\frac{\rho_e x}{\varepsilon\varepsilon_0}-\frac{\rho_e l}{2\varepsilon\varepsilon_0} \qquad \varphi(x)=-\frac{\rho_e x^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}+\frac{\rho_e l x}{2\varepsilon\varepsilon_0}+\varphi_0$$

- maksimum funkcije $\varphi(x)$ je pri $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=-E=0$, to je pri $x=\frac{l}{2}$ kot smo že prej predpostavili (enačba

- če izberemo $\varphi_0=0$:



- če bi hoteli poznati $\varphi(x)$ in $E(x)$ še za x < 0 in x > l, bi morali rešiti Poissonovo enačbo še v teh dveh območjih, kjer je $\rho=0$. Pri tem bi morali upoštevati še ustrezne robne pogoje za E in φ pri x = 0 in x = l.

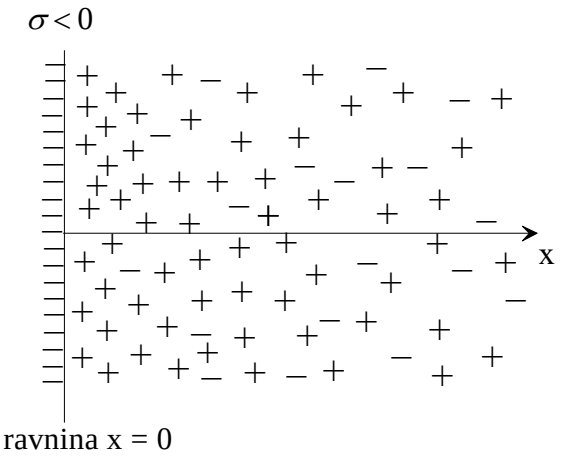
ELEKTRIČNA DVOJNA PLAST (EDL)

Ker je površina plošče negativno nabita, privlači pozitivne ione in odbija negativne. Zato je v bližini plošče več pozitivnih ionov kot negativnih. Prostorninska gostota naboja v raztopini se spreminja v smeri, ki je pravokotna na ravnino x = 0.

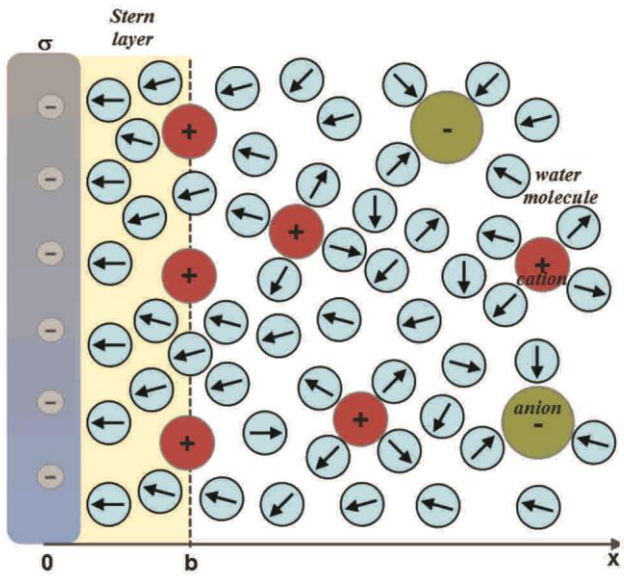
$$\rho(x) = \sum_i \nu_i e_0 n_i(x)$$

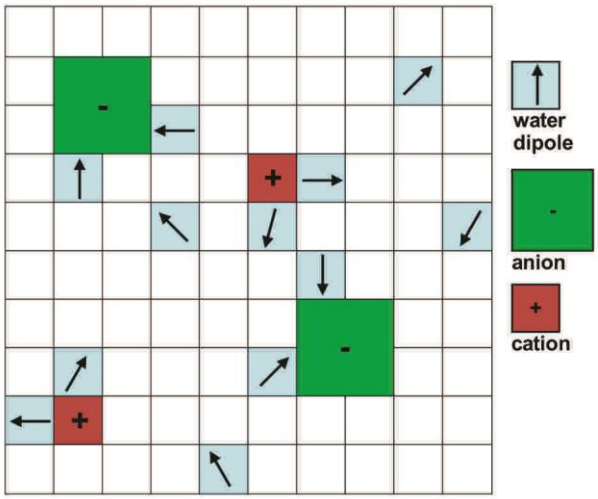
$$\int_0^\infty \rho(x)\,dx + \sigma = 0$$

$$\nu_+ = 1, \qquad \nu_- = -1$$



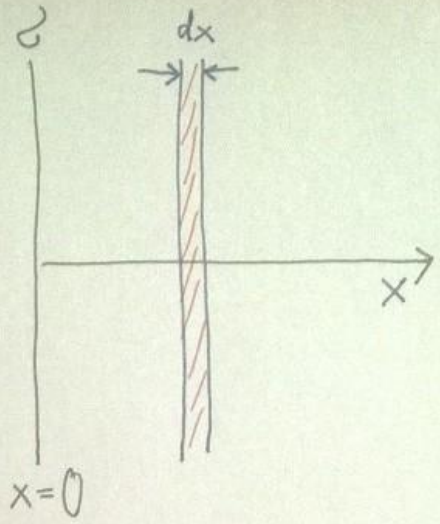
Prebitek pozitivnega naboja v raztopini (t.j. prebitek pozitivnih ionov) uravnovesi negativni naboj na površini plošče.





$$\int_0^\infty \rho(x)\, \cancel{S}\, dx + \sigma \cancel{S} = 0$$

$$-\varepsilon\varepsilon_0 \frac{d^2\Phi}{dx^2}$$



$$-\varepsilon\varepsilon_0 \int_0^\infty \frac{d^2\Phi}{dx^2}\, dx + \sigma = 0$$

$$-\varepsilon\varepsilon_0 \left.\frac{d\Phi}{dx}\right|_0^\infty = -\sigma$$

$$\underbrace{-\left.\frac{d\Phi}{dx}\right|_{x=\infty}}_{=0} + \left.\frac{d\Phi}{dx}\right|_{x=0} = -\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

ROBNI POGOJ

$$\boxed{\left.\frac{d\Phi}{dx}\right|_{x=0} = -\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}}$$

Zgornjo enačbo (robni pogoj) lahko izpeljemo tudi iz

Gaussovega zakona o električnem pretoku $\Rightarrow$ $E=0$ za $x<0$ $\Rightarrow$ $\left.\frac{d\Phi}{dx}\right|_{x=0} = \frac{-\sigma}{\varepsilon\,\varepsilon_0}$

Daleč od plošče ne deluje na posamezen ion v raztopini v povprečju nobena sila, torej je tam električni potencial konstanten :

$$\Phi(x \to \infty) = 0$$

Predpostavimo, da je sistem v TD ravnovesju, tako da za ione v raztopini velja Boltzmannova porazdelitev:

$$n_+(x) = n_+(\infty) \exp\left(-\frac{\nu_+ e_0 \Phi(x)}{kT}\right) \qquad n_-(x) = n_-(\infty) \exp\left(-\frac{\nu_- e_0 \Phi(x)}{kT}\right)$$

Daleč stran od negativno nabite plošče je elektrolitska raztopina električno nevtralna:

$$n_+(\infty) = n_-(\infty) = n$$

Da določimo krajevno odvisnost električnega potenciala $\Phi(x)$ rešujemo Poissonovo enačbo:

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon\,\varepsilon_0}.$$

ε = rel. dielektričnost raztopine, ε_0 = influenčna konstanta

Poisson-Boltzmannova enačba

$$n_+(x) = n \exp\left(-\frac{\nu_+ e_0 \Phi(x)}{kT}\right) \qquad n_-(x) = n \exp\left(-\frac{\nu_- e_0 \Phi(x)}{kT}\right) \qquad \rho(x) = \sum_i \nu_i e_0 n_i(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2} = \frac{2n\ e_0}{\varepsilon\ \varepsilon_0} \cdot \mathrm{sh}\left(\frac{e_0 \Phi}{kT}\right) \qquad \nu_+ = 1, \qquad \nu_- = -1$$

vol. gostota naboja

$$\rho(x) = n_+(x)\, e_0 - e_0\, n_-(x) =$$

$$= e_0 n_0 e^{-\frac{e_0\phi}{kT}} - e_0 n e^{\frac{e_0\phi}{kT}} =$$

$$= -e_0 n \left(e^{\frac{e_0\phi}{kT}} - e^{-\frac{e_0\phi}{kT}} \right) =$$

$$= -2n e_0 \, \mathrm{sh}\left(\frac{e_0\phi}{kT} \right)$$

$$\boxed{\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon\varepsilon_0}}$$

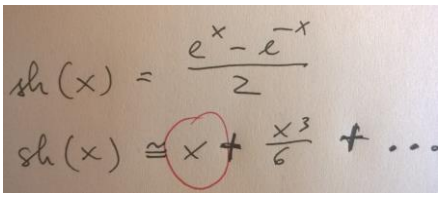
$\varepsilon \approx 80$ (za vodo)

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2} = \frac{2n\ e_0}{\varepsilon\ \varepsilon_0} \cdot \mathrm{sh}\left(\frac{e_0\Phi}{kT} \right)$$

Če je električna potencialna energija naboja $e_0\Phi(x)$ veliko manjša od termične energije kT, lahko desno stran enačbe Poisson-Boltzmannove (PB) enačbe

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2} = \frac{2n\ e_0}{\varepsilon\ \varepsilon_0}\cdot \mathrm{sh}\left(\frac{e_0\Phi}{kT}\right)$$

razvijemo v vrsto (upoštevamo samo prvi člen v razvoju) :



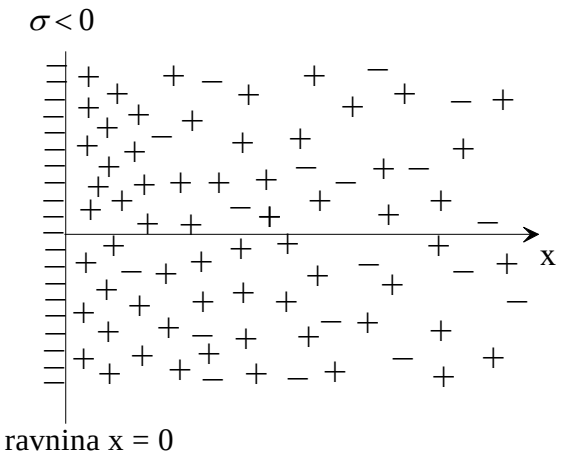
Enačba $\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2} = \frac{2n\ e_0}{\varepsilon\ \varepsilon_0}\cdot \mathrm{sh}\left(\frac{e_0\Phi}{kT}\right)$. tako preide v **linearizirano PB enačbo**:

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2} = \kappa^2\,\Phi \qquad \kappa^2 = \frac{2n\,e_0^2}{\varepsilon\,\varepsilon_0 k\,T}$$

rešitev linearizirane PB enačbe, ki ustreza robnemu pogoju $\Phi(x\to\infty) = 0$. je:

$$\Phi(x) = \Phi_0\,\exp(-\kappa\,x),$$

Φ_0 = električni potenciali v ravnini x = 0



Dololčitev Φ_0 iz robnega pogoja :

$$\boxed{\Phi = \Phi_0 e^{-\kappa x}}$$

ROBNI POGOJ :

$$\underbrace{\left.\frac{d\Phi}{dx}\right|_{x=0} = -\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\left.\frac{d\Phi}{dx}\right|_{x=0} = -\Phi_0 \kappa e^{-\kappa x}\Big|_{x=0}} = -\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$\Phi_0 \kappa = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

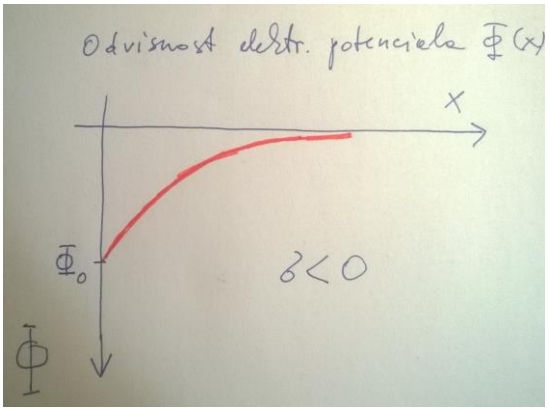
$$\boxed{\Phi_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0 \kappa}}$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{2 n e_0^2}{\varepsilon\varepsilon_0 k T}} \Rightarrow \frac{1}{\kappa} = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 k T}{2 e_0^2 n}}$$

$$\Phi_0 = \frac{\sigma\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon k T}}{\varepsilon\varepsilon_0\sqrt{2 n e_0^2}} =$$

$$= \frac{\sigma\sqrt{kT}}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 2 n e_0^2}} \propto \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Električno dvojno plast sestavljata torej negativni naboj v ravnini x = 0 in pozitivna plast naboja ionov, ki se razširja v raztopino. Na razdalji $\frac{1}{\kappa}$, ki ji pravimo efektivna debelina električne dvojne plasti, pade električni potencial za faktor e.



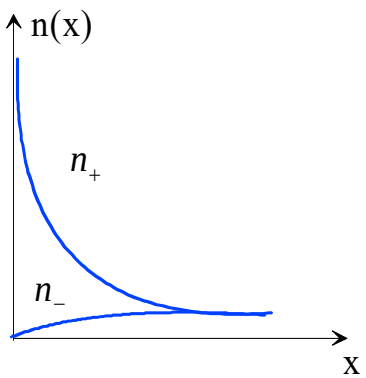
$$\Phi(x)=\Phi_0 \exp(-\kappa x),$$

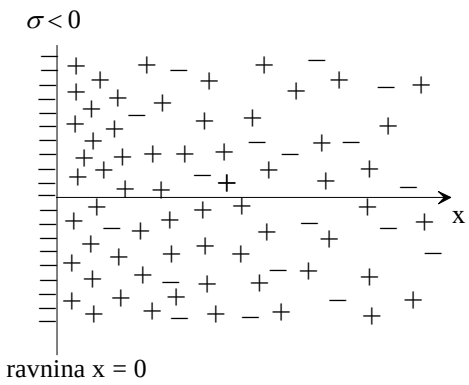
Tabela: Odvisnost $\frac{1}{\kappa}$ (debelina EDL) od koncentracije ionov n/N_A pri T = 298 K.

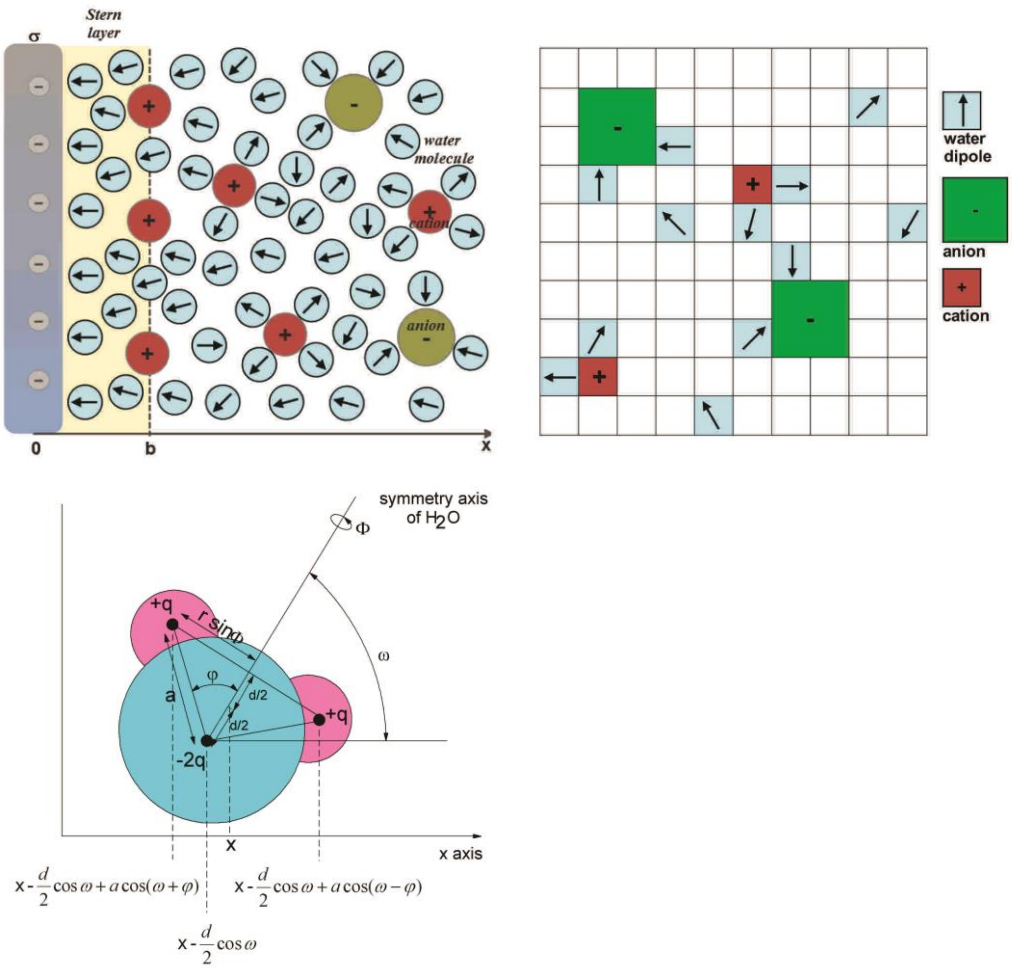
$\frac{n}{N_A}\left[\frac{mol}{l}\right]$ *	$\frac{1}{\kappa}\left[10^{-10}\ \mathrm{m}\right]$
0.5	4.30
0.2	6.80
0.1	9.62
0.05	13.6
0.02	21.5
0.01	30.4
0.005	43.0
0.002	68.0
0.001	96.2

* N_A je Avogadrovo število

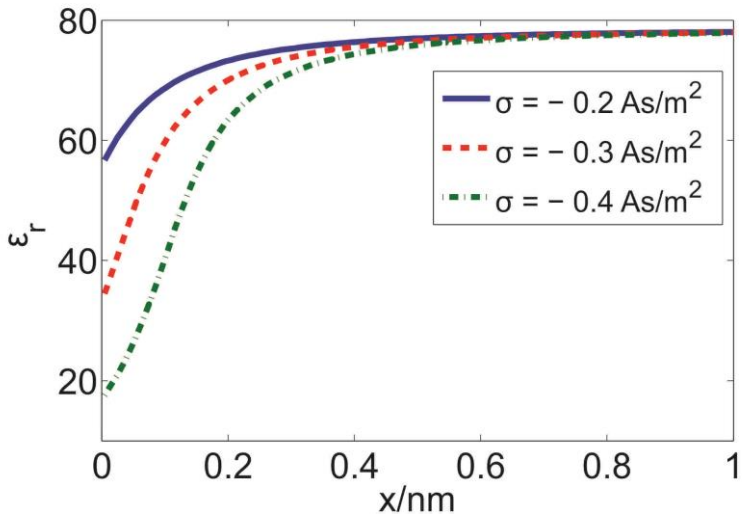
Številska gostota ionov v odvisnosti od x







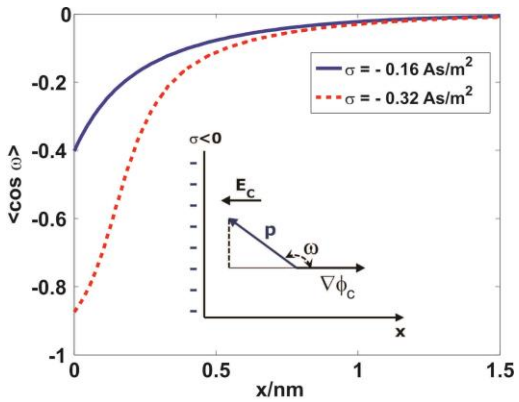
E. Gongadze, A. Velikonja, Š. Perutkova, P. Kramar, A. Maček-Lebar, V. Kralj-Iglič, A. Iglič, Ions and water molecules in an electrolyte solution in contact with charged and dipolar surfaces, Electrochimica Acta, 126: 42-60, 2014. file:///C:/Users/Ales/AppData/Local/Temp/Gongadze_et_al_Electr_Acta_2014_PRINTED-2.pdf

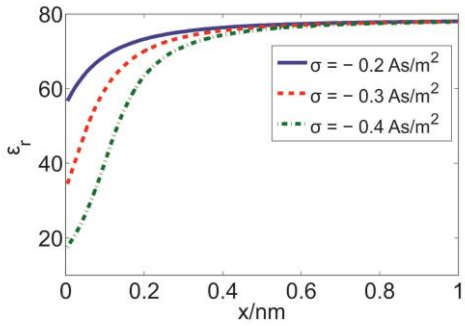


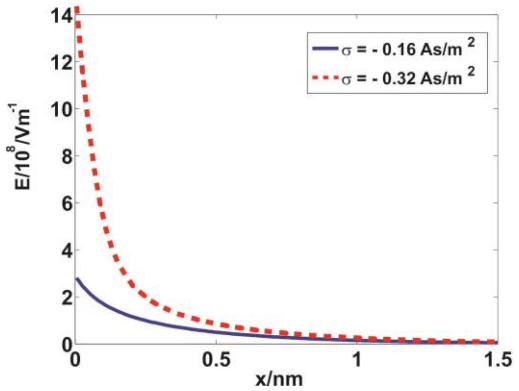
$$P = n_w \langle p_e \rangle = n_w\, p_e \langle \cos\vartheta \rangle = n_w\, p_e\, L\left(p_e E\ /kT\right) \qquad \chi = \frac{P}{\varepsilon_0 E}$$

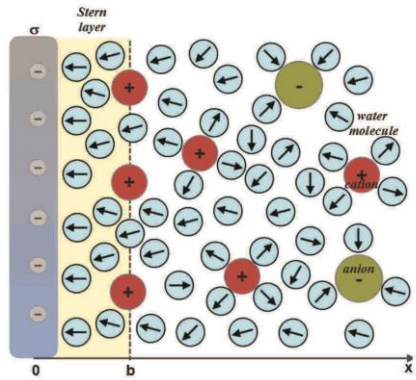
$$\varepsilon = 1 + \chi = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E} = 1 + \frac{n_w\, p_e \langle \cos\vartheta \rangle}{\varepsilon_0 E} = 1 + \frac{n_w\, p_e\, L\left(p_e E\ /kT\right)}{\varepsilon_0 E}$$

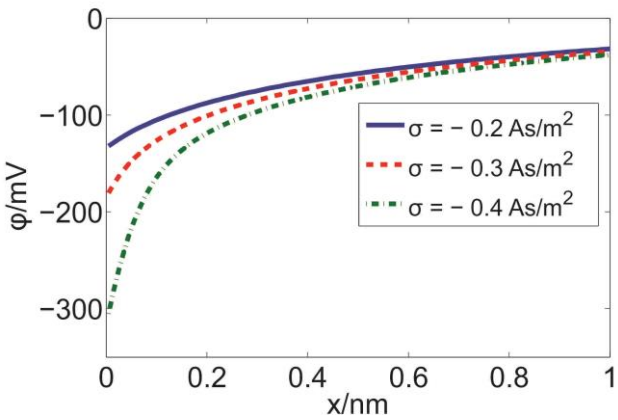
$$\cos\ (\vartheta) = \cos\ (\pi - \omega) = -\cos\ (\omega)$$











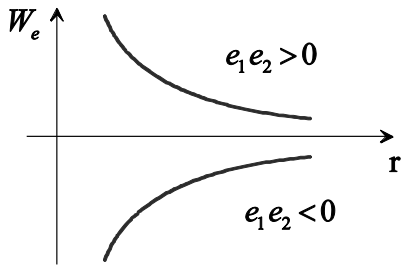
ELEKTROSTATSKA POTENCIALNA ENERGIJA

ENERGIJSKI ZAKON

$$A_{ost} = \Delta W_k + \Delta W_{g,p} + \Delta W_e$$

$$W_e = \frac{e_1 e_2}{4\pi \varepsilon_0 r} + \text{konst.}$$

Elektrostatska potencialna energija $\frac{e_1 e_2}{4\pi \varepsilon_0 r}$, ustreza delu, ki ga mora opraviti **zunanja** sila, da naboja e_1 in e_2 (različnega predznaka) razmaknemo od razdalje ∞ na razdaljo r.



Če je $A_{ost} = 0$ iz enačbe $A_{ost} = \Delta W_k + \Delta W_{g,p} + \Delta W_e$ dobimo:

$$0 = \Delta W_k + \Delta W_{g,p} + \Delta W_e \qquad \Delta\left(W_k + W_{g,p} + W_e\right) = 0$$

zakon o ohranitvi energije: $W_k + W_{g,p} + W_e = \text{konst.}$

Elektrostatska potencialna energija **sistema nabojev** je vsota dvodelčnih potencialnih energij:

$$W_{e,p} = \frac{1}{2} \sum_{i\,j} \frac{e_i e_j}{4\pi \varepsilon_0 r_{ij}}$$

Opomba: faktor $\frac{1}{2}$ uvedemo zato, ker v vsoti $\sum_{i,j}$ vsak par šteješ dvakrat

Elektrostatsko potencialno energijo lahko vpeljemo le v sistemu, ki ima vsaj dva delca!

DODATEK: ENERGIJA ELEKTRIČNEGA POLJA

Vsota dvodelčnih energij za sistem nabojev :

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{e_i e_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_i\left(\sum_j \frac{e_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}\right)e_i = \frac{1}{2}\sum_i \Phi_i e_i$$

$\sum_j \frac{e_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \equiv \Phi_i \rightarrow$ električni potencial na mestu naboja e_i

Če vpeljemo volumsko gostoto naboja: $\rho = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}V}$ lahko zapišemo energijo električnega polja v obliki:

$$W_e = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})\,\Phi(\vec{r})\mathrm{d}V \qquad (1)$$

Ob upoštevanju Poissonove enačbe:

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

iz enačbe (1) sledi:

$$W_e = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\int \Phi\nabla^2\Phi\,\mathrm{d}V \qquad (2)$$

Ob upoštevanju Greenovega teorema:

$$\nabla\cdot(\Phi\nabla\Phi) = \nabla\Phi\cdot\nabla\Phi + \Phi\nabla^2\Phi, \quad \text{oziroma}$$
$$\Phi\nabla^2\Phi = \nabla\cdot(\Phi\nabla\Phi) - \nabla\Phi\cdot\nabla\Phi$$

iz enačbe (2) sledi:

$$W_e = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\int \nabla\cdot(\Phi\nabla\Phi)\mathrm{d}V + \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\int \nabla\Phi\cdot\nabla\Phi\,\mathrm{d}V \qquad (3)$$

Prvi člen v zgornji enačbi ob upoštevanju Gauss-ovega teorema zapišemo kot:

$$\int_V \nabla\cdot(\Phi\nabla\Phi)\,\mathrm{d}V = \oint_A (\Phi\nabla\Phi)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A \qquad (4)$$

kjer je $\mathrm{d}\vec{A} = \vec{n}\,\mathrm{d}A$.

Desno stran enačbe (4)

$$\int_V \nabla\cdot\left(\Phi\nabla\Phi\right)\,\mathrm{d}V \;=\; \oint_A \left(\Phi\nabla\Phi\right)\cdot\vec{n}\;\;\mathrm{d}A$$

lahko zapišemo tudi kot

$$\oint_A \Phi\left(\nabla\Phi\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}A = \oint_A \Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}A, \tag{5}$$

torej

$$W_e = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\oint_A \Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}A + \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\int_V \left|\nabla\Phi\right|^2\mathrm{d}V \tag{6}$$

Če je naboj lokaliziran je $\Phi\left(\vec{r}\to\infty\right)\to 0.$

Če izberemo poljubno površino za integracijo v prvem členu v enačbi (6) pri zelo velikih $\vec{r}$, kjer je $\Phi\to 0,$ velja

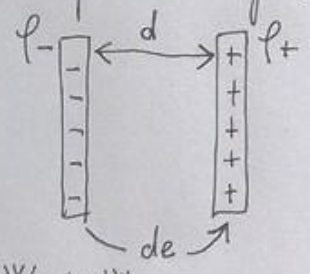
$$-\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\oint_A \Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}A \;\to 0, \tag{7}$$
$$\vec{r}\to\infty$$

Torej preide enačba (6) v:

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0\int_V \left|\nabla\Phi\right|^2\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int \vec{D}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V. \tag{8}$$

DRUGI NAČIN

- ZAČETEK : dve nevtralni plošči
- prenašam poz. naboj z <u>leve</u> na <u>desno</u> ploščo



$U \equiv$ trenutna napetost med ploščama

$$A = \Delta W_z + \Delta W_g + \Delta W_e$$

<u>Delo</u>, ki je potrebno za <u>prenos</u> naboja

$$dA = dW_e = de\,\varphi_+ - de\,\varphi_- =$$

$$= de\,\underbrace{(\varphi_+ - \varphi_-)}_{U\ (\text{napetost})} = de\,U$$

<u>kondenzator</u>:

$$e = CU \Rightarrow \underbrace{U = \frac{e}{C}}$$

$$dA = U\,de = \frac{e}{C}\,de$$

$$\underline{\underline{A}} = \int_0^e \frac{e}{C}\,de = \frac{1}{C}\frac{e^2}{2}\Big|_0^e = \frac{1}{C}\frac{e^2}{2} =$$

$$\boxed{C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}} \qquad = \frac{C^2U^2}{2C} = \underline{\underline{\frac{1}{2}CU^2}}$$

(delo, ki je potrebno za prenos naboja)

$$A = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{S}{d}E^2d^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \underbrace{Sd}_{V}$$

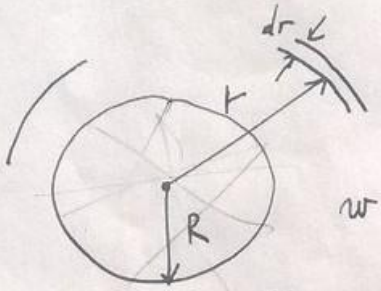
$$\boxed{U = Ed}$$

Gostota energije elektr. polja v kondenzatorji:

$$\boxed{w = \frac{A}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}}$$

• energija električnega polja krogle z radijem R, ki ima po površini <u>enakomerno</u> porazdeljen naboj e

$$D \cdot S = \varepsilon_0 E\, 4\pi r^2 = e \Rightarrow \boxed{E = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} \qquad r \geq R$$



$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 r^4} = \frac{e^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}$$

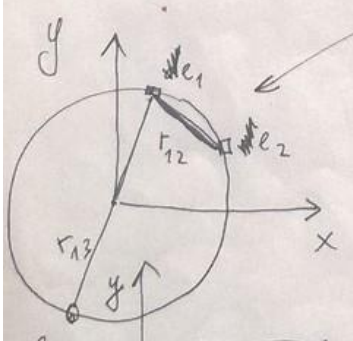
$$W = \int w\, dV = \int_R^\infty \frac{e^2\, 4\pi r^2 dr}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr =$$

$$= \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_R^\infty = \underline{\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R}}$$

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{e_i e_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_i\left(\sum_j \frac{e_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}\right) e_i = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sum_i \Phi_i e_i}}$$

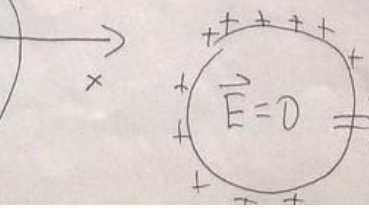
$$= \frac{1}{2}\int \underbrace{d\grave{e}}_{e}\left(\underbrace{\int \frac{de}{4\pi\varepsilon_0 r}}_{\text{potencial}}\right) = \frac{1}{2} e \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R} = \underline{\underline{\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R}}}$$

$$\int \frac{de}{4\pi\varepsilon_0 r} = \boxed{\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 e}}$$



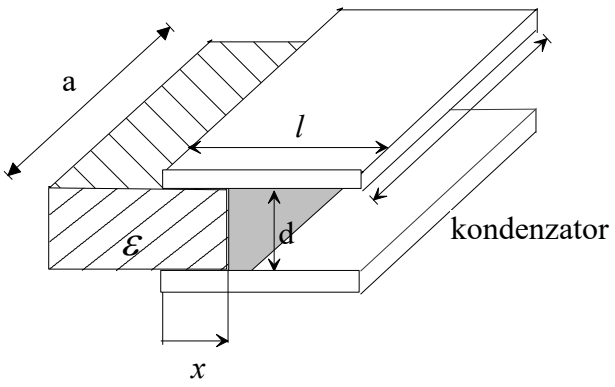
← { Vseeno v kateri točki izračunaš

⇑



$$\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\text{grad}\,\varphi = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\varphi = \text{konst}}}$$

SILA NA DIELEKTRIK



ε = dielektrična konstanta

- Ko "vstavimo" dielektrik med plošči izoliranega kondenzatorja (do globine x) se **naboj na ploščah ne spremeni**, torej velja:

  $e = C_0 U_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d} U_0 =$ konstanta za vse x,

  kjer $C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$ $\equiv$ kapaciteta pri x = 0 in U_0 napetost med ploščama pri x = 0.

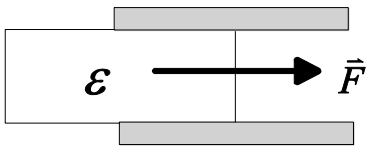
- Pri $x \neq 0$ sistem obravnavamo kot dva vzporedno vezana kondenzatorja

  $$W(x) = \frac{1}{2}\frac{e^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{C_0^2 U_0^2}{\varepsilon \varepsilon_0 \frac{ax}{d} + \varepsilon_0 \frac{a(l-x)}{d}}$$

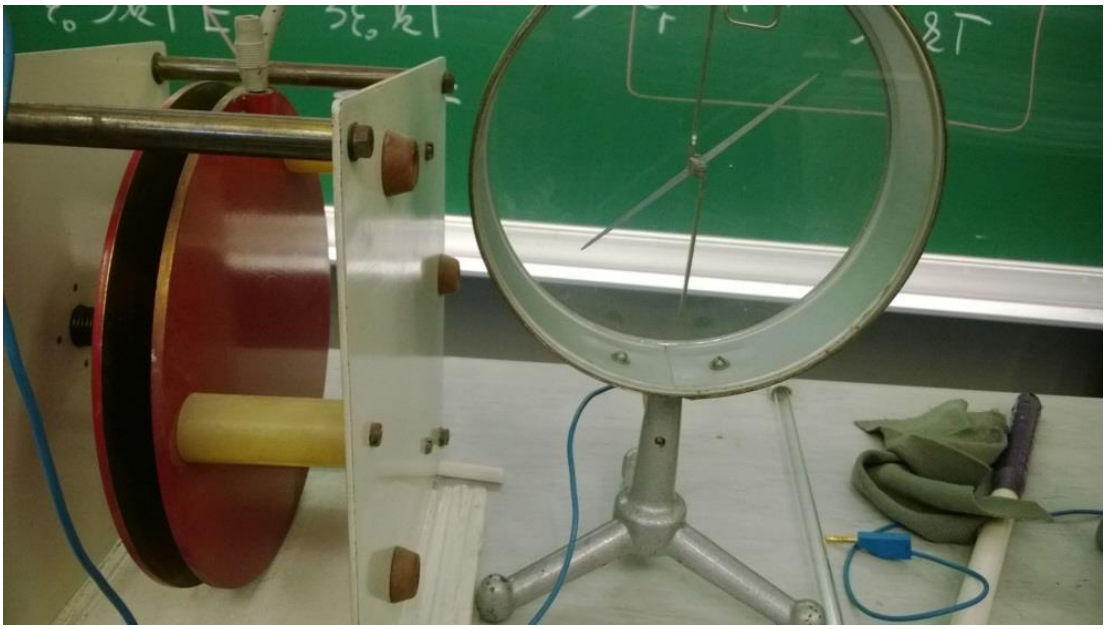
  $$W(x) < W(x=0)$$

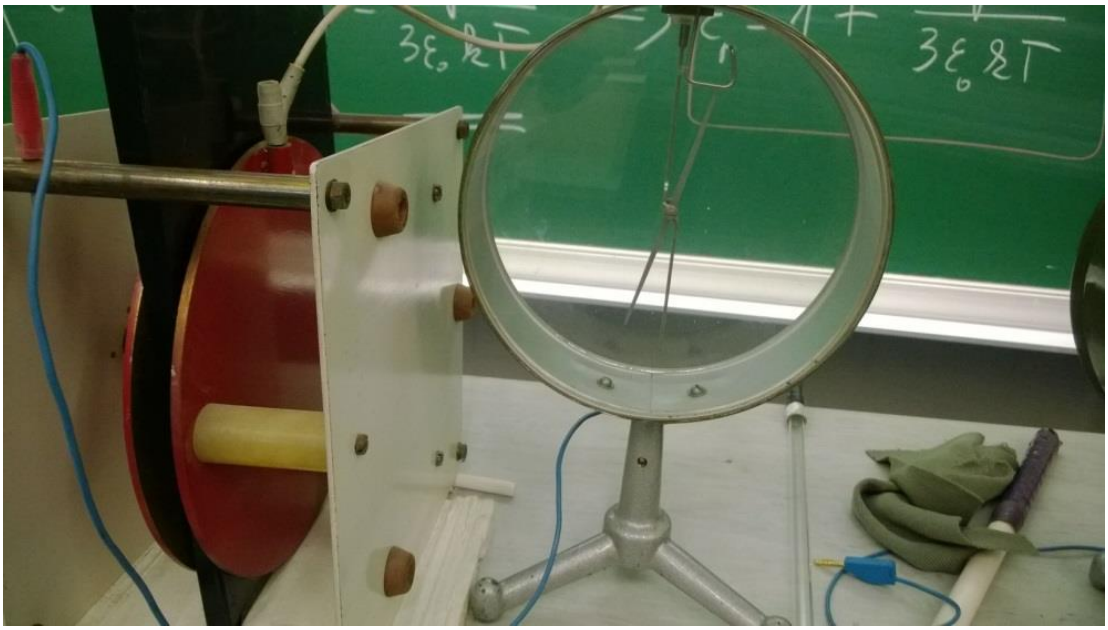
- Sila na dielektrik $\equiv$ sila med nabojem na ploščah in dipoli v dielektriku

$$\boxed{F = -\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2} U_0^2 \frac{\varepsilon_0 a l^2}{\mathrm{d}} \frac{(\varepsilon - 1)}{\left[(\varepsilon - 1)x + l\right]^2}}$$

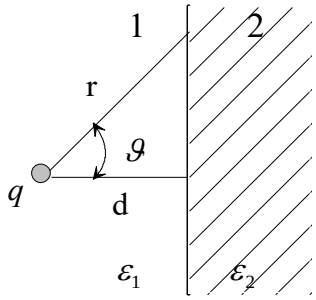


POSKUS: SNOV MED PLOŠČAMA KONDENZATORJA in napetost med ploščama





DODATEK: SILA NA TOČKASTI NABOJ V BLIŽINI MEJE DVEH DIELEKTRIKOV

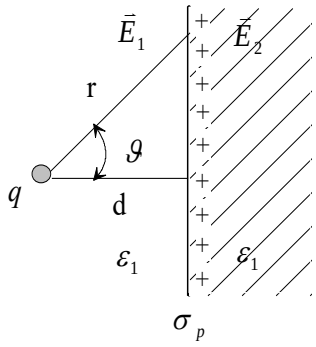


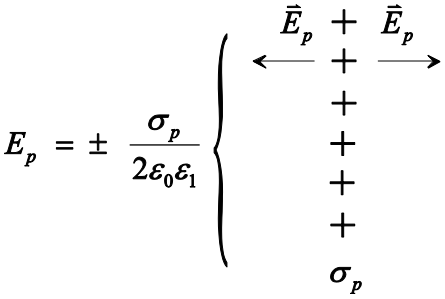
q = točkast naboj

$\cos\vartheta = \frac{d}{r}$

MODEL:

Predpostaviš, da tudi na desni strani $\varepsilon \equiv \varepsilon_1$, razliko v $\varepsilon -$ ih pa upoštevaš s površinskim nabojem desnega področja (σ_p)



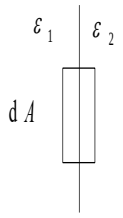


Vrednosti polja na stični ploskvi:

$$E_{1\perp} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\frac{1}{r^2}\frac{d}{r} - \frac{\sigma_p}{2\ \varepsilon_0\varepsilon_1} \quad \text{(v sredstvu 1)} \qquad (1)$$

$$E_{2\perp} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{1}{r^2} \frac{d}{r} + \frac{\sigma_p}{2 \varepsilon_0 \varepsilon_1} \quad \text{(v sredstvu 2)} \tag{2}$$

Robni pogoj (sledi iz Gaussov-ega zakona o električnem pretoku):



$$-\varepsilon_1 E_{1\perp} \mathrm{d}A + \varepsilon_2 E_{2\perp} \mathrm{d}A = 0 \tag{3}$$

Iz enačbe (3) sledi:

$$-\varepsilon_1 E_{1\perp} + \varepsilon_2 E_{2\perp} = 0 \tag{4}$$

V enačbo (4) vstavimo vrednosti $E_{1\perp}$ in $E_{2\perp}$ iz enačb (1) in (2), ter iz nastale enačbe izračunamo velikost σ_p. Potem pa izračunamo še E_p:

$$E_p = \frac{\sigma_p}{2\varepsilon_0\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{q}{r^2} \frac{d}{r} \quad . \tag{5}$$

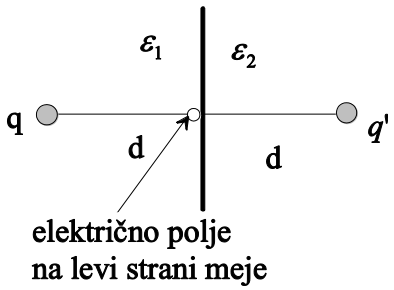
Enačbo (5) lahko zapišemo v obliki:

$$E_p = \frac{q'}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_1} \frac{1}{r^2} \frac{d}{r}, \tag{6}$$

kjer je

$$q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q. \tag{7}$$

Prispevek k električnemu polju **na levi strani meje** zaradi $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ izgleda torej kot električno polje točkastega naboja q' na **desni strani meje**:

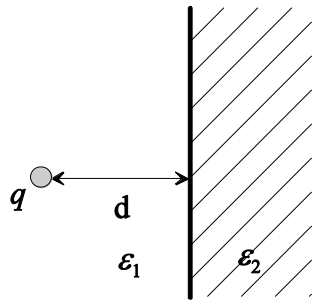


Tako lahko zapišemo silo med nabojem q na levi strani v mediju $\varepsilon = \varepsilon_1$ in nabojem $q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q$ na desni strani v mediju $\varepsilon = \varepsilon_1$ na razdalji 2d v obliki:

$$F = \frac{q\,q'}{4\pi\,\varepsilon_0 \varepsilon_1} \frac{1}{(2d)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right) \frac{q^2}{4d^2}. \tag{8}$$

Zaključek: sila na točkasti naboj q v mediju 1 je:

$$\boxed{F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right) \frac{q^2}{4d^2}.}$$



1. če $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 \Rightarrow F > 0$ (odbojna sila stran od mejne ploskve)
2. če $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow F < 0$ (privlačna sila proti mejni ploskve)