UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA ELEKTROTEHNIKO

VAJE IZ FIZIKE 2

ALEŠ IGLIČ
VERONIKA KRALJ-IGLIČ
TOMAŽ GYERGYEK
MIHA FOŠNARIČ

LJUBLJANA, 2011

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

53(075.8)(076.1)

VAJE iz fizike 2 / Aleš Iglič ... [et al.] ; [izdajatelj]
Fakulteta za elektrotehniko. - 3. popravljena in dopolnjena izd. -
Ljubljana : Založba FE in FRI, 2011

ISBN 978-961-243-177-8 (Fakulteta za elektrotehniko)

1. Iglič, Aleš, 1960-

255702272

Recenzent: prof. Bruno Cvikl
Založnik: Založba FE in FRI, Ljubljana
Izdajatelj: Fakuleta za elektrotehniko, Ljubljana
Urednik: mag. Peter Šega

Natisnil: Kopija MAVRIČ, Ljubljana
Naklada: 250 izvodov
3. popravljena in dopolnjena izdaja

Kazalo

Predgovor

Pričujoča tretja, dopolnjena in popravljena izdaja Vaj iz Fizike II v večini vsebujejo naloge iz pisnih testov iz predmeta Fizika II na Fakulteti za elektrotehniko, nekaj pa je tudi nalog s pisnih testov iz Fizike na Fakulteti za računalništvo in informatiko. Zbirko priporočamo študentom vseh fakultet, katerih program vključuje osnove klasične in moderne fizike.

Nekatere naloge imajo na koncu v oklepajih podane rezultate, posamezne naloge pa so rešene v celoti. Precej nalog je prirejenih ali povzetih iz literature, ki je podana na koncu publikacije.

V publikaciji je morda večje število nalog iz moderne fizike kot je to običaj v podobnih učbenikih za študente prvih letnikov. Glavni razlog, ki nas je napeljal k tej odločitvi, je veliko število že obstoječih učbenikov, ki vsebujejo predvsem fizikalne probleme iz klasične fizike, poznavanje moderne fizike pa je pri večini študentov pomanjkljivo, čeprav je pogosto nepogrešljivo pri kasnejšem strokovnem in raziskovalnem delu.

Pri sestavljanju tretje izdaje smo nekaterim nalogam dodali rešitve, pri nekaterih nalogah pa opisali ali vsaj nakazali postopek reševanja. Nekaj nalog je novih. Kljub mnogim napakam, ki smo jih odpravili glede na prejšnje izdaje, je v tekstu gotovo še kar nekaj tako tiskovnih in oblikovnih, kot tudi vsebinskih napak. Zato se priporočamo bralcem, predvsem študentom, da nam jih sporočijo.

Pri sestavi nalog so sodelovali prof. dr. Dušan Brajnik, prof. dr. Aleš Stanovnik, prof. dr. Radko Osredkar, asist. mag. Darko Korbar, za kar se jim iskreno zahvaljujemo. Zahvaljujemo se recenzentoma prof. dr. Brunu Cviklu in doc. dr. Francetu Sevšku za koristne pripombe in nasvete, študentoma Maji Ocepek ter Miranu Meži za pomoč pri urejanju teksta in odpravi napak ter g. Liljani Per za slike. Posebna zahvala gre Alešu Razingerju prof. fiz., ki je v celoti uredil besedilo in digitaliziral slike za prvo izdajo. Zahvaljujemo se tudi vsem študentom, ki so z nami sodelovali pri vajah in s tem pripomogli k oblikovanju publikacije.

Citati literature so v tekstu navedeni v oglatih oklepajih, vrednosti fizikalnih konstant s katerimi računamo pa so podane v poglavju "Fizikalne konstante".

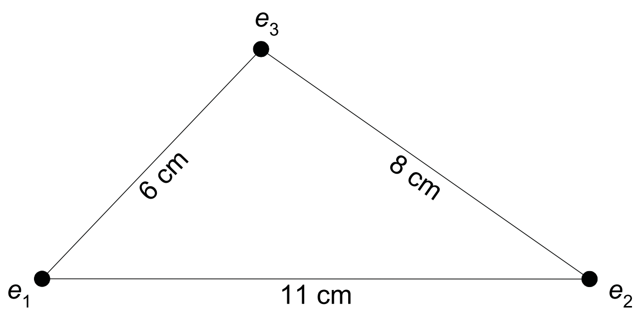
Nasveti za študente: Za dobro razumevanje in znanje fizike je nujno potrebno, da rešimo čim več nalog. Tako si pridobimo vajo in izkušnje. Brez tega nikakor ne gre. V začetku je morda koristno, da si pri reševanju naloge pomagamo s podobnimi že rešenimi problemi in učbeniki. Vsekakor pa nalogo najprej poskušamo rešiti sami in si šele nato, če je to potrebno, pomagamo z rešitvami. Kdor samo opazuje, kako naloge rešujejo drugi, kmalu ugotovi, da sam ne zna rešiti niti preprostih problemov, čeprav ima morda občutek, da vse razume. Ponavadi ni dovolj, da rešimo samo eno nalogo določenega tipa, ampak moramo rešiti vsaj nekaj podobnih nalog. Včasih se zgodi, da naloge kljub naporom ne znamo rešiti. Takrat poiščemo pomoč kolegov ali učiteljev.

Avtorji.

1 Elektrika in magnetizem

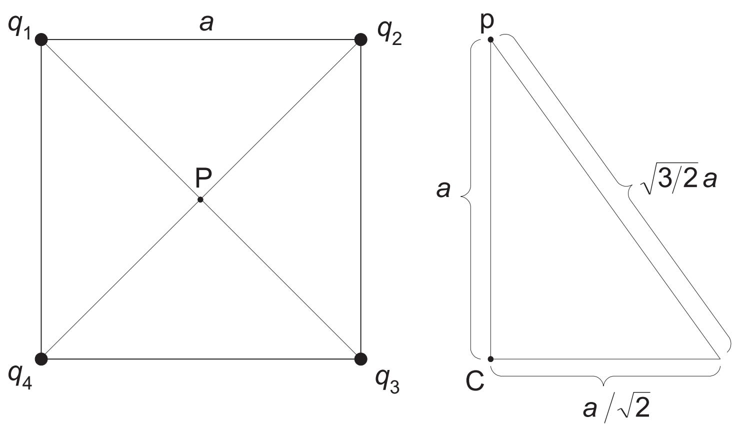
1.1 Električno polje

1. Trije točkasti naboji mirujejo v ravnini, kot kaže slika 1. Naboji po vrsti merijo: $e_1 = 2 \times 10^{-8}$As, $e_2 = -2 \times 10^{-8}$As in $e_3 = 3 \times 10^{-8}$As. Kolikšna sila deluje na naboj e_2?



Slika 1:

2. Kolikšna je električna napetost med središčem kvadratnega okvirja in točko, ki je 1 m (a) nad središčem? V ogliščih okvirja so točkasti naboji $q_1 = 10^{-8}$ As, $q_2 = -2 \times 10^{-8}$ As, $q_3 = 3 \times 10^{-8}$ As in $q_4 = 2 \times 10^{-8}$ As? Stranica okvirja je dolga a =1 m (Slika 2).



Slika 2:

Rešitev:

$$\varphi_{\mathrm{c}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 + q_2 + q_3 + q_4}{a/\sqrt{2}} = 500\mathrm{V}$$

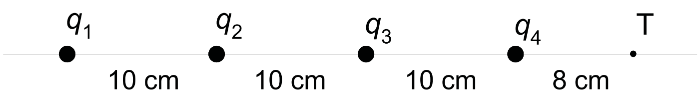
$$\varphi_{\mathrm{p}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 + q_2 + q_3 + q_4}{\sqrt{3/2}\,a} = 289\mathrm{V}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_{\mathrm{c}} - \varphi_{\mathrm{p}} \approx 211\mathrm{V}\,.$$

3. V vsakem oglišču enakostraničnega trikotnika, s stranico 3 nm se nahaja naboj, ki je enak 10 osnovnim nabojem. S kolikšno silo delujeta na enega izmed teh nabojev ostala dva naboja? $(4.4 \times 10^{-9}\mathrm{N})$

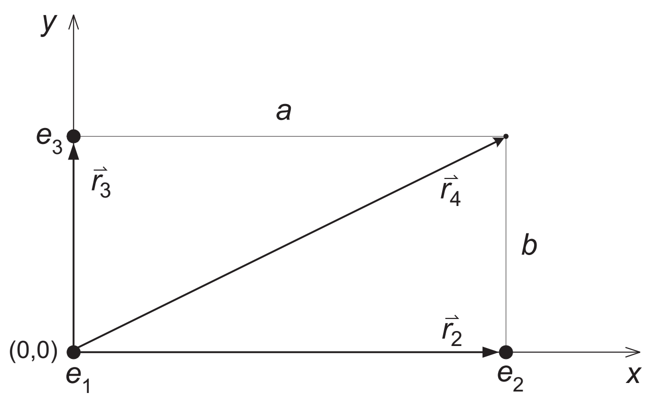
4. Kolikšen je električni potencial v središču kvadratnega okvirja, ki ima v ogliščih točkaste naboje 10^{-8} As, -2×10^{-8} As, 3×10^{-8} As in 4×10^{-8} As? Stranica okvirja ima 1m.

5. Štirje točkasti naboji: $q_1 = +2{\times}10^{-9}$ As, $q_2 = -10^{-9}$ As, $q_3 = -3 \times 10^{-9}$ As in $q_4 = +10^{-9}$ As mirujejo na skupni premici v enakomernih razmikih 10 cm, kot kaže slika 3. Kolikšna je jakost električnega polja v točki T, ki je 8 cm oddaljena od naboja q_4 in leži na isti premici, kot naboji? Ali kaže vektor električnega polja proti naboju q_4, ali proč od njega? Narišite skico!



Slika 3:

6. V ogliščih pravokotnika s stranicama $a = 20$ cm in $b = 10$ cm mirujejo trije točkasti naboji, $e_1 = +10^{-9}$ As, $e_2 = +2 \times 10^{-9}$ As in $e_3 = -10^{-9}$ As (slika 4). Kolikšno je električno polje $\vec{E}$ v četrtem oglišču pravokotnika? Kolikšen kot φ oklepa električno polje z zveznico med pozitivnima nabojema e_1 in e_2?



Slika 4:

Rešitev:
Električno polje $\vec{E}$ v dani točki je vsota prispevkov treh točkastih nabojev. Velja torej:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \\ &= \frac{e_1(\vec{r}_4 - \vec{r}_1)}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}_4 - \vec{r}_1|^3} + \frac{e_2(\vec{r}_4 - \vec{r}_2)}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}_4 - \vec{r}_2|^3} + \frac{e_1(\vec{r}_4 - \vec{r}_3)}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}_4 - \vec{r}_3|^3}\,.\end{aligned}$$

Pri tem so $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ in $\vec{r}_4$ krajevni vektorji nabojev e_1, e_2, e_3 in točke T_4 v četrtem oglišču pravokotnika. V kartezičnem koordinatnem sistemu z izhodiščem v naboju e_1 (slika 4) so komponente teh vektorjev naslednje:

$$\vec{r}_1 = (0,0)\,, \;\; \vec{r}_2 = (a,0)\,, \;\; \vec{r}_3 = (0,b)\,, \;\; \vec{r}_4 = (a,b)\,.$$

Električno polje je potem:

$$\vec{E} = (E_x, E_y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{e_1(a,b)}{(a^2+b^2)^{3/2}} + \frac{e_2(0,b)}{b^3} + \frac{e_3(a,0)}{a^3}\right)\,.$$

Komponenti električnega polja sta potem:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{e_1 a}{(a^2+b^2)^{3/2}} + \frac{e_3}{a^2}\right)\,,$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{e_1 b}{(a^2+b^2)^{3/2}} + \frac{e_2}{b^2}\right)\,.$$

Velikost električnega polja je

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} =$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{e_1^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{2e_1}{(a^2+b^2)^{3/2}}\left(\frac{e_3}{a} + \frac{e_2}{b}\right) + \frac{e_3^2}{a^4} + \frac{e_2^2}{b^4}}\,.$$

Električno polje $\vec{E}$ oklepa s koordinatno osjo x kot φ, ki je določen z enačbo (slika 4)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{E_y}{E_x} = \frac{a^2\left(e_1 b^3 + e_2(a^2+b^2)^{3/2}\right)}{b^2\left(e_1 a^3 + e_3(a^2+b^2)^{3/2}\right)}\,,$$

kar da rešitev $\varphi = -88.1^{\mathrm{o}} + \mathrm{k}\pi$. Ker je med električnim poljem $\vec{E}$ in osjo x topi kot, je $\mathrm{k} = 1$ in $\varphi = 91.9^{\mathrm{o}}$.

7. S kolikšno elektrostatsko silo (F) privlači proton 0.053 nm (r_1) oddaljeni elektron? Koliko dela (A) je potrebno, da oddaljimo ta elektron na razdaljo $r_2 = 0.213$ nm od protona?

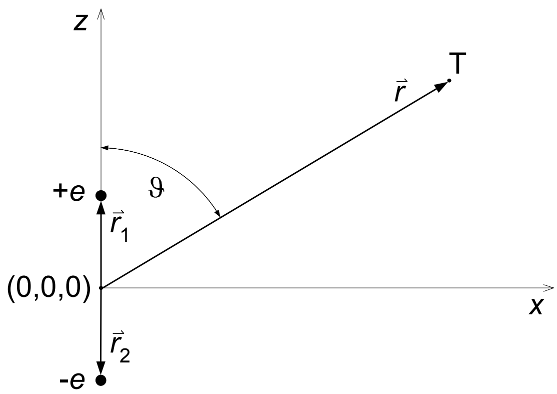
   Rešitev:

$$F = \mathrm{e}_0 E = -\frac{\mathrm{e}_0^2}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} = -8.2 \times 10^{-8}\ \mathrm{N}\,,$$

   kjer je e_0 osnovni naboj in E jakost električnega polja.

$$A = \int_{r_1}^{r_2}(-F)dr = \int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{e}_0^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr = \frac{\mathrm{e}_0^2}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}) =$$
$$= 3.3 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}\,.$$

8. Električni dipol je sestavljen iz dveh nasprotno enakih točkastih nabojev $e = \pm 10^{-8}$ As v razmiku $a = 1$ mm. Kolikšna je jakost električnega polja E v točki T, ki je oddaljena $r = 10$ cm od središča dipola, zveznica med to točko in središčem dipola pa oklepa s premico, na kateri ležita naboja kot $\vartheta = 25^o$ (glejte sliko 5)?



Slika 5:

Rešitev:
Koordinatni sistem postavimo tako, kot kaže slika 5. Središče dipola je v izhodišču koordinatnega sistema, naboja ležita na osi z, točka T pa v ravnini xz. Pozitivni naboj dipola je zgoraj, označimo ga z indeksom 1. Do pozitivnega naboja torej kaže vektor

$$\vec{r}_1 = (0, 0, \frac{a}{2}).$$

Negativni naboj je spodaj, označimo ga z indeksom 2, njegovo lego določa vektor

$$\vec{r}_2 = (0, 0 - \frac{a}{2})\,.$$

Lego točke T določa vektor $\vec{r}$ (slika 5):

$$\vec{r} = (x, 0, z) = r(\sin\vartheta, 0, \cos\vartheta)\,.$$

Električno polje $\vec{E}$ v točki T je vsota prispevkov $\vec{E}_1$ in $\vec{E}_2$, ki izvirata iz pozitivnega in negativnega naboja:

$$\begin{aligned}\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 &= \frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} + \frac{e_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3} = \\ &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} - \frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}\right)\,. \qquad (1)\end{aligned}$$

Upoštevali smo, da sta naboja nasprotno enaka ($e \equiv e_1 = |e_2|$). Sedaj pa moramo privzeti nekatere približke, sicer bo nadaljni račun preveč zapleten. Pri približkih upoštevamo dejstvo, da je $a << r$. Najprej izračunajmo $|\vec{r}-\vec{r}_1|^3$:

$$|\vec{r}-\vec{r}_1|^3 = |r(\sin\vartheta, 0, \cos\vartheta) - (0, 0, \frac{a}{2})|^3 =$$

$$= \left((r\sin\vartheta)^2 + (r\cos\vartheta - \frac{a}{2})^2\right)^{3/2} = r^3\left(1 - \frac{a\cos\vartheta}{r} + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{3/2} .$$

Ker je $a << r$, bomo zanemarili vse člene v katerih a/r nastopa v višji potenci, kot 1. Zanemarjamo torej vse člene tipa $(a/r)^2$, $(a/r)^3$,... Torej je približno:

$$|\vec{r}-\vec{r}_1|^3 \approx r^3\left(1 - \frac{a\cos\vartheta}{r}\right)^{3/2} .$$

Sedaj pa naredimo še en približek; izraz $(1 - a\cos\vartheta/r)^{3/2}$ razvijemo v potenčno vrsto in obdržimo samo prva dva člena vrste. To smemo storiti, ker je razmerje a/r majhno:

$$\left(1 - \frac{a\cos\vartheta}{r}\right)^{3/2} \approx \left(1 - \frac{3\,a\cos\vartheta}{2\,r}\right) .$$

Ker študenti na začetku prvega letnika še ne poznajo pojma razvoja funkcije v potenčno vrsto, povejmo samo, da smo uporabili formulo, ki jo najdemo v vsakem boljšem matematičnem priročniku:

$$(1\pm x)^{3/2} = 1 \pm \frac{3}{2}x + \frac{3\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{3\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{3\cdot 1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \ldots .$$

Formula velja za $|x| \le 1$, če pa je x dovolj majhen, pa sta dovolj že prva dva člena. Torej približno velja:

$$|\vec{r}-\vec{r}_1|^3 \approx r^3\left(1 - \frac{3\,a\cos\vartheta}{2\,r}\right) .$$

Na podoben način izračunamo tudi

$$|\vec{r}-\vec{r}_2|^3 \approx r^3\left(1 + \frac{3\,a\cos\vartheta}{2\,r}\right) .$$

Električno polje (enačba (1)) je potem:

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{1-3\,a\cos\vartheta/2\,r} - \frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{1+3\,a\cos\vartheta/2\,r}\right). \qquad (2)$$

Če ulomka v oklepaju v enačbi (2) razširimo na skupni imenovalec, dobimo:

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{1-3\,a\cos\vartheta/2\,r} - \frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{1+3\,a\cos\vartheta/2\,r} =$$

$$= \frac{(\vec{r}-\vec{r}_1)\,(1+3\,a\cos\vartheta/2\,r) - (\vec{r}-\vec{r}_2)\,(1-3\,a\cos\vartheta/2\,r)}{(1-3\,a\cos\vartheta/2\,r)\,(1+3\,a\cos\vartheta/2\,r)}. \qquad (3)$$

V skladu z dogovorom, da zanemarjamo vse člene, kjer razmerje a/r nastopa v višji potenci od 1, ugotovimo, da je imenovalec desne strani enačbe (3) približno enak 1. Števec pa je:

$$3\,a\cos\vartheta\,\frac{\vec{r}}{r} + \vec{r}_2 - \vec{r}_1 - \frac{3\,a\cos\vartheta}{2\,r}\,(\vec{r}_1+\vec{r}_2)\,.$$

Zadnji člen v zgornjem izrazu je enak nič, ker je $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = 0$. Enačba (2) s temi ugotovitvami preide v:

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3\,a\cos\vartheta\,\frac{\vec{r}}{r} + \vec{r}_2 - \vec{r}_1\right). \qquad (4)$$

Če se spomnimo še definicije električnega dipolnega momenta $p_e = ea$, zapišemo jakost električnega polja (4) po komponentah takole:

$$E_x = \frac{3p_e\sin\vartheta\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,,$$
$$E_y = 0\,,$$
$$E_z = \frac{p_e(3\cos^2\vartheta - 1)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,.$$

Sedaj pa izračunajmo jakost električnega polja še tako, da najprej poiščemo potencial U, ki ga v točki T ustvarjata oba naboja, nato pa izračunamo električno polje kot negativni gradient potenciala. Potencial je vsota prispevkov obeh nabojev:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r_1}|} + \frac{e_2}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r_2}|} =$$
$$= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r_1}|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r_2}|}\right) = \frac{e\left(|\vec{r}-\vec{r_2}| - |\vec{r}-\vec{r_1}|\right)}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r_1}||\vec{r}-\vec{r_2}|}. \quad (5)$$

Za nadaljevanje računa se moramo zopet zateči k približkom, pri katerih upoštevamo, da je $a << r$. Podobno, kot smo prej izračunali absolutno vrednost $|\vec{r}-\vec{r_1}|^3$, tudi sedaj izračunamo:

$$|\vec{r}-\vec{r_1}| = |r(\sin\vartheta, 0, \cos\vartheta) - (0, 0, \frac{a}{2})| =$$

$$= \left((r\sin\vartheta)^2 + (r\cos\vartheta - \frac{a}{2})^2\right)^{1/2} = r\left(1 - \frac{a\cos\vartheta}{r} + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{1/2}.$$

Ker je $a << r$, z enakimi argumenti kot prej zanemarimo zadnji člen zgornjega oklepaja, kjer razmerje a/r nastopa v kvadratni potenci. Torej približno velja:

$$|\vec{r}-\vec{r_1}| \approx r\left(1 - \frac{a\cos\vartheta}{r}\right)^{1/2}.$$

Ko ta izraz razvijemo v Taylorjevo vrsto do drugega člena, dobimo:

$$|\vec{r}-\vec{r_1}| \approx r\left(1 - \frac{a\cos\vartheta}{2\,r}\right).$$

Na podoben način izračunamo tudi

$$|\vec{r}-\vec{r_2}| \approx r\left(1 + \frac{a\cos\vartheta}{2\,r}\right).$$

Ko to dvoje vstavimo v (5), dobimo, da je potencial približno enak:

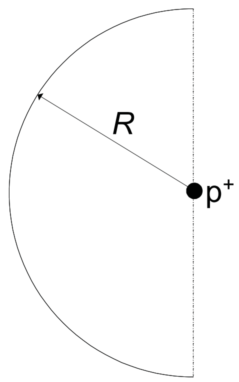
$$U = \frac{p_e\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p_e z}{4\pi\varepsilon_0(x^2+z^2)^{3/2}}.$$

Zaradi zanemaritve členov, v katerih razmerje a/r nastopa v kvadratni potenci, je namreč imenovalec v (5) enak 1.

Koordinatni sistem je narisan na sliki 5. Komponente jakosti električnega polja so potem

$$
\begin{aligned}
E_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{3p_e xz}{4\pi\varepsilon_0(x^2+z^2)^{5/2}} = \frac{3p_e \sin\vartheta\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,, \\
E_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} = \ 0\,, \\
E_z &= -\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3z^2}{(x^2+z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2+z^2)^{3/2}}\right) = \\
&= \frac{p_e(3\cos^2\vartheta - 1)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,.
\end{aligned}
$$

9. Polkroglasta lupina polmera $R = 2$ cm je enakomerno naelektrena z nabojem $e = 10^{-9}$ As. V središče odprtega prereza lupine postavimo proton (slika 6). Kolikšna je hitrost protona na veliki oddaljenosti od lupine?



Slika 6:

Rešitev:
Naboj polkrogle v mislih razdelimo na infinitezimalno majhne točkaste naboje z nabojem de, ki prispevajo k električnemu potencialu v točki T vrednost:

$$
\mathrm{d}\varphi_T = \frac{\mathrm{d}e}{4\pi\epsilon_0 R}\,. \tag{6}
$$

Prispevek vseh točkastih nabojev nam da iskano vrednost potenciala v točki T:

$$\varphi_T = \int \mathrm{d}\varphi_T = \int \frac{\mathrm{d}e}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R}\,. \tag{7}$$

Zapišemo zakon o ohranitvi energije:

$$\mathrm{e}_0\varphi_T = \frac{m_\mathrm{p} v_\infty^2}{2}\,, \tag{8}$$

kjer smo upoštevali, da je električni potencial polkrogle na veliki oddaljenosti od polkrogle enak nič. Iz enačbe (8) sledi:

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2\mathrm{e}_0\varphi_T}{m_\mathrm{p}}} = \sqrt{\frac{2\mathrm{e}_0 e}{m_\mathrm{p}\cdot 4\pi\epsilon_0 R}} = \ 0.293\times 10^6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

10. Dve majhni enaki kroglici z masama $m = 7$ g sta obešeni na dve enaki zelo lahki vrvici z dolžino $l = 20$ cm, ki imata skupno pritrdišče na stropu (slika 7). Kroglici sta naelektreni z enakima nabojema $e = 3{\cdot}10^{-7}$ As. Kolikšen kot φ oklepata vrvici v ravnovesju in kolikšna sila F_v napenja vsako od vrvic?

Rešitev:
Ko kroglici mirujeta je vsota sil na vsako od posameznih kroglic enaka 0. Na vsako od obeh kroglic delujejo naslednje sile: sila teže $\vec{F}_g$, elektrostatična sila $\vec{F}_e$ in sila vrvice $\vec{F}_v$ (glejte sliko 7). Velja torej

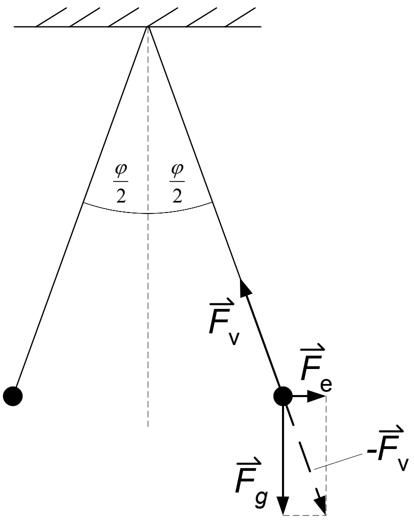
$$\vec{F}_g + \vec{F}_e + \vec{F}_v = 0\,.$$

Koordinatni sistem postavimo tako, kot kaže slika 7. Komponenta x zgornje enačbe je potem

$$-F_v \sin\frac{\varphi}{2} + F_e = 0\,.$$

Komponenta y pa je

$$F_v \cos\frac{\varphi}{2} - F_g = 0\,.$$



Slika 7:

Ti dve enačbi malo preuredimo in delimo med seboj:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{F_e}{F_g}\,.$$

Pri tem je

$$F_g = mg$$

in

$$F_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0(2l\sin\varphi/2)^2} = \frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0 l^2\sin^2\varphi/2}\,,$$

oziroma:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{e^2}{16mg\pi\varepsilon_0 l^2\sin^2\varphi/2}\,,$$

od koder sledi:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{e^2}{16mg\pi\varepsilon_0 l^2} = \ 0.0737\,.$$

Če imamo na razpolago boljši kalkulator lahko uporabimo kar njegov reševalec enačb in iz zgornje enačbe dobimo kot rešitev $\varphi = 48^o$. Če računamo s kalkulatorjem, ki ima samo osnovne operacije, pa moramo do rešitve priti po ovinkih. Najprej izrazimo tangens s sinusom in dobimo

$$\frac{\sin^3 \varphi/2}{\sqrt{1-\sin^2 \varphi/2}} = 0.0737\,.$$

Uvedemo novo spremenljivko

$$x = \sin\frac{\varphi}{2}\,.$$

Tako dobimo enačbo:

$$x = \left(0.0737\sqrt{1-x^2}\right)^{\frac{1}{3}}\,.$$

To enačbo lahko numerično rešimo z metodo iteracije. Dobimo $x = 0.396$, $\sin\frac{\varphi}{2} = 0.396$ in $\varphi = 46.7^o$. Sedaj izračunamo še silo, ki napenja posamezno vrvico:

$$F_v = \sqrt{F_g^2 + F_e^2} = \sqrt{(mg)^2 + \left(\frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0 l^2 \sin^2\varphi/2}\right)^2} = 0.47\,\mathrm{N}\,.$$

11. Naelektrena kroglica z maso 0.1 g in nabojem -10^{-5} As se lahko giblje vzdolž geometrijske osi zelo tankega ploščatega kolobarja z zunanjim polmerom 10 cm in notranjim polmerom 5 cm, po katerem je enakomerno razmazan naboj s površinsko gostoto 10^{-5} As/m^2. Kolikšen je nihajni čas kroglice, če jo za malenkost izmaknemo iz ravnovesne lege v središču kolobarja?
(8.36×10^{-3} s)

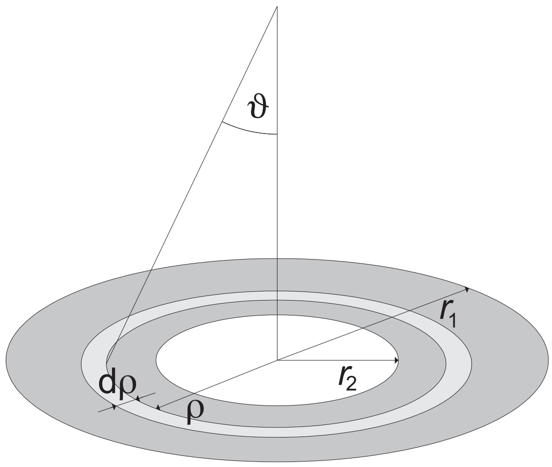
12. Dva točkasta naboja $e_1 = +10^{-7}$ As in $e_2 = -10^{-8}$ As, mirujeta v medsebojni oddaljenosti 10 cm. Koliko dela opravimo, ko ju razmaknemo na razdaljo 20 cm?
(45×10^{-6} J)

13. V breztežnem prostoru se nahajata dve naelektreni kroglici z masama $m_1 = 5$ g in $m_2 = 15$ g ter nabojema $e_1 = 8 \times 10^{-8}$ As in $e_2 = -2\times 10^{-8}$ As. Kroglici zadržujemo na razdalji $r_0 = 20$ cm. Nato sprostimo drugo kroglico, ki se začne približevati prvi kroglici. Kolikšna je hitrost druge kroglice, ko sta kroglici na razdalji $r_1 = 8$ cm? Sevanje zaradi pospeševanja nabojev zanemarimo.

   Rešitev:
   Uporabimo izrek o ohranitvi polne energije:
$$\frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \,,$$
   od tod pa sledi:
$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{m_2}} \sqrt{\frac{2e_1 e_2 (r_1 - r_0)}{4\pi\epsilon_0 r_0 r_1}} = 0.12 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \,.$$

14. Po plošči, ki ima obliko kolobarja z notranjim polmerom $r_1 = 5$ cm in zunanjim polmerom $r_2 = 10$ cm je enakomerno porazdeljen naboj s ploskovno gostoto $\sigma = +10^{-6}$ As/cm^2. Na geometrijski osi plošče se v oddaljenosti $z = 9$ cm od središča plošče nahaja točkasti naboj $e = -10^{-8}$ As. S kolikšno silo F se privlačita naboj in plošča? Koliko dela A opravimo, da premaknemo ta naboj po geometrijski osi kolobarja na razdaljo $h = 15$ cm od središča kolobarja?

   Rešitev:
   Ker so različni deli plošče različno oddaljeni od naboja, so prispevki posameznih delov plošče k skupni sili različni in jih je potrebno sešteti. Ker pa je naboj po plošči porazdeljen zvezno, ta vsota preide v integral. Prispevek infinitezimalno majhnega kolobarja plošče s ploščino $\mathrm{d}S = 2\pi\varrho\,\mathrm{d}\varrho$ k navpični komponenti sile je:
$$\mathrm{d}F = \frac{\sigma e \cos\vartheta \,\mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma e \cos\vartheta\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho}{2\varepsilon_0 r^2} \,. \tag{9}$$
   Glejte sliko 8. Vodoravna komponenta sile je zaradi simetrije



Slika 8:

enaka nič. Diferencial sile je potrebno izraziti z eno samo spremenljivko, po kateri potem integriramo. Lahko si izberemo polmer plošče ϱ ali kot ϑ. Iz slike 8 razberemo, da velja:

$$r = \sqrt{\varrho^2 + z^2}\,, \qquad \cos\vartheta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}}\,, \tag{10}$$

$$\varrho = z\,\mathrm{tg}\,\vartheta\,, \qquad \mathrm{d}\varrho = \frac{z\,\mathrm{d}\vartheta}{\cos^2\vartheta}\,. \tag{11}$$

Diferencial sile (9) lahko torej zapišemo kot funkcijo ϱ

$$\mathrm{d}F = \frac{\sigma e\, z\varrho\,\mathrm{d}\varrho}{2\varepsilon_0(\varrho^2 + z^2)^{3/2}}\,, \tag{12}$$

ali pa kot funkcijo ϑ:

$$\mathrm{d}F = \frac{\sigma e \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta}{2\varepsilon_0}\,. \tag{13}$$

Celotno silo lahko potem dobimo z integracijo enačbe (12):

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{\sigma e\, z}{2\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\varrho\,\mathrm{d}\varrho}{(\varrho^2+z^2)^{3/2}} = \\
&= -\frac{\sigma e\, z}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{\varrho^2+z^2}}\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \\
&= \frac{\sigma e\, z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r_1^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{r_2^2+z^2}}\right),
\end{aligned}
\tag{14}
$$

ali pa z integracijo diferenciala (13):

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{\sigma e}{2\varepsilon_0}\int_{\alpha}^{\beta}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = -\frac{\sigma e}{2\varepsilon_0}\cos\vartheta\Bigg|_{\alpha}^{\beta} = \\
&= \frac{\sigma e}{2\varepsilon_0}(\cos\alpha-\cos\beta) = \\
&= \frac{\sigma e}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{\sqrt{r_1^2+z^2}}-\frac{z}{\sqrt{r_2^2+z^2}}\right),
\end{aligned}
\tag{15}
$$

kjer smo upoštevali (glejte sliko 8)

$$\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{r_1^2+z^2}}$$

in

$$\cos\beta = \frac{z}{\sqrt{r_2^2+z^2}}\,.$$

Iz primerjave enačb (14) in (15) vidimo, da je pri takšnih in podobnih problemih za integracijsko spremenljivko bolje izbrati kot, ker dobimo preprostejše integrale.

Sedaj pa izračnajmo še opravljeno delo A. Prvi način je po definiciji dela, to je integral sile po poti:

$$
\begin{aligned}
A = -\int_z^h F(z)\mathrm{d}z = -\frac{\sigma e}{2\varepsilon_0}\left(\int_z^h\frac{z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{r_1^2+z^2}}-\int_z^h\frac{z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{r_2^2+z^2}}\right) = \\
= \frac{\sigma e}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{r_2^2+h^2}-\sqrt{r_2^2+z^2}-\sqrt{r_1^2+h^2}+\sqrt{r_1^2+z^2}\right).
\end{aligned}
$$

Drugi način pa vodi preko izračuna spremembe potencialne energije točkastega naboja. Opravljeno delo je namreč enako spremembi elektrostatične potencialne energije.

15. Po tankem obroču s premerom $2a = 0.3$ m je enakomerno porazdeljen naboj $e = -10^{-10}$ As. Daleč od obroča je na njegovi geometrijski osi vodikov ion H_2^+ (njegov naboj je $+e_0 = 1.6 \times 10^{-19}$ As in njegova masa je $m = 3.4 \times 10^{-27}$ kg). Ocenite s kolikšno hitrostjo preleti ion ravnino obroča, če se lahko prosto giblje in je na začetku miroval?
($v = \sqrt{ee_0/(2\pi\varepsilon_0 am)} = 23.7$ km/s)

16. Kroglica mase 3 g in naboja 8 μAs se približuje tankemu obroču s polmerom 3 cm, ki ima po svoji površini enakomerno porazdeljen naboj 0.1 μAs. Kroglica se giblje vzdolž geometrijske osi obroča. Hitrost kroglice na veliki oddaljenosti od obroča je 30 km/h. Do katere najmanjše razdalje se kroglica približa središču obroča, če le-ta miruje?
(6.22 cm)

17. Dve majhni naelektreni kroglici mirujeta v medsebojni oddaljenosti $r_0 = 30$ cm. Prva ima maso $m_1 = 0.02$ g in naboj $e_1 = 2 \times 10^{-8}$ As, druga pa maso $m_2 = 0.03$ g in naboj $e_2 = -3 \times 10^{-8}$ As. Kroglici spustimo, da se začneta prosto gibati. Kolikšni sta njuni hitrosti v trenutku, ko je razdalja med njima $r_1 = 18$ cm? Izgube energije zaradi sevanja zanemarimo!

Rešitev:
Uporabimo izrek o ohranitvi polne energije:
$$\frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \,. \qquad (16)$$
Velja tudi izrek o ohranitvi gibalne količine:
$$0 = m_1 v_1 - m_2 v_2 \,, \qquad (17)$$
kjer smo upoštevali, da je skupna gibalna količina obeh kroglic enaka nič. Iz enačbe (17) sledi:
$$v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1 \,. \qquad (18)$$

Izraz za hitrost v_2 (enačba (18)) vstavimo v enačbo (16) in po krajšem računu dobimo:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2e_1e_2m_2(r_1 - r_0)}{4\pi\epsilon_0 m_1(m_1 + m_2)}}\,. \tag{19}$$

Iz enačb (18) in (19) pa dobimo še v_2:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2e_1e_2m_1(r_1 - r_0)}{4\pi\epsilon_0 m_2(m_1 + m_2)}}\,.$$

18. Po 1 m dolgi tanki palici je enakomerno porazdeljen naboj. Gostota naboja na dolžinsko enoto palice je $\mu = +10^{-6}$ As/cm. Točkasti naboj $e = -10^{-7}$ As miruje na razdalji $a = 30$ cm od krajišča palice na isti premici, na kateri leži palica. Koliko dela opravimo, ko naboj počasi premaknemo na razdaljo $b = 50$ cm proč od krajišča palice vzdolž premice, na kateri leži palica?

19. Po 50 cm dolgi ravni tanki palici je enakomerno porazdeljen naboj $+10^{-6}$ As. Točkasti naboj -10^{-7} As miruje 30 cm od levega in 40 cm od desnega krajišča palice. S kolikšno silo se privlačita naboj in palica?

20. Prevodno kroglico s polmerom 2 cm, ki nosi naboj na površini 2×10^{-6} As, z zelo dolgo prevodno nitko povežemo z drugo kroglico, po površini katere je enakomerno porazdeljen naboj 10^{-6} As in ima polmer 5 cm. Kolikšni sta končni gostoti naboja na obeh kroglicah?
($\sigma_1 = 1.7 \times 10^{-4}$ As/m^2, $\sigma_2 = 0.68 \times 10^{-4}$ As/m^2)

21. Krogelni kondenzator ima elektrodi s polmeroma $r_1 = 2$ cm in $r_2 = 10$ cm in je priključen na napetost $U_0 = 8000$ V tako, da je notranja elektroda pozitivna. Med elektrodama je vakuum. Proton, ki ima maso $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg in en pozitivni osnovni naboj $e_0 = 1.6 \times 10^{-19}$ As ima v trenutku, ko je za razdaljo $r_3 = 4$ cm oddaljen od središča kondenzatorja, hitrost $v_3 = 10$ km/s v smeri radialno navzven. Kolikšna je hitrost

protona (v_4) v trenutku, ko je za razdaljo r_4= 8 cm oddaljen od središča kondenzatorja?

Rešitev:
Predpostavljamo, da se protonu ohranja celotna energija in da torej ni izgub zaradi sevanja ali trkov. Potem velja:

$$\frac{1}{2}mv_3^2 + e_0U_3 = \frac{1}{2}mv_4^2 + e_0U_4\,,$$

kjer sta U_3 in U_4 elektrostatična potenciala na mestih r_3 in r_4. Od tod sledi

$$v_4 = \sqrt{v_3^2 + \frac{2e_0}{m}\left(U_3 - U_4\right)}\,.$$

Izračunati moramo torej še potencialno razliko $(U_3 - U_4)$, oziroma napetost med točkama r_3 in r_4. Do nje bomo prišli z integracijo električnega polja $E(r)$ po radiju od r_3 do r_4. Najprej moramo ugotoviti radialno odvisnost električnega polja. Spomnimo se Gaussovega izreka, ki pravi, da je električni pretok skozi sklenjeno ploskev enak naboju, ki ga ta sklenjena ploskev objema:

$$\int_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = e\,.$$

Za sklenjeno ploskev smo izbrali kroglo s polmerom r, ki leži med obema elektrodama. Jakost električnega polja ima na vsej krogli konstantno vrednost, električno polje pa ima smer radija. Zato je

$$D = \varepsilon_0 E$$

in

$$\int_S dS = 4\pi r^2\,.$$

Ta krogla objame pozitivni naboj $e = CU_0$, ki se nabere na notranji elektrodi. Kapaciteta krogelnega kondenzatorja je

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1}\,.$$

Iz zgornjih štirih enačb tako sledi:

$$\varepsilon_0 E 4\pi r^2 = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1} U_0 \, .$$

Električno polje je potem:

$$E = \frac{U_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1} \frac{1}{r^2} \, .$$

Iskana razlika potencialov pa je:

$$(U_3 - U_4) = \int_{r_3}^{r4} E \, \mathrm{d}r = \frac{U_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1} \int_{r_3}^{r_4} \frac{dr}{r^2} = U_0 \frac{r_1 r_2 (r_4 - r_3)}{(r_2 - r_1) r_3 r_4} \, .$$

Iskana hitrost protona je zato enaka:

$$v_4 = \sqrt{v_3^2 + \frac{2e_0 U_0}{m} \cdot \frac{r_1 r_2 (r_4 - r_3)}{(r_2 - r_1) r_3 r_4}} = \ 692200 \text{ m/s} \ .$$

22. Valjasti kondenzator ima elektrodi s polmeroma $r_1 = 1$ mm in $r_2 = 4$ mm in je priključen na napetost $U_0 = 8000$ V tako, da je notranja elektroda pozitivna. Med elektrodama je vakuum. Proton, ki ima maso $m = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg in en pozitivni osnovni naboj $e_0 = 1.6 \cdot 10^{-19}$ As ima v trenutku, ko je za razdaljo $r_3 = 2$ mm oddaljen od geometrijske osi kondenzatorja, hitrost $v_3 = 200$ km/s v smeri radialno navzven. Kolikšna je hitrost v_4 protona v trenutku, ko je za razdaljo $r_4 = 3$ mm oddaljen od geometrijske osi kondenzatorja?

Rešitev:
Predpostavljamo, da se protonu ohranja skupna energija in da torej ni izgub zaradi sevanja ali trkov. Potem velja:

$$\frac{1}{2} m v_3^2 + e_0 U_3 = \frac{1}{2} m v_4^2 + e_0 U_4 \, ,$$

kjer sta U_3 in U_4 elektrostatična potenciala na razdaljah r_3 in r_4 od geometrijske osi. Od tod sledi

$$v_4 = \sqrt{v_3^2 + \frac{2e_0}{m} (U_3 - U_4)} \, .$$

Izračunati moramo torej še potencialno razliko $(U_3 - U_4)$, oziroma napetost med točkama r_3 in r_4. Do nje bomo prišli z integracijo električnega polja $E(r)$ po radiju od r_3 do r_4. Najprej pa moramo ugotoviti radialno odvisnost električnega polja. Potrebujemo Gaussov izrek, ki pravi, da je električni pretok skozi sklenjeno ploskev enak naboju, ki ga sklenjena ploskev objema:

$$\int_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = e \, ,$$

Za sklenjeno ploskev smo izbrali plašč valja s polmerom r, ki leži med obema elektrodama. Jakost električnega polja ima na vsej krogli konstantno vrednost, električno polje pa ima smer radija. Zato je

$$D = \varepsilon_0 E$$

in

$$\int_S \mathrm{d}S = 2\pi r l.$$

Predpostavili smo, da je $l >> r$ in zanemarili pojave na robu elektrod. Izbrani plašč valj objame pozitivni naboj

$$e = C U_0 \, ,$$

ki se nabere na notranji elektrodi. Kapaciteta valjastega kondenzatorja je

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(r_2/r_1)} \, .$$

Iz zgornjih petih enačb sledi:

$$\varepsilon_0 E 2\pi r l = U_0 \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(r_2/r_1)} \, .$$

Električno polje je potem:

$$E = \frac{U_0}{\ln(r_2/r_1)} \cdot \frac{1}{r} \, .$$

Iskana napetost pa je:

$$(U_3 - U_4) = \frac{U_0}{\ln(r_2/r_1)} \int_{r_3}^{r_4} \frac{dr}{r} = U_0 \frac{\ln(r_4/r_3)}{\ln(r_2/r_1)} \, .$$

Iskana hitrost protona je potem

$$v_4 = \sqrt{v_3^2 + \frac{2e_0U_0}{m}\frac{\ln(r_4/r_3)}{\ln(r_2/r_1)}} = \ 898035 \text{ m/s}\,.$$

23. Med dvema votlima koncentričnima kovinskima kroglama polmerov $r_1 = 3$ cm in $r_2 = 6$ cm je izolator s prebojno jakostjo električnega polja $E_\mathrm{p} = 40$ kV/cm. Kolikšna je največja napetost, ki jo smemo priključiti med obe krogli?

Rešitev:
V primeru enakomerno naelektrenih krogel je električno polje med kroglama krogelno simetrično in odvisno samo od radija (r). Ekvipotencialne ploskve so koncentrične krogle, silnice pa kažejo v radialni smeri. Zakon o električnem pretoku za poljubno krogelno ploskev med obema kroglama zapišemo v obliki:

$$D \cdot 4\pi r^2 = e\,, \tag{20}$$

kjer je e naboj na notranji krogli. Ob upoštevanju zveze $D = \epsilon_0\epsilon E$ iz enačbe (20) sledi:

$$E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0\epsilon\, r^2}\,, \qquad r_1 \le r_1 \le r_2\,. \tag{21}$$

Izračunajmo še električno napetost med kroglama:

$$U = -\int_{r_1}^{r_2} E\mathrm{d}r = \frac{e}{4\pi\epsilon\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\,. \tag{22}$$

Največja jakost električnega polja med kroglama je pri notranji površini prve krogle. Zato postavimo:

$$E_\mathrm{p} = \frac{e_\mathrm{p}}{4\pi\epsilon_0\epsilon\, r_1^2}\,,$$

od tod pa sledi:

$$e_p = E_p\, 4\pi\epsilon_0\epsilon\, r_1^2\,. \tag{23}$$

Ob upoštevanju enačb (23) in (22) izračunamo največjo napetost, ki jo smemo priključiti med obe krogli:

$$U_p = E_p\, r_1^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \ 60 \text{ kV}\,.$$

24. Ploščni kondenzator ima elektrodi s površino 200 cm^2 v razmiku 5 mm. Priključen je na napetost 3000 V. Koliko dela opravimo, ko elektrodi razmaknemo na razdaljo 10 mm?

25. Krogelni kondenzator ima elektrodi s polmeroma 2 cm in 5 cm. Kolikšna je kapaciteta tega kondenzatorja in kolikšen naboj se nabere na kondenzatorju, če ga priključimo na napetost 1000 V?

1.2 Električni tok

26. Prazen kondenzator s kapaciteto $C = 2\ \mu\mathrm{F}$ in upor z upornostjo $R = 2\ \mathrm{M}\Omega$ zvežemo zaporedno in priključimo na baterijo s konstantno napetostjo U. Po kolikšnem času t po priključitvi je napetost na kondenzatorju U_C trikrat večja od napetosti na uporu U_R?

Rešitev:
Najprej v splošnem z enačbami opišimo polnjenje kondenzatorja. Po Kirchoffovem izreku je vsota napetosti v zaključenem krogu enaka nič:

$$U + U_R + U_C = 0\,,$$

$$U - I(t)R - \frac{e(t)}{C} = 0\,. \qquad (24)$$

Pri tem je $I(t)$ tok skozi upor, ki je seveda funkcija časa t in $e(t)$ naboj na kondenzatorju, ki je prav tako odvisen od časa. Med tokom in nabojem velja zveza:

$$I = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\,. \qquad (25)$$

Vstavimo enačbo (25) v (24):

$$U - \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}R - \frac{e}{C} = 0\,. \qquad (26)$$

Ločimo spremenljivki in integriramo:

$$\int_0^t \mathrm{d}t = RC\int_0^e \frac{\mathrm{d}e}{UC - e}\,,$$

$$t = -RC \ln\left(\frac{UC - e}{UC}\right) ,$$

$$e(t) = UC\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right) .$$

Tako smo ugotovili kako se naboj na kondenzatorju spreminja s časom. Napetost na kondenzatorju pa je potem:

$$U_C = \frac{e}{C} = U\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right) . \tag{27}$$

Odvisnost toka od časa pa je

$$I = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{U}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) .$$

Napetost na kondenzatorju v odvisnosti od časa je enaka:

$$U_R = IR = U \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) . \tag{28}$$

Sedaj se vrnimo k vprašanju, ki ga zastavlja naloga. Zahteva, da mora biti napetost na kondenzatorju 3 krat večja od napetosti na uporu ($U_C = 3U_R$), skupaj z enačbama (27) in (28) da:

$$1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = 3 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) ,$$

$$t = -RC \ln\frac{1}{4} = \ 5.5 \text{ s} .$$

Dodajmo še naslednje. Sistem enačb (24) in (25) bi lahko reševali tudi na drug način, ki je bolj običajen. Enačbo (24) odvajamo po času in upoštevamo enačbo (25). Dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} R + \frac{I}{C} = 0 .$$

Ločimo spremenljivki in integriramo:

$$\int_0^t \mathrm{d}t = -RC \int_{U/R}^{I} \frac{\mathrm{d}I}{I} ,$$

$$I = \frac{U}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) .$$

Od to dobimo še:

$$e = \int_0^t I \,\mathrm{d}t = \frac{U}{R} \int_0^t \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \mathrm{d}t =$$
$$= UC\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right) .$$

Nato pa izračunamo še obe napetosti U_C in U_R.

27. Kondenzator s kapaciteto C priključimo preko upora R na istosmerno napetost U. V kolikšnem času naraste energija kondenzatorja na šestnajstino njegove končne energije? ($t = RC\ \ln(4/3)$)

28. Prazen kondenzator s kapaciteto $C = 2\ \mu$F in upor z upornostjo $R = 2$ MΩ zvežemo zaporedno in priključimo na generator. Napetost na generatorju je najprej enaka 0, v nekem trenutku pa začne naraščati linearno s časom po enačbi $U = At$, kjer je A konstanta. Po kolikšnem času t po začetku naraščanja napetosti na generatorju je napetost na kondenzatorju U_C dvakrat večja od napetosti na uporu U_R?

Rešitev:
Vsota napetosti v zaključenem krogu je enaka nič:

$$U + U_R + U_C = 0 ,$$
$$At - I(t)R - \frac{e(t)}{C} = 0 . \tag{29}$$

Pri tem je $I(t)$ tok skozi upor in $e(t)$ naboj na kondenzatorju. Med tokom in nabojem velja zveza:

$$I = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} . \tag{30}$$

Vstavimo enačbo (30) v (29) in tako dobljeno enačbo malo preuredimo:

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}\, e = \frac{A}{R}\, t . \tag{31}$$

Dobili smo nehomogeno diferencialno enačbo, katere rešitev $e(t)$ je naboj na kondenzatorju kot funkcija časa. Reševanje takšnih diferencialnih enačb presega znanje matematike študentov v prvem letniku. Vseeno bomo nalogo najprej reševali po tej poti. Splošna rešitev enačbe (31) je vsota splošne rešitve $e_h(t)$ homogenega dela enačbe (levi del enačbe (31)) in partikularne rešitve $e_p(t)$ nehomogene enačbe (celotna enačba (31)). Homogeni del

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}\, e = 0\,,$$

ima splošno rešitev

$$e_h = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\,.$$

Pri tem je Q_0 konstanta, ki jo bomo določili kasneje. Partikularno rešitev e_p lahko uganemo z malo razmišljanja. Jasno je, da mora to biti polinomska funkcija časa t. Koeficiente v polinomu moramo postaviti takšne, da se bodo pri odvajanju in seštevanju odšteli vsi členi razen tistih, ki imajo t v prvi potenci. Temu ustreza na primer

$$e_p = AC\,(t - RC)\,.$$

Splošna rešitev enačbe (31) je potem:

$$e = e_h + e_p = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + AC\,(t - RC)\,.$$

Sedaj moramo določiti še konstanto Q_0. To določimo iz podatka, da je bil kondenzator v začetku prazen. Torej

$$e(t = 0) = 0 = Q_0 - ARC^2 \Rightarrow Q_0 = ARC^2\,.$$

Rešitev enačbe (31), ki ustreza tudi začetnemu pogoju, je torej

$$e = AC\left(t + RC\left(\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) - 1\right)\right)\,. \qquad (32)$$

Napetost na kondenzatorju U_C je potem:

$$U_C = \frac{e}{C} = A\left(t + RC\left(\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) - 1\right)\right). \qquad (33)$$

Odvisnost toka od časa je:

$$I = \frac{de}{dt} = AC\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right). \qquad (34)$$

Napetost na uporu U_R pa je

$$U_R = IR = ARC\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right). \qquad (35)$$

Iskani čas t dobimo iz pogoja $U_C = 2U_R$:

$$A\left(t + RC\left(\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) - 1\right)\right) = 2ARC\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right),$$

oziroma

$$t = 3RC\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right). \qquad (36)$$

To transcendentno enačbo lahko rešimo numerično z metodo navadne iteracije ali pa kar z reševalcem enačb na kalkulatorju. Iskani čas je $t = 11.29$ s.

Reševanju nehomogene diferencialne enačbe (31) bi se bilo mogoče izogniti, če bi enačbo (29) najprej odvajali po času in nato upoštevali še enačbo (30):

$$A - \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}R - \frac{I}{C} = 0\,.$$

Sedaj je mogoče ločiti spremenljivki in nato integrirati:

$$\int_0^t \mathrm{d}t = RC\int_0^I \frac{\mathrm{d}I}{AC - I}\,,$$

$$t = -RC\ln\left(\frac{AC - I}{AC}\right),$$

$$I = AC\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right).$$

Od tod dobimo še časovno odvisnost naboja na kondenzatorju:

$$\begin{aligned} e &= \int_0^t I \mathrm{d}t = AC\int_0^t \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right)\mathrm{d}t \\ &= AC\left(t + RC\left(\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) - 1\right)\right). \end{aligned}$$

Nadalnje reševanje naloge pa poteka enako, kot prej.

29. Kondenzator s kapaciteto $C_1 = 1\ \mu$F naelektrimo na napetost $U_0 = 9000$ V nato pa ga praznimo preko zaporedno zvezanih upora z upornostjo $R = 2$ MΩ in drugega kondenzatorja s kapaciteto $C_2 = 2\ \mu$F, ki je v začetku prazen. Kolikšne so napetosti na vseh treh elementih v vezju $t = 2$ s po priključitvi?

Rešitev:
Vsota napetosti v zaključenem krogu je enaka 0:

$$U_1 + U_2 + U_R = 0.$$

Pri tem je U_1 napetost na prvem kondenzatorju, U_2 napetost na drugem kondenzatorju in U_R napetost na uporu.

$$\frac{e_1}{C_1} - \frac{e_2}{C_2} - IR = 0. \tag{37}$$

Naboja na obeh kondenzatorjih e_1 in e_2 ter tok skozi upor I so med seboj povezani, kajti celoten začetni naboj na prvem kondenzatorju $e_1(t=0) = C_1U_0$ se ohranja. Naboj, ki odteče s prvega kondenzatorja steče v obliki električnega toka skozi upor in priteče v drugi kondenzator. Zato velja:

$$-\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}t} = I, \tag{38}$$

$$\frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}t} = I\,. \tag{39}$$

Enačbe (37)-(39) tvorijo skupaj z začetnimi pogoji

$$e_1(t=0) = C_1 U_0\,, \quad e_2(t=0) = 0\,, \quad I(t=0) = \frac{U_0}{R}\,, \tag{40}$$

sistem treh diferencialnih enačb s tremi neznanimi funkcijami časa $e_1(t)$, $e_2(t)$ in $I(t)$.

Enačbo (37) odvajamo po času, upoštevamo enačbi (38) in (39), malo preuredimo in dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -I\,\frac{C_1 + C_2}{RC_1C_2}\,.$$

Ločimo spremenljivki:

$$\mathrm{d}t = -\frac{RC_1C_2}{C_1 + C_2}\frac{\mathrm{d}I}{I}\,,$$

nato pa integriramo in upoštevamo začetni pogoj za tok I

$$\int_0^t \mathrm{d}t = -\frac{RC_1C_2}{C_1 + C_2}\int_{\frac{U_0}{R}}^{I}\frac{\mathrm{d}I}{I}\,,$$

$$t = -\frac{RC_1C_2}{C_1 + C_2}\,\ln\!\left(\frac{IR}{U_0}\right)\,,$$

$$I = \frac{U_0}{R}\,\exp\!\left(-\frac{t(C_1 + C_2)}{RC_1C_2}\right)\,. \tag{41}$$

Z upoštevanjem enačb (41), (38), (39) in začetnih pogojev (40) poiščemo še naboja na obeh kondenzatorjih:

$$\int_{C_1U_0}^{e_1}\mathrm{d}e_1 = -\int_0^t I\mathrm{d}t\,,$$

$$e_1 - C_1U_0 = -\frac{U_0}{R}\int_0^t \exp\!\left(-\frac{t(C_1 + C_2)}{RC_1C_2}\right)\mathrm{d}t\,,$$

$$e_1 = U_0C_1\left(1 + \frac{C_2}{C_1 + C_2}\left(\exp\!\left(-\frac{t(C_1 + C_2)}{RC_1C_2}\right) - 1\right)\right)\,. \tag{42}$$

Na podoben način izračunamo še:

$$\int_0^{e_2} \mathrm{d}e_2 = \int_0^t I \mathrm{d}t \,,$$

$$e_2 = \frac{U_0}{R} \int_0^t \exp\left(-\frac{t(C_1+C_2)}{RC_1C_2}\right) \mathrm{d}t \,,$$

$$e_2 = U_0 \, \frac{C_1C_2}{C_1+C_2} \left(1 - \exp\left(-\frac{t(C_1+C_2)}{RC_1C_2}\right)\right) . \qquad (43)$$

Iz rešitev (41)-(43) poiščemo še napetosti na vseh treh členih kot funkcije časa:

$$U_1 = \frac{e_1}{C_1} = U_0 \left(1 + \frac{C_2}{C_1+C_2} \left(\exp\left(-\frac{t(C_1+C_2)}{RC_1C_2}\right) - 1\right)\right) ,$$

$$U_2 = \frac{e_2}{C_2} = U_0 \, \frac{C_1}{C_1+C_2} \left(1 - \exp\left(-\frac{t(C_1+C_2)}{RC_1C_2}\right)\right) ,$$

$$U_R = IR = U_0 \, \exp\left(-\frac{t(C_1+C_2)}{RC_1C_2}\right) .$$

Ob času $t = 2$ s po priključitvi so napetosti $U_1 = 4338$ V, $U_2 = 2330$ V in $U_R = 2008$ V.

30. Krogelni kondenzator ima prostor med elektrodama popolnoma izpolnjen z izolatorjem, ki ima specifično upornost $\zeta = 10^{13}$ Ωm in dielektričnost $\varepsilon = 6$. Kondenzator naelektrimo na napetost U_0, nato pa vir napetosti odklopimo in kondenzator izoliramo. Po kolišnem času t se, zaradi "puščanja"električne izolacije med elektrodama, napetost na kondenzatorju zniža na polovico začetne vrednosti?

    Rešitev:
    Tukaj gre za praznenje kondenzatorja preko upora, ki ga predstavlja slaba izolacija med elektrodama. Napetost na kondenzatorju pojema s časom kot:

$$U = U_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) ,$$

kjer sta R upor izolacije in C kapaciteta kondenzatorja. Od tod sledi, da je iskani čas

$$t = -RC \ln \frac{1}{2}\,.$$

Poiskati je treba samo še konstanto RC. Kapaciteta krogelnega kondenzatorja je

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\, r_1 r_2}{r_2 - r_1}\,.$$

Upor izolatorja pa izračunamo takole. Tanka krogelna lupina izolatorja debeline $\mathrm{d}r$ ima upornost

$$\mathrm{d}R = \zeta\,\frac{\mathrm{d}r}{4\pi r^2}\,.$$

Celoten izolator je sestavljen iz žaporedno zvezanih"uporov posameznih lupin. Njegova upornost je torej vsota upornosti lupin. Ker pa so lupine zvezno porazdeljene se vsota spremeni v integral. Torej:

$$R = \int \mathrm{d}R = \frac{\zeta}{4\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{\zeta\,(r_2 - r_1)}{4\pi r_1 r_2}\,.$$

Potem je:

$$t = -\zeta\varepsilon_0\varepsilon \ln\frac{1}{2} = \; 370 \text{ s}\,.$$

31. Kondenzator s kapaciteto 25 μF, naelektrimo na napetost 60 V, nato pa praznimo preko upora. Po 10 ms je napetost na kondenzatorju 50 V. Kolikšen je upor?
(2194 Ω)

32. Ploščni kondenzator, ki ima plošči s ploščino 200 cm^2 v razmiku 1 mm, je priključen na napetost 1000 V. Nenadoma se druga plošča začne oddaljevati od prve plošče s konstantnim pospeškom 0.5 mm/s^2. Kolikšen električni tok teče skozi napetostni vir z zanemarljivo majhno notranjo upornostjo 3 s po začetku premikanja druge plošče?

33. Kondenzator s kapaciteto 1 μF priključimo preko upora za 200 Ω na baterijo z gonilno napetostjo 100 V in notranjo upornostjo 20 Ω. Koliko časa po priključitvi doseže energija kondenzatorja 25 % svoje končne vrednosti?

34. Valjasti kondenzator z dolžino 30 cm ima elektrodi s polmeroma 2 mm in 8 mm. Naelektrimo ga na napetost 5000 V, nato pa ga praznimo preko upora za 2000 Ω. Po kolikšnem času pade napetost na kondenzatorju na 1000 V?

35. Skozi upor z upornostjo 8 Ω steče v zelo dolgem času naboj 30 As. Koliko toplote se sprosti v uporniku, če pada tok eksponentno proti 0 tako, da se vsakih 24 s zmanjša za polovico?

    Rešitev:
    Količine označimo takole: naboj e = 30 As, upor $R = 8\Omega$, razpolovni čas $t_{1/2} = 24$ s. Ker tok skozi upor s časom pojema eksponentno, lahko časovno odvisnost toka $I(t)$ skozi upor zapišemo takole:

$$I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

    Pri tem sta I_0 in τ konstanti, ki ju bomo še določili. Časovno konstanto τ lahko izračunamo iz razpolovnega časa $t_{1/2}$:

$$\frac{I_0}{2} = I_0 \exp\left(-\frac{t_{1/2}}{\tau}\right), \quad \tau = \frac{t_{1/2}}{\ln(2)} = 34.6 \text{ s}.$$

    Začetni tok skozi kondenzator I_0 pa dolčimo takole. Spomnimo se definicije električnega toka:

$$I = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}, \quad e = \int I \mathrm{d}t.$$

    Ker se je naboj e pretočil v zelo dolgem času, meje zgornjega integrala postavimo takole:

$$e = I_0 \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \mathrm{d}t = -I_0 \tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\Big|_0^\infty = I_0 \tau.$$

Od tod pa dobimo:

$$I_0 = \frac{e}{\tau} = 0.87 \text{ A}.$$

Ker je tok skozi upor odvisen od časa, je tudi električna moč, ki se porablja na uporu odvisna od časa:

$$P(t) = I^2(t)R = \frac{e^2 R}{\tau^2} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right).$$

Toplota, ki se sprosti v uporu pa je integral te moči po času tok teče skozi upor:

$$Q = \int_0^\infty P(t)\mathrm{d}t = \frac{e^2 R}{\tau^2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) \mathrm{d}t = \tag{44}$$
$$= -\frac{e^2 R}{2\tau} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)\Bigg|_0^\infty = \frac{e^2 R}{2\tau} = 104 \text{ J}.$$

36. Skozi bakreno žico s površino preseka S = 3.14 mm^2 teče tok I = 1 A. Ocenite povprečno hitrost ($< v >$) s katero se elektroni gibljejo skozi žico! Gostota prostih nosilcev naboja n = 8×10^{28} m^{-3}.

    Rešitev:
    Gostota električnega pretoka skozi žico je enaka [2, 7]:

    $$j = \frac{I}{S} = n\mathrm{e}_0 < v >,$$

    kjer je e_0 osnovni naboj. Od tod pa sledi:

    $$< v > = \frac{I}{Sn\mathrm{e}_0} \approx 0.25 \times 10^{-4} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

37. V kovinski mreži pride na en atom kovine v povprečju en prost elektron. Skozi žico iz te kovine, katere presek je krog s premerom 1 mm, teče tok 1 A. Ocenite povprečno hitrost s katero se prosti elektroni gibljejo skozi žico? Molekulska masa kovine je 64 kg/kmol, gostota kovine je 9 g/cm^3.
    ($< v > \approx 9.43 \times 10^{-5}$ m/s)

38. Pri elektrolizi slane vode se v 5 urah (t) na negativni elektrodi izloči $m = 0.2$ g natrija. Kolikšen električni tok (I) teče po raztopini? Natrij je enovalenten, njegova molekulska masa pa je $M = 23$ kg/kmol.

Rešitev:
Pretočni naboj $e = I \cdot t = \mathrm{e}_0 N = \mathrm{e}_0 m/m_1 = \mathrm{e}_0 m N_A/M$, kjer je e_0 osnovni naboj, N število atomov natrija, m_1 masa enega atoma natrija in $\mathrm{N_A}$ Avogadrovo število. Iz zgornje enačbe sledi:

$$I = \frac{\mathrm{e}_0 m \mathrm{N_A}}{Mt}\,.$$

39. Pri elektrolizi modre galice (to je vodna raztopina bakrovega sulfata $CuSO_4$) se v 4 urah na negativni elektrodi izloči 17 gramov bakra. Kolikšen električni tok teče po raztopini? Baker je dvovalenten (bakrov ion ima 2 osnovna naboja), njegova atomska masa je 63.5 kg/katom.

40. Po toplotno izolirani bakreni žici s presekom $S = 1$ mm^2 pošljemo tok $I = 10$ A, ki teče samo kratek čas $t = 1$ s. Za koliko stopinj se žica segreje? Gostota bakra $\rho = 8.9 \times 10^3$ kg/m^3, specifična toplota bakra $c_p = 3.78 \times 10^2$ J/kgK, specifična upornost bakra $\zeta = 1.7 \times 10^{-8}$ Ωm.

Rešitev:
Oddani Joulov toplotni tok $P = RI^2$ se v celoti porabi za segrevanje žice:

$$I^2 R t = c_p m \Delta T\,, \tag{45}$$

kjer je upor:

$$R = \frac{\zeta l}{S}\,, \tag{46}$$

l dolžina žice, m pa masa žice. V enačbo (45) vstavimo izraz (46) in izrazimo spremembo temperature žice ΔT:

$$\Delta T = \frac{I^2 \zeta l t S}{S c_p m S}\,. \tag{47}$$

Ob upoštevanju $\rho = m/(lS)$ iz enačbe (47) sledi:

$$\Delta T = \frac{I^2 \zeta t}{S^2 c_p \rho} = \ 0.5\ \mathrm{K}\,. \tag{48}$$

41. Če potopimo plošči s površino 5 cm^2 v raztopino KCl 2.5 cm narazen in vzpostavimo med ploščama napetost 50 V, teče tok 1.2 mA. Kolikšna je specifična prevodnost elektrolita?
(1.2 $\times$ 10^{-3} $\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$)

    Namig za reševanje:
    Nosilci naboja v eletrolitu so ioni K^+ in Cl^- (KCl namreč v vodi disociira). Vendar, če nas zanima samo specifična prevodnost, ne potrebujemo mikroskopske slike. Elektrolit obravnavamo kot "navaden" upornik. Upornost elektrolita je napetost med ploščama deljena s tokom, ki teče skozi elektrolit. Iz tega lahko izračunamo specifično upornost elektrolita, saj poznamo njegov presek in dolžino. Specifična prevodnost pa je obratna vrednost specifične upornosti.

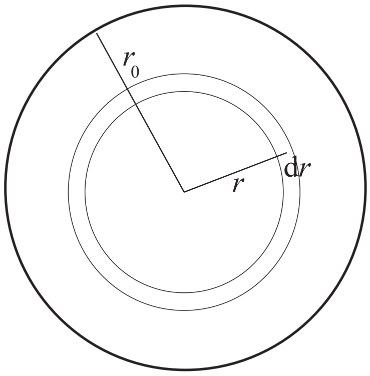
42. Skozi upor z upornostjo 10 Ω, ki je potopljen v 1 dm^3 vode, v 1.5 ure enakomerno steče naboj 10^4 As. Za koliko stopinj se v prvih 10 minutah po vklopu segreje voda, če izgube toplote v okolico lahko zanemarimo?
(4.9 K)

43. Skozi toplotno izolirano cev se pretoči vsako sekundo pol litra vode. Izračunajte, za koliko se segreje voda v cevi, če je vanjo vgrajen grelec z upornostjo 10 Ω, ki je priključen na istosmerno napetost 220 V. Izkoristek grelca je 80%.
(2.3 K)

44. Kolikšen električni tok I_0 sme največ teči po bakreni žici s polmerom $r_0 = 2.5$ mm, če temperatura v sredini žice ne sme preseči $T_1 = 80$ ^{o}C? Na površini žice je temperatura $T_2 = 10$ ^{o}C. Specifična upornost bakra je $\zeta = 1.7 \cdot 10^{-8}$ Ωm, toplotna prevodnost bakra je $\lambda = 380$ W/mK.

    Rešitev:

Če naj bo temperatura na geometrijski osi žice konstantna, mora vsa električna moč, ki se porabi v prerzu žice znotraj polmera r odteči v obliki toplotnega toka na površino žice v radialni smeri (glejte sliko 9) Označimo gostoto električnega



Slika 9:

toka po žici j, električni tok, ki ga iščemo, je potem $I_0 = j\pi r_0^2$. Znotraj prereza s polmerom r pa k električni moči prispeva delež električnega toka, ki je v sorazmerju s ploščino prereza, torej $I(r) = j\pi r^2$. Električna moč P_E, ki se porablja je torej:

$$P = I^2(r)R = j^2\pi^2 r^4 \frac{\zeta l}{\pi r^2} = j^2\pi r^2 \zeta l.$$

Pri tem je l dolžina žice. Ustvarjena električna moč odteče v obliki toplotnega toka P_Q skozi tanko plast prereza z debelino dr:

$$P_Q = -\lambda 2\pi r l \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}.$$

Izenačimo električno moč in toplotni tok:

$$j^2\pi r^2 \zeta l = -\lambda 2\pi r l \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}.$$

Ločimo spremenljivki

$$-\mathrm{d}T = \frac{j^2\zeta}{2\lambda} r \mathrm{d}r,$$

nato pa integriramo:

$$-\int_{T_1}^{T_2} \mathrm{d}T = \frac{j^2\zeta}{2\lambda}\int_0^{r_0} r\mathrm{d}r,$$

$$T_1 - T_2 = \frac{j^2\zeta r_0^2}{4\lambda},$$

$$j = \sqrt{\frac{4\lambda(T_1 - T_2)}{\zeta r_0^2}},$$

$$I_0 = j\pi r_0^2 = \pi r_0\sqrt{\frac{4\lambda(T_1 - T_2)}{\zeta}} = 19649\ \mathrm{A}.$$

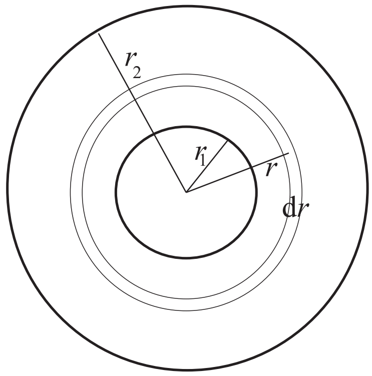
45. Valjasti kondenzator ima koaksialni elektrodi s pomeroma r_1 in r_2, med elektrodama pa je izolator s specifično upornostjo $\zeta = 2{\cdot}10^7\ \Omega\mathrm{m}$ in toplotno prevodnostjo $\lambda = 0.5$ W/mK. Kondenzator je priključen na napetost $U = 5000$ V. Kolikšna je temperatura notranje elektrode T_1, če je temperatura zunanje elektrode $T_2 = 15\ ^o$C?

Rešitev:
Zaradi "puščanja"izolacije med elektrodama, med njima teče električni tok. Zaradi tega pa se v ozolatorju porablja električna moč. Če naj bosta temperaturi notranje in zunanje elektrode konstantni, mora vsa porabljena električna moč odteči v obliki toplotnega toka radialno navzven proti zunanji elektrodi in od tam v okolico kondenzatorja. Električni tok, ki teče med elektrodama je

$$I = \frac{U}{R},$$

kjer je R upornost izolatorja. Ta izolator je sestavljen iz diferencialno tankih koncentričnih plasti debeline dr, od katerih vsaka k skupni upornosti prispeva diferencialni prispevek

$$\mathrm{d}R = \frac{\zeta \mathrm{d}r}{2\pi r l}.$$



Slika 10:

Pri tem je l dolžina elektrod kondenzatorja, r pa polmer izbrane plasti debeline dr. Glejte sliko 10. Te plasti so zaporedno vezani upori. Skupni upor dobimo torej s seštevanjem teh diferencialno majhnih prispevkov - to pomeni z integracijo po r.

$$R = \frac{\zeta}{2\pi l}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\zeta}{2\pi l}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

Električni tok skozi izolator je torej

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U 2\pi l}{\zeta \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}.$$

Električni tok I teče skozi katerokoli plast izolatorja med elektrodama, pri računanju električne moči pa je potrebno upoštevati, da se je do razdalje r od osi kondenzatorja porabila moč, ki ustreza uporu plasti tiste debeline. To pomeni, da je pri računanju upora s predzadnjo enačbo potrebno zgornjo integracijsko mejo postaviti na r, ki je med r_1 in r_2. Za upornost dobimo torej

$$R(r) = \frac{\zeta}{2\pi l}\ln\left(\frac{r}{r_1}\right).$$

Električna moč, ki se porabi v tej plasti pa je

$$P = I^2 R = \left(\frac{U 2\pi l}{\zeta \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \right)^2 \frac{\zeta}{2\pi l} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right).$$

Ta električna moč je enaka toplotnemu toku, ki odteče skozi plast debeline $\mathrm{d}r$:

$$\frac{U^2 2\pi l}{\zeta \ln^2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) = -\lambda 2\pi r l \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}.$$

Ločimo spremenljivki:

$$-\mathrm{d}T = \frac{U^2}{\zeta\lambda \ln^2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \frac{\mathrm{d}r}{r},$$

nato pa integriramo:

$$-\int_{T_1}^{T_2} \mathrm{d}T = \frac{U^2}{\zeta\lambda \ln^2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \int_{r_1}^{r_2} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \frac{\mathrm{d}r}{r}.$$

Integrala na desni se lahko lotimo na primer z uvedbo novih spremenljivk $x = \frac{r}{r_1}$ in $\ln x = y$. Integral potem dobi takšno obliko:

$$\int \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \frac{\mathrm{d}r r_1}{r r_1} = \int \ln(x) \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int y \mathrm{d}y = \frac{y^2}{2}.$$

oziroma

$$T_1 - T_2 = \frac{U^2}{\zeta\lambda \ln^2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

in

$$T_1 = T_2 + \frac{U^2}{2\zeta\lambda} = 16.25\,^\circ\mathrm{C}.$$

46. Notranjo upornost in gonilno napetost baterije določimo tako, da nanjo priključimo prvič upor 1 Ω, drugič pa upor 2 Ω. V prvem primeru je tok 3 A, v drugem pa 2 A. Kolikšna je notranja upornost in kolikšna gonilna napetost baterije? $(1\Omega, 6\mathrm{V})$

47. Na 5 zaporedno vezanih baterij, vsaka ima gonilno napetost 2 V in notranjo upornost 1 Ω, vežemo upor 5 Ω. Kolišen tok teče skozi ta upor?
(1 A)

48. Na generator enosmerne napetosti z notranjo upornostjo 5 Ω priključimo dva enaka upora. Če ju zvežemo zaporedno, se na obeh skupaj porablja moč 7.90 W, če pa ju zvežemo vzporedno, se na obeh skupaj porablja moč 17.78 W. Kolikšna je gonilna napetost generatorja in kolikšna je upornost vsakega izmed uporov?
(20 V, 20 Ω)

Namig za reševanje:

$$\begin{array}{rcl} R_\mathrm{n} & = & 5\,\Omega \\ P_1 & = & 7.9\,\mathrm{W} \\ P_2 & = & 17.78\,\mathrm{W} \\ \hline \end{array}$$

$R =?$
$U_\mathrm{g} =?$

Za obe vezji izrazimo moč, ki se porablja na obeh uporih, kot funkcijo gonilne napetosti in upornosti. Dobimo:

$$P_1 = \frac{2\,R\,U_\mathrm{g}^2}{(R_\mathrm{n} + 2R)^2}$$

in

$$P_2 = \frac{R\,U_\mathrm{g}^2}{2(R_\mathrm{n} + R/2)^2}$$

Izrazimo in izenačimo napetosti, da dobimo izraz za R. Nato izračunamo še U_g.

49. Na baterijo priključimo upor, ki ima upornost 18 Ω. Na njem se porablja moč 4.5 W. Nato ga zamenjamo z drugim, ki ima upornost 21 Ω. Na njem se porablja moč 3.97 W. Kolikšna sta gonilna napetost in notranja upornost baterije?
10 V, 2 Ω

50. Upora z upornostima 100 Ω in 200 Ω priključimo na baterijo z gonilno napetostjo 20 V in zanemarljivo majhnim notranjim

uporom prvič zaporedno in drugič vzporedno. Kolikšna moč se troši na uporu za 100 Ω v prvem in kolikšna v drugem primeru?

51. Ko na neko baterijo priključimo upor z upornostjo 25 Ω, se na njem porablja moč 25 W. Ko pa nanjo priključimo upor z upornostjo 18 Ω, se na njem porablja moč 30.6 W. Kolikšni sta notranja upornost in gonilna napetost baterije?

52. Kondenzator s kapaciteto 3 μF in upor z upornostjo 2 MΩ zvežemo zaporedno in priključimo na napetost 3000 V. Za koliko stopinj se upor segreje v prvih 4 s po priključitvi na napetost, če je popolnoma toplotno izoliran? Masa upora je 200 g, specifična toplota pa 180 J/kgK.

53. Električni grelec z močjo 300 W je priključen na napetost 220 V. Kolikšen električni tok teče skozi grelec? V kolikšnem času se na grelcu segreje 400 g vode za 20°C? Specifična toplota vode je 4200 J/kgK. Predpostavite, da se vsa električna moč porabi za gretje vode!

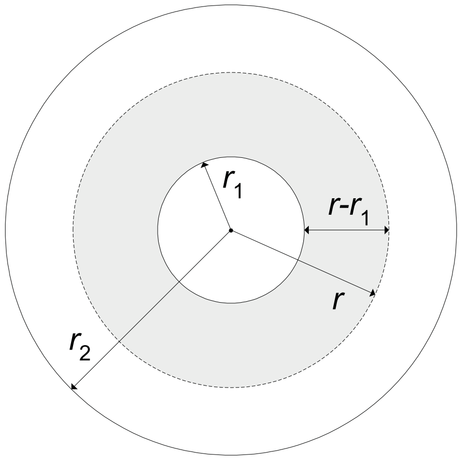
54. Krogelni kondenzator ima prostor med elektrodama popolnoma izpolnjen z izolatorjem, ki ima specifično upornost $\zeta = 10^9$ Ωm in toplotno prevodnost $\lambda = 0.5$ W/mK, priključen pa je na napetost $U = 80000$ V. Kolikšna je razlika med temperaturo notranje elektrode (T_1) in temperaturo zunanje elektrode (T_2)?

    Rešitev:
    Zaradi "puščnja"električne izolacije med elektrodama, teče skozi kondenzator električni tok. Zato se v izolatorju porablja električna moč P_e. Ob privzetku, da je temperatura notranje elektrode konstantna, velja, da vsa sproščena električna moč odteče v obliki toplotnega toka P_t. Torej

$$P_e = P_t \,,$$

$$I^2 R(r) = -\lambda 4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \,. \tag{49}$$

Pri tem je I električni tok, ki teče skozi izolator, $R(r)$ je upornost izolatorja krogelne lupine debeline $(r - r_1)$, skozi katero odteče toplotni tok (glejte sliko 11). Električni tok



Slika 11:

skozi izolator je:

$$I = \frac{U}{R(r_2)} = \frac{U 4\pi r_2 r_1}{\zeta(r_2 - r_1)}\,.$$

Pri tem sta r_1 in r_2 polmera notranje in zunanje elektrode kondenzatorja. Upornost izolatorja kot funkcija r je:

$$R(r) = \int_{r_1}^{r} \frac{\zeta\,\mathrm{d}r}{4\pi r^2} = \frac{\zeta(r - r_1)}{4\pi r r_1}\,.$$

Enačba (49) potem preide v:

$$\frac{U^2 r_1 r_2^2 (r - r_1)}{\zeta(r_2 - r_1)^2 r} = -\lambda r^2 \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\,.$$

Ločimo spremenljivki in integriramo:

$$\int_{T_1}^{T_2} \mathrm{d}T = -\frac{U^2 r_1 r_2^2}{\zeta\lambda(r_2 - r_1)^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r - r_1}{r^3}\,\mathrm{d}r,$$

$$T_1 - T_2 = \frac{U^2}{2\lambda\,\zeta} = 6.4\ {}^o\mathrm{K}\,.$$

55. Kondenzatorja s kapacitetama $C_1 = 1.5\ \mu$F in $C_2 = 1\mu$F sta priključena na generatorja z enakima napetostima $U_0 = 50$ V (slika 12). Ob času $t = 0$ se obe stikali hkrati odpreta. Induktivnost tuljave je $L = 2 \cdot 10^{-4}$ H (slika 12). Kolikšen električni tok I teče skozi tuljavo ob času $t = 10^{-5}$ s po preklopu stikal? Upor žic v vezju zanemarimo.

Rešitev:
Iz Kirchoffovega izreka, da je vsota napetosti v zaključenem krogu enaka 0, dobimo tri enačbe, od katerih pa sta le dve med seboj neodvisni. Prvi krog tvorita kondenzator C_1 in kondenzator C_2:

$$U(C_1) + U(C_2) = 0\,,$$

drugi krog kondenzator C_1 in tuljava:

$$U(C_1) + L\dot{I} = 0\,,$$

tretji krog pa kondenzator C_2 in tuljava

$$U(C_2) + L\dot{I} = 0\,.$$

Zadnje enačba seveda sledi iz prvih dveh, kajti napetosti na obeh kondenzatorjih sta ves čas enaki. Zgornje enačbe zapišemo takole:

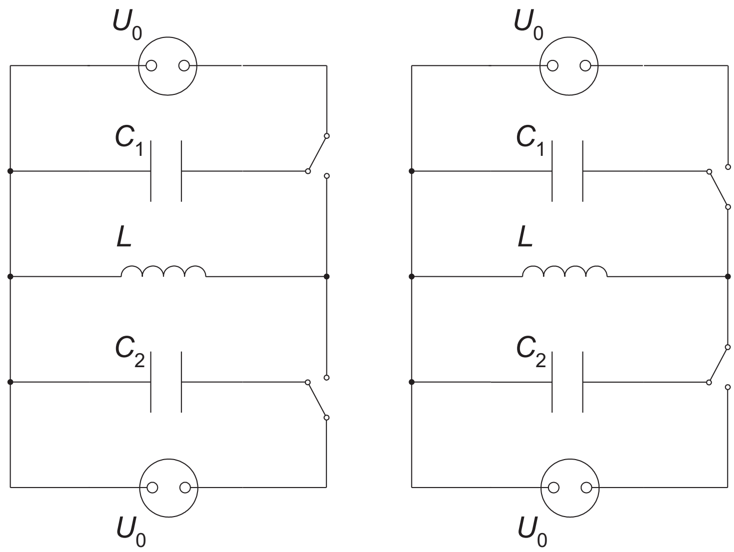
$$\frac{e_1}{C_1} - \frac{e_2}{C_2} = 0\,, \tag{50}$$

$$\frac{e_1}{C_1} - L\dot{I} = 0\,. \tag{51}$$

Simbol $\dot{I}$ pomeni odvajanje toka I po času t. Zaradi ohranitve naboja pa velja, da naboj, ki odteka z obeh kondenzatorjev, steče skozi tuljavo, kot električni tok. Torej:

$$-\dot{e_1} - \dot{e_2} = I\,. \tag{52}$$

Enačbe (50) - (52) predstavljajo sistem treh diferencialnih enačb s tremi neznanimi funkcijami časa: naboj na kondenzatorju 1, $e_1(t)$, naboj na kondenzatorju 2, $e_2(t)$, in tok skozi



Slika 12:

tuljavo $I(t)$. Potrebno je definirati še začetne pogoje. Ob času $t = 0$ je:

$$e_1(t=0) = C_1 U_0\,, \quad e_2(t=0) = C_2 U_0\,, \quad I(t=0) = 0\,. \tag{53}$$

Enačbo (51) odvajamo po času:

$$\frac{\dot{e}_1}{C_1} = L\ddot{I}\,. \tag{54}$$

Prav tako odvajamo po času enačbo (50):

$$\frac{\dot{e}_1}{C_1} = \frac{\dot{e}_2}{C_2}\,. \tag{55}$$

Iz enačbe (55) izrazimo $\dot{e}_1$ in vstavimo v enačbo (52) ter dobimo

$$\dot{e}_1 = -I\,\frac{C_1}{C_1 + C_2}\,. \tag{56}$$

Enačbo (56) vstavimo v enačbo (54) in dobimo

$$\ddot{I} + \frac{1}{L(C_1 + C_2)}\,I = 0\,. \tag{57}$$

Takšne diferencialne enačbe smo spoznali že pri nihanju. Rešitev je:

$$I_1 = I_0 \sin(\omega_0 t)\,, \tag{58}$$

kjer je:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}} = \ 44721.4 \ \mathrm{s}^{-1}\,. \tag{59}$$

Amplitudo toka I_0 določimo iz začetnih pogojev (53) in enačbe (51):

$$\dot{I}(t=0) = I_0\omega_0 = \frac{e_1(t=0)}{LC_1} = \frac{U_0}{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ I_0 = \frac{U_0}{L\omega_0} = U_0\sqrt{\frac{C_1 + C_2}{L}} = \ 5.59 \ \mathrm{A}\,.$$

Torej

$$I = U_0\sqrt{\frac{C_1 + C_2}{L}}\, \sin(\omega_0 t)\,. \tag{60}$$

Iz enačb (50)-(52) in enačbe (60) hitro poiščemo še naboja na obeh kondenzatorjih kot funkciji časa:

$$e_1 = LC_1\dot{I} = U_0 C_1 \cos(\omega_0 t)\,, \tag{61}$$

$$e_2 = e_1\frac{C_2}{C_1} = U_0 C_2 \cos(\omega_0 t)\,. \tag{62}$$

Iz rešitve (60) poiščemo še odgovor na vprašanje iz naloge: 10^{-5} s po priključitvi teče skozi tuljavo tok 2.42 A.

Iz dobljenih rezultatov se vidi, da bi lahko nalogo reševali tudi na mnogo bolj preprost način. Ker sta namreč začetni napetosti na obeh kondenzatorjih enaki, bi lahko kondenzatorja C_1 in C_2 nadomestili z enim samim kondenzatorjem s kapaciteto $C = C_1 + C_2$ ter potem nalogo reševali kot pri običajnem idealnem nihajnem krogu. Če bi nas zanimala trenutna vrednost naboja na enem od kondenzatorjev, bi pač morali razdeliti trenutni skupni naboj na "nadomestnem" kondenzatorju C v razmerju kapacitet.

Stvar pa se bolj zaplete, če začetni napetosti na obeh kondenzatorjih nista enaki. Recimo, da je v začetku na kondenzatorju C_1 napetost U_1 in na kondenzatorju C_2 napetost U_2.

Kirchoffovi izreki in zahteva po ohranitvi naboja ostanejo v veljavi, zato še vedno velja:

$$\frac{e_1}{C_1} - \frac{e_2}{C_2} = 0\,, \tag{63}$$

$$\frac{e_1}{C_1} - L\dot{I} = 0\,, \tag{64}$$

$$-\dot{e_1} - \dot{e_2} = I\,. \tag{65}$$

Spremenijo pa se začetni pogoji, ki so sedaj:

$$e_1(t=0) = C_1U_1\,,\ \ e_2(t=0) = C_2U_2\,,\ \ I(t=0) = 0\,. \tag{66}$$

Vidimo, da je sedaj enačba (63) v protislovju z začetnim pogojem (66). V vezju se zgodi naslednje. Takoj po preklopu stikal pride do prehodnega pojava, med katerim se napetosti na obeh kondenzatorjih izenačita in dosežeta vrednost U:

$$U = \frac{C_1U_1 + C_2U_2}{C_1 + C_2}\,. \tag{67}$$

Med prehodnim pojavom se namreč tisti kondenzator, na katerem je večja začetna napetost, prazni, drugi kondenzator pa se polni, dokler se napetosti ne izenačita. Po izteku prehodnega pojava pa dobimo v nihajnem krogu že poznano nihanje toka in napetosti, le da sta amplitudi nihanja nabojev na obeh kondenzatorjih in toka skozi tuljavo nekoliko drugačni. Iz enačb (60)-(62) ter (67) lahko rešitve za $e_1(t)$, $e_2(t)$ ter $I(t)$ kar uganemo:

$$\begin{aligned} I = U\sqrt{\frac{C_1+C_2}{L}}\,\sin(\omega_0 t) &= \frac{C_1U_1 + C_2U_2}{\sqrt{L(C_1+C_2)}}\,\sin(\omega_0 t) = \\ &= (C_1U_1 + C_2U_2)\,\omega_0 \sin(\omega_0 t)\,. \end{aligned} \tag{68}$$

$$e_1 = LC_1\dot{I} = \frac{C_1}{C_1+C_2}\,(C_1U_1 + C_2U_2)\cos(\omega_0 t)\,, \tag{69}$$

$$e_2 = e_1\,\frac{C_2}{C_1} = \frac{C_2}{C_1+C_2}\,(C_1U_1 + C_2U_2)\cos(\omega_0 t)\,. \tag{70}$$

Če je v začetku eden od obeh kondenzatorjev prazen (na primer $U_2 = 0$), so začetni pogoji takšni:

$$e_1(t=0) = C_1 U_1\,, \quad e_2(t=0) = 0\,, \quad I(t=0) = 0\,, \tag{71}$$

napetost na kondenzatorjih po izteku prehodnega pojava je:

$$U = \frac{C_1 U_1}{C_1 + C_2}\,, \tag{72}$$

tok skozi tuljavo in naboja na obeh kondenzatorjih pa po izteku prehodnega pojava nihajo sinusno:

$$I = U\sqrt{\frac{C_1 + C_2}{L}}\sin(\omega_0 t) = \frac{C_1 U_1}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}}\sin(\omega_0 t) = \tag{73}$$
$$= C_1 U_1 \omega_0 \sin(\omega_0 t)\,.$$

$$e_1 = \frac{C_1^2 U_1}{C_1 + C_2}\cos(\omega_0 t)\,, \tag{74}$$

$$e_2 = \frac{C_1 C_2 U_1}{C_1 + C_2}\cos(\omega_0 t)\,. \tag{75}$$

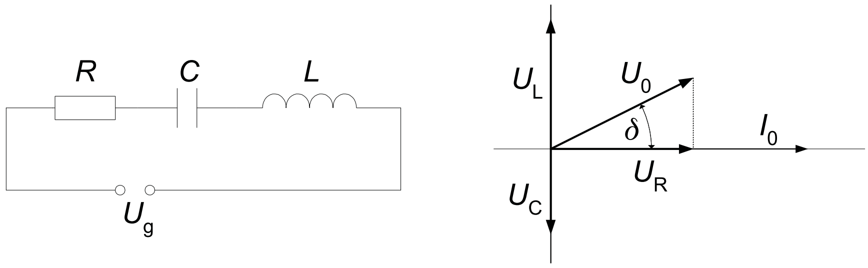
Če bi želeli analizirati prehodni pojav, do katerega pride, kadar $U_1 \neq U_2$, se moramo sistema enačb (63) do (65) z začetnimi pogoji (66) lotiti numerično.

56. V vezju z zaporedno vezanim uporom, kondenzatorjem in tuljavo teče efektivni tok 300 mA (I_{ef}) in se troši povprečna moč $\overline{P} = 3$ mW. Tok zaostaja za napetostjo za $\delta = 30^{\circ}$. Kolikšna je upornost ohmskega upora v tem vezju?
(R=0.0333Ω)

57. V vezju z zaporedno vezanim uporom, kondenzatorjem in tuljavo (slika 13) teče efektivni tok 300 mA in se troši povprečna moč 3 mW. Tok zaostaja za napetostjo za 30°. Kolikšna je impendanca vezja?

Rešitev:
a)

$$\overline{P} = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos\delta = \frac{1}{2} I_0 R I_0 = \frac{1}{2} R I_0^2 = R I_{\mathrm{ef}}^2\,,$$



Slika 13:

kjer je $I_{\rm ef} = I_0/\sqrt{2}$. Torej:

$$R = \overline{P}/I_{\rm ef}^2 = \ 0.0333\ \Omega.$$

b)

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \implies (\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R \operatorname{tg}\delta = \ 0.0192\ \Omega,$$

c)

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = \ 0.0385\ \Omega\,.$$

58. Nihajni krog je sestavljen iz tuljave z induktivnostjo 1 mH in kondenzatorja s kapaciteto 0.1 μF. V njem vzbudimo nihanje z energijo 10^{-5} J. Izračunajte amplitudo električnega toka in amplitudo napetosti pri tem nihanju ter lastno frekvenco nihajnega kroga! Izračunajte tudi efektivni vrednosti toka in napetosti!

59. Upor z upornostjo 20 Ω, kondenzator s kapaciteto 2 μF in tuljavo z induktivnostjo 1 mH zvežemo zaporedno in priključimo na generator sinusne izmenične napetosti s frekvenco 3558.81 Hz in amplitudo 8 V. Kolikšna povprečna moč se porablja na uporu?

60. Trije porabniki in sicer upor za 100 Ω, kondenzator s kapaciteto 1 μF in tuljava z induktivnostjo 2 mH so zvezani zaporedno in priključeni na izvir izmenične napetosti s frekvenco 5 kHz. Za koliko odstotkov se spremeni efektivni tok skozi porabnike, če se induktivnost tuljave poveča za 1 odstotek?

61. Upor z upornostjo 100 Ω in kondenzator sta zvezana zaporedno in priključena na generator sinusne izmenične napetosti s frekvenco 500 Hz. Po vezju teče efektivni tok 0.7 A. Če upor nadomestimo z 90 ohmskim uporom, teče po vezju efektivni tok 0.78 A. Kolikšna je kapaciteta kondenzatorja in kolikšna je efektivna vrednost gonilne napetosti generatorja?

62. Vezje z zaporedno vezanim uporom R = 50 Ω in kondenzatorjem kapacitete C = 100 μF je priključeno na mestno omrežje ($U_{\rm ef} = 220V, \nu = 50{\rm Hz}$). Kolikšna je amplituda toka (I_0), ki teče skozi vezje?

Rešitev:

$$U_{\rm ef} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}\,,$$

$$U_0 = \left(R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}\right)^{1/2} I_0,$$

$$I_0 = \frac{U_{\rm ef}\sqrt{2}}{(R^2 + 1/(\omega C)^2)^{1/2}} = \ 5.25 \text{ A}\,.$$

63. Kondenzator s kapaciteto 1 μF in upornik za 1 MΩ sta zvezana zaporedno in priključena na generator enosmerne napetosti. Na začetku je napetost na generatorju enaka nič, potem pa začne naraščati linearno v odvisnosti od časa tako, da se vsako sekundo poveča za 10 V. Kolikšna je napetost na kondenzatorju in kolikšna je napetost na uporu 0.8 s po začetku naraščanja napetosti na generatorju?

64. Upor za R_1 = 100 Ω in kondenzator sta zvezana zaporedno ter priključena na generator sinusne izmenične napetosti s frekvenco ν = 50 Hz. Po vezju teče efektivni tok I_1 = 0.12 A. Če upornik nadomestimo z drugim, za 80 Ω, teče po vezju efektivni tok I_2 = 0.13 A. Kolikšni sta efektivna napetost generatorja ($U_{\rm ef}$) in kapaciteta kondenzatorja (C)?

Rešitev:

Velja [2, 7]:

$$I_1 = \frac{U_{\rm ef}}{\sqrt{R_1^2 + 1/\omega^2 C^2}}\,, \tag{76}$$

in

$$I_2 = \frac{U_{\rm ef}}{\sqrt{R_2^2 + 1/\omega^2 C^2}}\,, \tag{77}$$

kjer je $\omega = 2\pi\nu$. Enačbi (76) in (77) vsako posebej kvadriramo in nato med sabo delimo. Po krajšem računu nato dobimo:

$$C = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{(I_1/I_2)^2 - 1}{R_2^2 - (I_1/I_2)^2 R_1^2}} = \ 2.7 \times 10^{-5}\ \frac{\rm As}{\rm V}\,. \tag{78}$$

Iz enačbe (76) pa sledi:

$$U_{\rm ef} = I_1\sqrt{R_1^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \ 18.72\ {\rm V}\,. \tag{79}$$

65. Upor za 100 Ω in tuljava sta zvezana zaporedno ter priključena na generator sinusne izmenične napetosti z efektivno vrednostjo 20 V in frekvenco 50 Hz. Po vezju teče efektivni tok 0.12 A. Če upor nadomestimo z drugim, za 80 Ω, teče po vezju efektivni tok 0.13 A. Kolikšni sta ohmska upornost in induktivnost te neidealne tuljave?

66. Upor z upornostjo 1000 Ω in kondenzator s kapaciteto 1 μF sta zvezana vzporedno in priključena na generator sinusne izmenične napetosti s frekvenco 700 Hz in zanemarljivo notranjo upornostjo. Skozi kondenzator teče efektivni tok 0.8 A. Nato v vezje dodamo še en upor za 800 Ω tako, da sta sedaj zaporedno vezana upora zvezana vzporedno s kondenzatorjem. Kolikšen efektivni tok sedaj teče skozi kondenzator?

67. Trije porabniki in sicer upor za 100 Ω, kondenzator s kapaciteto 1 μF in tuljava z induktivnostjo 2 mH so zvezani zaporedno in priključeni na izvir sinusne izmenične napetosti s frekvenco 5 kHz. Za koliko odstotkov se spremeni skupni efektivni tok skozi porabnike, če se upornost upora poveča za 1 Ω?

68. Upor z upornostjo 100 Ω in tuljava z induktivnostjo 1 mH sta zvezana zaporedno in priključena na generator sinusne izmenične napetosti s frekvenco 500 Hz in zanemarljivo majhno notranjo upornostjo. Po vezju teče efektivni tok 0.7 A. Nato v vezje dodamo še en upor za 90 Ω tako, da sta sedaj vzporedno vezana upora zvezana zaporedno s tuljavo. Kolikšen efektivni tok sedaj teče skozi tuljavo?

1.3 Magnetno polje

69. Proton z maso $m = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg in enim osnovnim nabojem e_0 vstopi s hitrostjo $v = 8000$ m/s v homogeno magnetno polje z gostoto $B = 0.002$ T. Ob vstopu v magnetno polje vektor hitrosti protona oklepa z magnetnim poljem kot $\varphi = 38^o$. Kolikšen je hod vijačnega tira (h), po katerem se giblje proton, kolikšen je Larmorjev radij r_L njegovega tira in kolikšna je ciklotronska krožna frekvenca ω_c, s katero kroži?

Rešitev:
Najprej postavimo koordinatni sistem tako, da ima magnetno polje smer osi z, vektor hitrosti protona pa ob vstopu v polje leži v ravnini xz. Magnetno polje po komponentah zapišemo $\vec{B} = (0, 0, B)$, začetno hitrost protona pa $\vec{v} = (v\sin(\varphi), 0, v\cos(\varphi))$. Lorentzovo silo, ki deluje na proton,

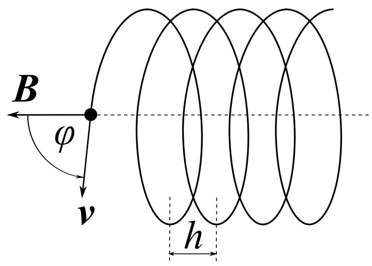
$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = e_0(\vec{v} \times \vec{B}),$$

zapišemo po komponentah takole:

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = e_0 v_y B, \tag{80}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -e_0 v_x B, \tag{81}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{82}$$



Slika 14:

Z integracijo enačbe (82) po času dobimo, da je komponenta hitrosti v_z konstantna. Seveda mora biti enaka začetni vrednosti ob vstopu v magnetno polje, torej:

$$v_z = v\cos(\varphi). \tag{83}$$

Enačbo (80) odvajamo enkrat po času

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{e_0 B}{m}\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \omega_c \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}. \tag{84}$$

Uvedli smo ciklotronsko krožno frekvenco protona:

$$\omega_c = \frac{e_0 B}{m}.$$

Iz podatkov hitro izračunamo, da je $\omega_c = 191617\ \mathrm{s}^{-1}$.

S kombinacijo izrazov (81) in (84) dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_c^2 v_x = 0. \tag{85}$$

Nato enkrat odvajamo po času enačbo (81):

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_y}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_c \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}. \tag{86}$$

S kombinacijo izrazov (80) in (86) pa dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_y}{\mathrm{d}t^2} + \omega_c^2 v_y = 0. \tag{87}$$

Splošni rešitvi enačb (86) in (87) sta:

$$v_x = A\sin(\omega_c t) + B\cos(\omega_c t), \tag{88}$$

$$v_y = C\sin(\omega_c t) + D\cos(\omega_c t). \tag{89}$$

Konstante A, B, C in D določimo iz začetnih pogojev

$$v_x(0) = v\sin(\varphi), v_y(0) = 0,$$

ter zvez (80) in (81):

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \omega_c v_y,\ \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\omega_c v_x.$$

Hitro izračunamo, da mora biti $A = D = 0$ in $B = -C = v\sin(\varphi)$. Torej

$$v_x = v\sin(\varphi)\cos(\omega_c t),\ v_y = -v\sin(\varphi)\sin(\omega_c t). \tag{90}$$

Hod vijačnice h je pot, ki jo proton prepotuje v smeri vzdolž magnetnega polja, torej v smeri osi z, v času enega ciklotronskega obhoda, torej:

$$h = v_z\frac{2\pi}{\omega_c} = v\cos(\varphi)\frac{2\pi}{\omega_c} = 0.21 \text{ m}.$$

Ko hitrosti (90) integriramo po času, dobimo:

$$x = \frac{v\sin(\varphi)}{\omega_c}\sin(\omega_c t) = r_L\sin(\omega_c t),$$

$$y = \frac{v\sin(\varphi)}{\omega_c}\cos(\omega_c t) = r_L\cos(\omega_c t).$$

Larmorjev radij r_L je torej določen s komponento hitrosti delca, ki je pravokotna na magnetno polje. Iz podatkov lahko izračunamo, da je $r_L = 0.026$ m.

70. Ion tritija (radioaktivni izotop vodika, ki ima poleg protona še 2 nevtrona) z maso $5.007{\cdot}10^{-27}$ kg in enim pozitivnim osnovnim nabojem $1.6{\cdot}10^{-19}$ As leti po premici s konstantno hitrostjo 8000 m/s. Nenadoma prileti v območje, kjer obstajata

homogeno električno polje z jakostjo 0.05 V/m ter homogeno magnetno polje z gostoto 0.2 T. Polji med seboj oklepata kot 80^o, delec pa se v začetku giblje po premici, ki je pravokotna na ravnino obeh polj. Kolikšna je hitrost delca 0.016 s po vstopu v območje obeh polj?

Rešitev:
Označimo električno polje $E = 0.05$ V/m, magnetno polje $B = 0.2$ T, začetna hitrost iona $v_0 = 80$ m/s, čas $T = 1.6{\cdot}10^{-7}$ s, masa tritija $m = 5.007{\cdot}10^{-27}$ kg, $e_0 = 1.6{\cdot}10^{-19}$ As ter kot med električnim in magnetnim poljem $\alpha = 80^o$. V območju obeh polj gibanje delca določa 2. Newtonov zakon, sila, ki deluje na ion tritija pa je Lorentzova:

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = e_0\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right).$$

Koordinatni sistem postavimo tako, da ima magnetno polje smer osi z, $\vec{B} = (0, 0, B)$. Koordinatni sistem nato zavrtimo okoli osi z tako, da električo polje spravimo v ravnino xz, torej $\vec{E} = (E\sin(\alpha), 0, E\cos(\alpha))$, začetna hitrost delca pa ima smer osi y: $\vec{v}_0 = (0, v_0, 0)$ - glejte sliko 15. Zgornjo vektorsko enačbo potem po komponentah zapišemo takole:

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = e_0E\sin(\alpha) + e_0v_yB, \tag{91}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -e_0v_xB, \tag{92}$$

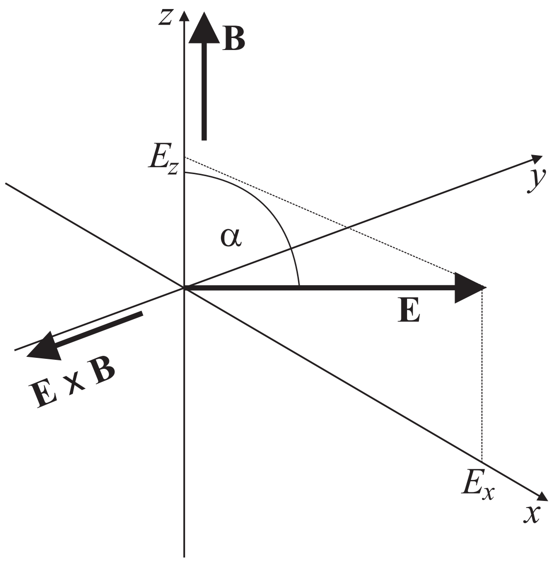
$$m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = e_0E\cos(\alpha). \tag{93}$$

Enačbo (91) odvajamo po času:

$$\frac{\mathrm{d}^2v_x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{e_0B}{m}\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t},$$

in dobljeni rezultat vstavimo v enačbo (92):

$$\frac{m^2}{e_0B}\frac{\mathrm{d}^2v_x}{\mathrm{d}t^2} = -e_0v_xB,$$



Slika 15:

oziroma po preureditvi:

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_c^2 v_x = 0. \tag{94}$$

Vpeljali smo ciklotronsko krožno frekvenco ω_c:

$$\omega_c = \frac{e_0 B}{m}. \tag{95}$$

Nato enačbo (92) enkrat odvajamo po času:

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_y}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_c \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}.$$

Dobljeni rezultat vstavimo v (91) in uredimo:

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_y}{\mathrm{d}t^2} + \omega_c^2 v_y = -\omega_c^2 \frac{E \sin(\alpha)}{B}. \tag{96}$$

Poglejmo sedaj enačbi (94) in (96). Enačbo oblike, ki jo ima (94) smo že srečali pri obravnavi nihanja. Njena spločna rešitev je oblike

$$v_x = a \sin(\omega_c t) + b \cos(\omega_c t).$$

Ker pa je začetna vrednost komponente hitrosti v_x enaka 0, lahko takoj ugotovimo, da je $b = 0$. Za enačbo (96) hitro uganemo, da je ena možna rešitev na primer:

$$v_{yp} = -\frac{E\sin(\alpha)}{B}.$$

Da je to res rešitev enačbe (96), se lahko zelo hitro prepričamo tako, da jo vstavimo v enačbo (96). Indeks p smo dodali, ker gre za *partikularno* rešitev enačbe (96). Splošna rešitev enačbe (96) pa je vsota partikularne rešitve ter splošne rešitve *homogenega dela* enačbe (96) - to je enačbe v katero bi enačba (96) prešla, če bi imela na desni strani ničlo:

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_y}{\mathrm{d}t^2} + \omega_c^2 v_y = 0.$$

Splošna rešitev enačbe (96) ima torej obliko:

$$v_y = c\sin(\omega_c t) + d\cos(\omega_c t) - \frac{E\sin(\alpha)}{B}.$$

Določiti je potrebno še konstante a, c in d in sicer tako, da bodo izpolnjeni pogoji

$$v_y(t=0) = v_0,\ \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\omega_c v_x,\ \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{e_0}{m}E\sin(\alpha) + \omega_c v_y.$$

Iz teh pogojev dobimo $c = 0$ in $a = d = v_0 + \frac{E\sin(\alpha)}{B}$. Iz enačbe (93) pa izračunamo še tretjo komponento hitrosti z direktno integracijo. Komponente hitrosti so torej:

$$v_x = \left(v_0 + \frac{E\sin(\alpha)}{B}\right)\sin(\omega_c t), \tag{97}$$

$$v_y = \left(v_0 + \frac{E\sin(\alpha)}{B}\right)\cos(\omega_c t) - \frac{E\sin(\alpha)}{B}, \tag{98}$$

$$v_z = \frac{e_0 E\cos(\alpha)}{m}t. \tag{99}$$

Če sedaj vstavimo podatke, dobimo najprej:

$$\omega_c = 6.391 \cdot 10^6\,\mathrm{s}^{-1}, \ \frac{E\sin(\alpha)}{B} = 0.246\,\mathrm{m/s},$$

nato pa še $v_x = -2369.72$ m/s, $v_y = -7641.47$ m/s in $v_z = 4439.18$ m/s. Velikost hitrosti tritijevega iona je

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = 9149.53\mathrm{m/s}.$$

Kako zapleteno je v resnici gibanje tega delca bolje vidimo, če hitrosti (97)-(99) enkrat integriramo po času, da dobimo njegovo trenutno lego x, y in z. Po integraciji dobimo:

$$x = \int v_x \mathrm{d}t = -r_L\cos(\omega_c t) + x_0, \tag{100}$$

$$y = \int v_y \mathrm{d}t = r_L\sin(\omega_c t) - \frac{E\sin(\alpha)}{B}t + y_0, \tag{101}$$

$$z = \int v_z \mathrm{d}t = \frac{e_0 E\cos(\alpha)t^2}{2m} + z_0. \tag{102}$$

Definirali smo Larmorjev radij r_L ciklotronskega kroženja tega delca takole:

$$r_L = \frac{v_0 + \frac{E\sin(\alpha)}{B}}{\omega_c} = \frac{m\left(v_0 + \frac{E\sin(\alpha)}{B}\right)}{e_0 B}. \tag{103}$$

Če vstavimo podatke dobimo $r_L = 0.001252$ m. Integracijske konstante x_0, y_0 in z_0 določajo točko, kjer je delec vstopil v območje, kjer obstajata polji. Delec torej ciklotronsko kroži okoli magnetnih silnic s krožno frekvenco ω_c po tiru s polmerom r_L. Obenem se delec pospešeno giblje v smeri magnetnega polja, pospešek pa določa projekcija električnega na magnetno polje. Hkrati pa se ciklotronski center delca giblje s konstantno hitrostjo

$$v_d = \frac{E\sin(\alpha)}{B}$$

v smeri negativne osi y - to pa je ravno smer vektorskega produkta $\vec{E} \times \vec{B}$. Pojav zato imenujemo $\vec{E} \times \vec{B}$ lezenje, oziroma angleško $\vec{E} \times \vec{B}$ drift. Zato tudi indeks d pri hitrosti. Vektorsko bi to hitrost zapisali takole:

$$\vec{v}_d = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}.$$

Opazimo lahko, da hitrost $\vec{v}_d$ ni odvisna od naboja delca. V električnem in magnetnem polju, ki nista vzporedni, torej ciklotronski center tako pozitivnega kot negativnega delca leze v isto smer in še celo hitrost lezenja je za delce obeh vrst enaka.

71. Nabit delec z nabojem e in maso m prileti s hitrostjo v_0 v področje, kjer obstajata homogeno električno polje E in magnetno polje B. Polji oklepata poljuben kot, a nsiat med seboj pravokotni ali vzporedni. V trenutku, ko delec vstopi v področje, kjer sta polji, nanj začne delovati še sila F, ki pa ni elektrostatske narave. Lahko je na primer sila teže ali pa centrifugalna sila, če se delec giblje po ukrivljenem tiru v na primer TOKAMAK-u. Analizirajte gibanje tega delca!

    Rešitev:
    Najprej postavimo koordinatni sistem. Os z usmerimo v smer magnetnega polja, tako, da je $\vec{B} = (0, 0, B)$. Sistem nato zavrtimo okoli osi z tako, da se električno polje znajde v ravnini xz, torej $\vec{E} = (E_x, 0, E_z)$. Dodatni sili na delec pa moramo dovoliti vse 3 komponente $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$. Enako velja za začetno hitrost delca ob vstopu v polje $\vec{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$. Drugi Newtonov zakon za delec potem zapišemo takole:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} + e\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right).$$

    Glede na prej postavljeni koordinatni sistem zgornjo enačbo po komponentah zapičemo takole:

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = F_x + e\left(E_x + v_y B\right), \tag{104}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = F_y - ev_xB, \tag{105}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = F_z + eE_z. \tag{106}$$

Postopamo podobno, kot pri prejšnji nalogi. Najprej enačbo (105) enkrat odvajamo po času in upoštevamo enačbo (104), potem pa odvajamo (104) in upoštevamo (105). Dobimo takšni enačbi:

$$\frac{\mathrm{d}^2v_x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_c^2 v_x = \frac{eB}{m^2}F_y, \tag{107}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2v_y}{\mathrm{d}t^2} + \omega_c^2 v_y = -\frac{eB}{m^2}\left(F_x + eE_x\right). \tag{108}$$

Njuni partikularni rešitvi lahko hitro uganemo:

$$v_{xp} = \frac{1}{eB}F_y,\ v_{yp} = -\frac{1}{eB}\left(F_x + eE_x\right).$$

Splošni rešitvi homogenih delov obeh enačb sta:

$$v_x = a\sin(\omega_c t) + b\cos(\omega_c t),$$

$$v_y = c\sin(\omega_c t) + d\cos(\omega_c t),$$

splošni rešitvi enačb (107) in (108) sta torej:

$$v_x = a\sin(\omega_c t) + b\cos(\omega_c t) + \frac{1}{eB}F_y,$$

$$v_y = c\sin(\omega_c t) + d\cos(\omega_c t) - \frac{1}{eB}\left(F_x + eE_x\right).$$

Konstante a, b, c in d določimo iz pogojev:

$$v_x(t=0) = v_{x0},\ v_y(t=0) = v_{y0},$$

ter zahtev, ki ju postavljata enačbi (104) in (105). Po nekaj računanja dobimo:

$$a = d = v_{y0} + \frac{1}{eB}\left(F_x + eE_x\right),$$

$$b = v_{x0} - \frac{1}{eB}F_y,\ c = -b = \frac{1}{eB}F_y - v_{x0}.$$

Komponenti hitrosti v_x in v_y sta torej podani z izrazoma:

$$v_x = \left(v_{x0} - \frac{1}{eB}F_y\right)\cos(\omega_c t) + \tag{109}$$
$$+ \left(v_{y0} + \frac{1}{eB}\left(F_x + eE_x\right)\right)\sin(\omega_c t) + \frac{1}{eB}F_y,$$

$$v_y = \left(v_{y0} + \frac{1}{eB}\left(F_x + eE_x\right)\right)\cos(\omega_c t) - \tag{110}$$
$$- \left(v_{x0} - \frac{1}{eB}F_y\right)\sin(\omega_c t) - \frac{1}{eB}\left(F_x + eE_x\right).$$

Komponento v_z pa dobimo z integracijo enačbe (106):

$$v_z = \frac{F_z + eE_z}{m}t + v_{z0}. \tag{111}$$

Trenutno lego delca pa dobimo z integracijo enačb (109)-(111) po času:

$$x = r_1\sin(\omega_c t) - r_2\cos(\omega_c t) + \frac{1}{eB}F_y t + x_0, \tag{112}$$

$$y = r_2\sin(\omega_c t) + r_1\cos(\omega_c t) - \frac{1}{eB}\left(F_x + eE_x\right)t + y_0, \tag{113}$$

$$z = \frac{(F_z + eE_z)t^2}{2m} + v_{z0}t + z_0. \tag{114}$$

Pri tem je

$$r_1 = \frac{v_{x0} - \frac{1}{eB}F_y}{\omega_c}, \quad r_2 = \frac{v_{y0} + \frac{1}{eB}\left(F_x + eE_x\right)}{\omega_c},$$

integracijske konstante x_0, y_0 in z_0 pa določajo mesto, kjer je delec vstopil v območje delovanja polj in dodatne sile. Iz enačb (112)-(114) lahko gibanje delca opišemo takole. Delec ciklotronsko kroži okoli magnetne silnice, njegov ciklotronski center pa pri tem leze po ravnini, ki je pravokotna na magnetno polje. Obenem se pospešuje v smeri magnetnega polja tako, kot določata projekciji zunanje sile in električnega polja na magnetno polje. Iz komponent hitrosti (109)-(111) lahko razberemo, da je hitrost lezenja ciklotronskega centra $\vec{v}_d$ podana z izrazom:

$$\vec{v}_d = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} + \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{eB^2}.$$

Opazimo naslednje. Hitrost lezenja ciklotronskega centra, ki ga povzroča dodatna zunanja sila, je odvisna od naboja delca in ima zato za pozitiven delec nasprotno smer, kot za negativnega. Čeprav sila $\vec{F}$ ni nujno ravno gravitacijska sila na delec, se je tega lezenja prijelo ime gravitacijski drift.

72. Po zelo dolgem ravnem vodniku teče tok 1000 A. V ravnini vodnika leži kvadratna zanka s stranico 20 cm tako, da sta dve stranici zanke vzporedni z vodnikom, bližja stranica pa je 10 cm oddaljena od vodnika. V nekem trenutku se tok po vodniku začne zmanjševati po enačbi $I(t) = I_0(1-(t/t_0)^2)$. Pri tem je $I_0 = 1000$A in $t_0 = 25$ s. Kolikšna napetost se inducira v zanki 10 s po začetku zmanjševanja toka po vodniku?

73. Po zelo dolgem ravnem vodniku teče tok 1000 A. V ravnini vodnika leži kvadratna zanka s stranico 20 cm tako, da sta dve stranici zanke vzporedni z vodnikom, bližja stranica pa je 10 cm oddaljena od vodnika. V nekem trenutku se tok po vodniku začne zmanjševati po enačbi $I(t) = I_0(1-(t/t_0)^3)$. Pri tem je $I_0 = 1000$A in $t_0 = 25$ s. Kolikšna napetost se inducira v zanki 10 s po začetku zmanjševanja toka po vodniku?

74. Po zelo dolgem ravnem vodniku teče sinusni izmenični tok z amplitudo 1000 A in frekvenco 50 Hz. V ravnini vodnika leži kvadratna zanka s stranico 20 cm tako, da sta dve stranici zanke vzporedni z vodnikom, bližja stranica pa je 10 cm oddaljena od vodnika. Kolikšen efektivni tok teče po zanki, če je njena upornost 0.08 Ω ?

75. Po zelo dolgem ravnem vodniku teče sinusni izmenični tok z amplitudo 1000 A in frekvenco 50 Hz. V ravnini vodnika leži trikotna zanka s stranicami 30, 40 in 50 cm tako, da je

najkrajša stranica vzporedna z vodnikom, in oddaljena od njega 10 cm. Kolikšen efektivni tok teče po zanki, če je njena upornost 0.08 Ω ?

76. Skozi dolg vodnik kvadratnega preseka površine $S = 4 \times 10^{-6}$ m^2 teče tok $I = 5$ A. Vodnik ima 2.5×10^{22} prostih nosilcev naboja (elektronov) na meter svoje dolžine (N/l). Ko postavimo vodnik v magnetno polje, ki je pravokotno na dve stranici vodnika, nastane med stranicama vzporednima z magnetnim poljem napetostna razlika $U = 1$ mV. Kolikšna je gostota nosilcev naboja na dolžinsko enoto?

Rešitev:
Opisan pojav imenujemo Hall-ov pojav [7]. V stacionarnem stanju velja [7]:

$$\mathrm{e}_0 E = \mathrm{e}_0 \overline{v} B \,, \tag{115}$$

kjer je e_0 naboj elektrona, E velikost jakosti električnega polja, $\overline{v}$ pa povprečna velikost hitrosti elektronov v smeri električnega toka. Ob upoštevanju enačbe za gostoto električnega toka:

$$\frac{I}{S} = n \mathrm{e}_0 \overline{v} \,, \tag{116}$$

kjer je n število prostih nosilcev naboja na enoto volumna in

$$E = \frac{U}{\sqrt{S}} \,, \tag{117}$$

iz enačbe (115) sledi:

$$n = \frac{IB}{U \mathrm{e}_0 \sqrt{S}} \,, \tag{118}$$

od tod pa:

$$\frac{N}{l} = nS = \frac{IB\sqrt{S}}{U e_0} = \ 2.5 \times 10^{22} \ \mathrm{m}^{-1} \,. \tag{119}$$

77. Magnetna igla niha s frekvenco 1 s^{-1} v magnetnem polju šesterokotne zanke s stranico 2 cm po kateri teče tok 10 A.

Za koliko odstotkov se spremeni nihajni čas magnetne igle, če zmanjšamo tok v zanki za 0.1 A? Os vrtenja magnetne igle leži na geometrijski osi zanke 5 cm od središča zanke.
(0.5 %)

78. Dva zelo dolga vzporedna vodnika sta oddaljena drug od drugega 1 m. Kolikšna je gostota magnetnega polja na četrtini razdalje med njima, če teče po vsakem tok 50 A v nasprotni smeri?
(53.3×10^{-6} Vs/m^2)

79. Ploščata tuljava s 100 ovoji je navita na kvadraten okvir s stranico 10 cm. Kolikšna je magnetna poljska jakost v osi tuljave, če teče skozi tuljavo tok 1 A?
(900 A/m)

80. Galvanometer na vrtljivo tuljavico, ki ima 180 ovojev (N) in se nahaja med zaobljenima poloma podkvastega magneta tako, da ima polje na mestu tuljavice ($B = 1$ T) radialno smer glede na os vrtenja tuljavice. Tuljavica je vrtljiva okoli osi, ki je pravokotna na njen magnetni dipolni moment ter pravokotna na smer magnetnega polja. Površina posameznega ovoja tuljavice $S = 2$ cm^2. S tuljavico je togo povezan kazalec, ki kaže v smeri magnetnega dipolnega momenta tuljavice, pravokotno na njeno os vrtenja. Kolikšna je amplituda kazalčevega odklona, če spustimo skozi tuljavico galvanometra kratkotrajen tokovni sunek $\int J\mathrm{d}t = 5$ μAs? Vztrajnostni moment tuljavice s kazalcem vred $J = 1.5 \times 10^{-6}$ kgm^2, koeficient obeh polžastih vzmeti, ki sta povezani s tuljavico (z namenom, da jo vračata v ravnovesno stanje), pa je skupaj enak 2.5×10^{-6} Nm (D).

Rešitev:
Predpostavimo, da je pri majhnih odmikih kazalca (φ) smer magnetnega polja ($\vec{B}$) pravokotna na magnetni moment tuljavice ($\vec{p}_m$) [2]. Velikost navora na tuljavo (M) je zato enaka:

$$M = p_m B = NISB\,. \tag{120}$$

Uporabimo izrek o vrtilni količini:

$$\int M\mathrm{d}t = J\omega_0\,, \tag{121}$$

kjer je ω_0 amplituda kotne hitrosti. Iz enačb (120) in (121) sledi:

$$\int NISB\mathrm{d}t = J\omega_0\,. \tag{122}$$

V splošnem velja za vsako nedušeno sinusno nihanje naslednja zveza med amplitudo kotne hitrosti (ω_0) in amplitudo φ_0:

$$\omega_0 = \varphi_0\ (\frac{2\pi}{t_0})\,, \tag{123}$$

kjer je φ_0 amplituda odmika, t_0 pa nihajni čas. Za nihalo na polžasto vzmet je:

$$\frac{2\pi}{t_0} = \sqrt{\frac{D}{J}}\,. \tag{124}$$

Iz enačb (122) - (124) tako sledi:

$$NSB\int I\mathrm{d}t = J\varphi_0\sqrt{\frac{D}{J}}\,, \tag{125}$$

in od tod končni rezultat:

$$\frac{NSB\int I\mathrm{d}t}{\sqrt{DJ}} = \ 0.093\ \simeq\ 5^{\circ}\,. \tag{126}$$

81. Tanek kovinski obroč s polmerom $r = 10$ cm se nahaja v homogenem magnetnem polju z gostoto $B = 2.5$ T, katerega smer je pravokotna na ravnino obroča. Na obroč je postavljena tanka kovinska palica, ki se giblje po ravnini obroča s konstantno hitrostjo $v = 0.2$ m/s proti središču obroča tako, da ves čas tvori njegovo tetivo. Kolikšna napetost se inducira 0.5 s (t) po začetku gibanja palice v zanki, ki jo tvorita palica in obroč? Palica na začetku tvori tangento na obroč.

Rešitev:

$$s = vt = \ 0.1 \text{ m} \longrightarrow l = 2r\,,$$

oziroma:

$$U_i = Blv = B2rv = \ 0.1\ \mathrm{V}\,.$$

82. Po tuljavi dolžine 0.5 m in z 300 ovoji teče tok 20 A. V tej tuljavi se nahaja druga manjša tuljavica s polmerom 3 cm, 50 ovoji in uporom 5 Ω. Na začetku sta geometrijski osi velike tuljave in male tuljavice vzporedni. Nato hitro zasučemo malo tuljavico za 60° okoli osi, ki je pravokotna na njeno geometrijsko os. Kolikšen je sunek toka v mali tuljavici, ki je priključena na upor 15 Ω.
(1.4289 $\times$ 10^{-5} As)

83. Po tuljavi z $N = 30$ ovoji in presekom $S = 15$ cm^2 teče tok. Pri majhnih odmikih niha tuljava v zemeljskem magnetnem polju s frekvenco $\nu = 1.5$ s^{-1}. Kolikšen tok teče skozi tuljavo, če je njen vztrajnostni moment $J = 10$ gcm^2? Vodoravna komponenta zemeljskega magnetnega polja ima gostoto $B = 2.1 \times 10^{-4}$ T. Vrtilna os tuljave je pravokotna na njeno geometrijsko os in na smer magnetnega polja.

Rešitev:
Zapišemo Newtonov zakon za vrtenje togega telesa okrog nepremične osi:

$$-p_m B \sin(\varphi) = J\alpha\,, \tag{127}$$

kjer je p_m magnetni moment tuljave in α kotni pospešek. Negativni znak kaže, da deluje navor $M = -p_m B \sin(\varphi)$ proti ravnovesni legi. Upoštevamo, da so odmiki majhni, torej $\sin(\varphi) \approx \varphi$. Od tod sledi:

$$-p_m B\varphi = J\alpha\,, \tag{128}$$

oziroma:

$$\alpha = -\left(\frac{p_m B}{J}\right)\varphi\,. \tag{129}$$

Enačba (129) je značilna za sučno sinusno nihanje [2, 6]. Velja:

$$(2\pi\nu)^2 = \left(\frac{p_m B}{J}\right) = \frac{NISB}{J}\,, \tag{130}$$

torej:

$$I = \frac{(2\pi\nu)^2 J}{NSB} = 9.4 \text{ A} .$$

84. Iz bakrene žice s specifično upornostjo $\rho = 0.017$ Ωmm^2/m in presekom $S_0 = 1$ mm^2 naredimo krožno zanko s polmerom r = 1 m. Homogeno magnetno polje z gostoto 1 T je pravokotno na ravnino zanke. Kolikšen tok teče po zanki, če magnetno polje v 10 s linearno zmanjašamo na nič tako, da se gostota magnetnega polja v odvisnosti od časa spreminja po enačbi $B(t) = B_0 - \alpha t$, kjer je $B_0 = 1$ T in $\alpha = 0.1$ V/m^2 ?

    Rešitev:
    Magnetni pretok skozi zanko je:

$$\Phi_m = B\pi r^2 = (B_0 - \alpha t)\pi r^2 ,$$

    inducirana napetost v zanki pa:

$$U_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} = \alpha\pi r^2 .$$

    Ob upoštevanju izraza $R = \rho 2\pi r/S_0$ izpeljemo inducirani električni tok v obliki:

$$I = \frac{U_i}{R} = \frac{\alpha S_0 r}{2\rho} .$$

85. Bakrena žica s presekom 1 mm^2 in specifično upornostjo 0.017 Ω mm^2/m je zvita v krožno zanko s polmerom 8 cm. Zanka se nahaja v homogenem magnetnem polju z gototo 0.2 T, ki je pravokotno na ravnino zanke. Nenadoma začne gostota magnetnega polja v odvisnosti od časa linearno naraščati in po 4 s doseže 1.6 T. Kolikšen električni tok se inducira v zanki?

86. Ovoj iz tanke žice ima radij $r = 12$ cm in leži v magnetnem polju z gostoto $B_0 = 1$ T. Smer magnetnega polja je pravokotna na ravnino ovoja. Najmanj kolikšen mora biti čas, v katerem lahko gostoto magnetnega polja linearno zmanjšamo

na nič, da se ovoj ne pretrga? Natezna trdnost žice je $\sigma_{\mathrm{m}} = 200\ \mathrm{N/mm^2}$, specifična upornost žice pa je $\rho = 1.7 \times 10^{-8}\,\Omega\mathrm{m}$.

Rešitev:
Inducirani električni tok v žici je (glej zgornje naloge)

$$I = \frac{U_i}{R} = \frac{B_0 S_0 r}{2 t_0 \rho}\,, \tag{131}$$

kjer je t_0 čas, ki ga iščemo. Sedaj si predstavljajmo majhen delček zanke dolžine $\mathrm{d}l$, na katerega v zunanjem magnetnem polju deluje sila

$$\mathrm{d}\vec{F}_m = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}\,.$$

Razmislite, da sila vedno kaže radialno iz obroča in da je velikost sile

$$\mathrm{d}F_m = I\mathrm{d}lB\,. \tag{132}$$

Ta sila povzroči natezno napetost σ v obroču, ki si jo lahko predstavljamo kot dve natezni sili $F_{\mathrm{n}} = \sigma S_0$ na naš delček obroča s površino preseka S_0. Ti natezni sili kažeta v tangentnih smereh, njuna vsota pa je $F_{\mathrm{n}} \sin(\mathrm{d}\varphi) \approx F_{\mathrm{n}}\,\mathrm{d}\varphi$, kjer je $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}l/r$ (skicirajte si majhen delčka obroča in sile nanj ter iz skice preverite zadnji enačbi!). Vsota teh sila mora biti nasprotno enaka $\mathrm{d}F_m$, kar nam da zvezo za natezno napetost v obroču:

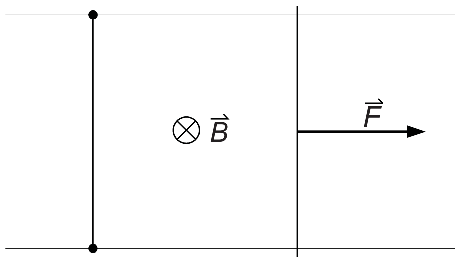
$$\sigma = \frac{I\mathrm{d}lB}{S_0\mathrm{d}\varphi} = \frac{B_0 r^2 B}{2 t_0 \rho}. \tag{133}$$

Natezna napetost je največjan začetku, ko je $B(t)$ največji in enak B_0. Čas zmanjševanja mora biti torej najmanj:

$$t_0 = \frac{B_0^2\, r^2}{2\, \sigma_{\mathrm{m}}\, \rho} \doteq 2.12\,\mathrm{ms} \tag{134}$$

87. Dva zelo dolga vzporedna kovinska vodnika s presekom 0.8 mm^2 in specifično upornostjo 0.08 $\Omega\mathrm{mm}^2/\mathrm{m}$ sta med seboj oddaljena 25 cm. Na enem krajišču sta povezana z negibno kovinsko prečko, ki ima enak presek in specifično upornost kot vodnika. Druga, a enaka prečka je brez trenja gibljiva

vzdolž vodnikov. Pri tem je ves čas pravokotna na vodnika in se z njima na obeh krajiščih stika (slika 16). Masa te prečke je 95 g. Homogeno magnetno polje z gostoto 0.8 T je pravokotno na ravnino vodnikov in prečk. V začetku premična prečka miruje ob negibni prečki. Nato pa jo začnemo vleči v smeri vodnikov tako, da se giblje s konstantnim pospeškom 0.7 m/s^2. Kolikšen električni tok teče po prečki 14 s kasneje in s kolikšno silo moramo takrat vleči prečko?



Slika 16:

88. Dva zelo dolga vzporedna superprevodna vodnika sta med seboj oddaljena 25 cm. Na enem krajišču sta povezana z negibno superprevodno prečko. Druga prečka, ki ima upornost 0.8 Ω je brez trenja gibljiva vzdolž vodnikov. Pri tem je ves čas pravokotna na vodnika in se z njima na obeh krajiščih stika (slika 16). Masa te prečke je 98 g. Homogeno magnetno polje z gostoto 0.7 T je pravokotno na ravnino vodnikov in prečk. V začetku premična prečka miruje ob superprevodni prečki. Nato pa jo začnemo vleči v smeri vodnikov s silo 0.8 N. Kolikšna je hitrost prečke 11 s kasneje in kolikšen električni tok teče takrat po prečki? Kolikšna je hitrost prečke po zelo dolgem času?

89. Kvadraten okvir iz žice s specifičnim uporom 0.06 Ωmm^2/m in presekom 1 mm^2 ima stranico z dolžino 4 cm. Okvir vrtimo okoli simetrale kvadrata, ki je vzporedna z dvema stranicama in pravokotna na magnetno polje z gostoto 0.1 T. Kolikšen povprečen navor je potreben, da se okvir zavrti 300 krat v

minuti?
(4.7×10^{-3} Nm)

90. Kvadraten okvir iz žice s specifičnim uporom 0.03 Ω mm^2/m in presekom 1 mm^2 ima površino 121 cm^2. Okvir vrtimo enakomerno s frekvenco 20 s^{-1} okoli njegove simetrale, ki je pravokotna na magnetno polje z gostoto 1 T in vzporedna z dvema stranicama. Kolikšna je amplituda toka, ki teče po okvirju?
(115.2 A)

91. Obroč iz kovine s specifičnim uporom ξ ima polmer r in površino preseka žice S. Obroč vrtimo okoli premera, ki je pravokoten na magnetno polje z gostoto B. Kolikšen povprečni navor je potreben, da se obroč vrti s kotno hitrostjo ω?
($< M >= \pi B^2 r^3 S\omega/(4\,\xi)$)

92. Kvadraten okvir iz žice, ki ima specifični upor $\varrho = 0.1$ Ω mm^2/m in površino preseka $S_0 = 1$ mm^2, ima stranico a = 10 cm. Okvir vrtimo okoli njegove simetrale, ki je pravokotna na magnetno polje z gostoto B = 0.1 T. Koliko dela (A) porabimo za en obrat okvirja pri vretnju s frekvenco $\nu = 60$ s^{-1} ? S kolikšnim povprečnim navorom ($< M >$) moramo delovati na okvir, da ga vrtimo s frekvenco $\nu = 60$ s^{-1} ? Izgube zanemarimo.

Rešitev:
Inducirano napetost v okvirju U_i izračunamo s pomočjo indukcijskega zakona:

$$U_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} = BS\omega\sin(\omega t)\,,$$

kjer smo upoštevali, da je magnetni pretok skozi okvir:

$$\Phi_m = BS\cos(\omega t)\,,$$

$\varphi = \omega t$ pa je kot med normalo površine okvirja in smerjo magnetnega polja. Površina okvirja $S = a^2, \omega = 2\pi\nu$. Inducirani električni tok, ki teče po zanki je:

$$I = \frac{U_i}{R} = \frac{BS\omega \sin(\omega t) S_0}{4a\varrho} \,,$$

kjer smo upoštevali:

$$R = \frac{\varrho 4a}{S_0} \,.$$

Ker teče po okvirju električni tok, deluje na okvir navor

$$M = p_m B \sin(\omega t) \,,$$

kjer je $p_m = IS$ magnetni moment zanke. Torej velja:

$$M = ISB \sin(\omega t) = \frac{B^2 S^2 \omega \sin^2(\omega t) S_0}{4a\varrho} \,.$$

Ob upoštevanju $< \sin^2(\omega t) >= \frac{1}{2}$ tako dobimo:

$$< M >= \frac{B^2 a^3 \pi \nu S_0}{4\varrho} = \; 4.7 \times 10^{-3} \text{ Nm} \,.$$

Izračunajmo še delo, ki je potrebno za en obrat okvirja:

$$A = \int_0^{2\pi} M \mathrm{d}\varphi = \frac{B^2 S^2 \omega S_0}{4a\varrho} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, \mathrm{d}\varphi = \frac{B^2 a^3 \pi^2 \nu S_0}{2\varrho} \approx 0.03 \text{ J} \,.$$

93. Kvadratna zanka s stranico 10 cm in upornostjo 0.7 Ω se nahaja v homogenem magnetnem polju, ki je pravokotno na ravnino zanke in niha sinusno s frekvenco 200 Hz in amplitudo 0.8 T. Kolikšen efektivni električni tok teče po zanki?

94. Krožna zanka s polmerom 5 cm in upornostjo 0.8 Ω se v homogenem magnetnem polju z gostoto 1 T vrti okoli svojega premera s frekvenco 10 obratov na sekundo. Os vrtenja je pravokotna na magnetno polje. Kolikšen efektivni električni tok teče po zanki?

95. Krožna zanka s polmerom 5 cm in upornostjo 0.8 Ω se v homogenem magnetnem polju z gostoto 1 T vrti okoli svojega premera s frekvenco 15 obratov na sekundo. Os vrtenja je pravokotna na magnetno polje. Kolikšna povprečna električna moč se porablja v zanki?

96. Krožna zanka s polmerom 5 cm in upornostjo 0.8 Ω se v homogenem magnetnem polju z gostoto 1 T vrti okoli svojega premera s frekvenco 10 obratov na sekundo. Os vrtenja je pravokotna na magnetno polje. Kolikšen povprečen navor deluje na zanko?

97. Krožna kovinska plošča s polmerom 20 cm se enakomerno vrti s kotno hitrostjo 200 s^{-1} okoli svoje geometrijske osi v magnetnem polju z gostoto 0.1 T. Kolikšna je napetost med osjo plošče in njenim obodom? Magnetno polje je vzporedno z geometrijsko osjo plošče.
(0.4 V)

1.4 Elektromagnetno valovanje

98. Radarska postaja oddaja elektromagnetne valove s frekvenco 10^{10} Hz. Valovi se odbijajo od bližajočega se reaktivnega letala. Odbite valove v radarski postaji sprejmejo in ugotovijo, da je njihova frekvenca za 47 kHz višja od frekvence oddanih valov. S kolikšno hitrostjo se približuje letalo?

99. V razdalji 3 km od neke radijske postaje je gostota energijskega toka izsevanega elektromagnetnega valovanja enaka 10^{-6} W/m^2. Kako daleč od postaje lahko največ še poslušamo to postajo z radijskim sprejemnikom, ki potrebuje na vhodu jakost električnega polja 10^{-4} V/m?

100. Radijska postaja ima oddajnik z močjo 200 W. Kolikšna je jakost električnega polja oddanega elektromagnetnega valovanja na razdalji 50 km od oddajnika? Predpostavite, da oddajnik seva izotropno v vse smeri!

2 Sevanje, fotometrija

1. Okensko steklo je sestavljeno iz dveh plasti. Prva plast je debela 2 mm, njena razpolovna debelina je 5 cm. Debelina druge plasti je 1.5 mm, njena razpolovna debelina pa je 3 cm. Kolikšen del vpadnega svetlobnega toka se absorbira v tem steklu?
   (0.63 %)

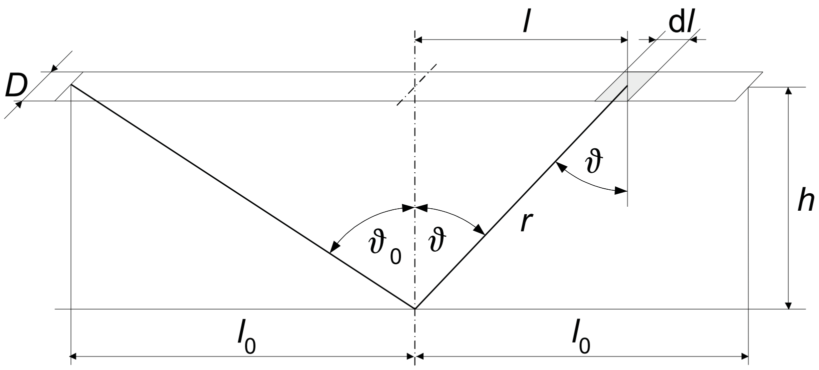
2. Plošči iz enakega pleksi stekla prepuščata po 20 % in 75 % vpadnega svetlobnega toka pri pravokotnem vpadu. Kolikšno je razmerje med debelinama plošč?
   (5.6)

3. Točkasti svetili sevata monokromatsko svetlobo. Svetili sta na višini 50 cm nad ravno mizo in sta med seboj razmaknjeni za 50 cm. Amplituda jakosti električnega polja svetlobe prvega svetila na razdalji 10 cm od svetila je 50 V/m. Kolikšna je svetilnost (I_2) drugega svetila, če je miza najmočneje osvetljena na razdalji 15 cm od pravokotne projekcije prvega svetila na mizo v smeri proti pravokotni projekciji drugega svetila na mizo? Absorpcijo svetlobe zanemarimo.
   ($I_2 = 3.1 \times 10^{-2}$ W)

4. Nad oglišči vodoravne pravokotne mize s stranicama dolžine 300 cm in 245 cm so obešene 4 majhne žarnice vse na višini 1.5 m nad oglišči. Prva žarnica ima moč 100 W, druga 60 W, tretja 200 W in četrta 80 W. Kolikšna je osvetljenost sredine mize? Predpostavite, da so vse štiri žarnice točkasta svetila, ki sevajo na vse strani enakomerno!

5. Na 3 m (h) visokem stropu je pritrjena zelo dolga fluorescenčna svetilka, ki ima obliko traku širine 4 cm (D). Kolikšna je osvetljenost tal pod svetilko, če svetilka seva po Lambertovem zakonu in je njena svetlost B=0.001 W/m^2?

   Rešitev:
   Iz slike 17 razberemo:
   $$r = \frac{h}{\cos\vartheta} \tag{135}$$



Slika 17:

in

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{l}{h}\,. \tag{136}$$

Iz enačbe (136) sledi

$$\mathrm{d}l = \frac{h}{\cos^2\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta\,. \tag{137}$$

Prispevek koščka traku širine D in dolžine dl (glejte sliko 17) k osvetljenosti tal je:

$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}I}{r^2}\cos\vartheta = \frac{B\,\mathrm{d}S\cos^2\vartheta}{r^2} = \frac{BD\,\mathrm{d}l\cos^2\vartheta}{r^2}\,, \tag{138}$$

kjer smo upoštevali, da je svetilnost koščka traku s površino $\mathrm{d}S = D\mathrm{d}l$ (slika 17) enaka $\mathrm{d}I = B\mathrm{d}S\cos\vartheta$. Če vstavimo izraz za r iz enačbe (135) ter izraz za dl iz enačbe (137) v enačbo (138) dobimo:

$$\mathrm{d}E = \frac{BD}{h}\cos^2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,,$$

torej je:

$$E(\vartheta_0) = 2\frac{BD}{h}\int_0^{\vartheta_0}\cos^2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$\frac{BD}{h}\int_0^{\vartheta_0}(1+\cos 2\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{BD}{h}\left(\vartheta_0 + \frac{1}{2}\sin(2\vartheta_0)\right)\,. \tag{139}$$

V našem primeru gre $\vartheta_0 \to \pi/2$, zato iz enačbe (139) sledi:

$$E = E(\vartheta_0 \to \frac{\pi}{2}) = \frac{BD\pi}{2h} .$$

6. Dve majhni žarnici sta obešeni v višini 90 cm nad vodoravno mizo. Razdalja med žarnicama je 1 m. Prva žarnica ima moč 40 W. Kolikšna je moč druge žarnice, če je najbolj osvetljena točka na mizi tista, ki leži na zveznici obeh pravokotnih projekcij žarnic na mizo in je 80 cm oddaljena od projekcije prve žarnice? Žarnici obravnavajte kot točkasti svetili, ki svetita enakomeno na vse strani!

7. Dve majhni žarnici, prva z močjo 40 W in druga z močjo 60 W sta obešeni v višini 80 cm nad vodoravno mizo. Razdalja med žarnicama je 1 m. Kolikšna je osvetljenost točke na mizi, ki se nahaja na zveznici pravokotnih projekcij obeh žarnic na mizo in je 30 cm oddaljena od pravokotne projekcije prvega žarnice? Žarnici obravnavajte kot točkasti svetili, ki svetita na vse strani enakomerno! Katera točka na zveznici med pravokotnima projekcijama obeh žarnic na mizo je najbolj osvetljena?

8. Majhna svetilka je obešena nad sredino dolge in 1 m široke mize. Svetilka ima za vse smeri enako svetilnost. Kako visoko nad površino mize moramo obesiti svetilko, da bo osvetljenost na vzdolžnem robu mize največja?
   (0.35 m)

9. Kolikšen svetlobni tok seva v prostor točkovno svetilo, katerega svetilnost je podana z enačbo $I(\theta, \phi) = a \sin(\theta/4) \cos(\phi/6)$? Pri tem je $a = 1$ W/ster.

10. Kolikšen svetlobni tok seva v prostor osno simetrično svetilo, katerega svetilnost je podana z enačbo $I(\theta) = a \sin(\theta/4) + b \cos(\theta/6)$? Pri tem je $a = 1$ W/ster in $b = 2$ W/ster.

11. Na eno ploskev kocke, ki se nahaja v vesolju, pada v pravokotni smeri EM valovanje z amplitudo električne poljske jakosti

$E_0 = 100$V/m. Albedo (odbojnost) kocke $a = 0.6$. Kolikšna je stacionarna temperatura kocke (T_s)? Kolikšen energijski tok oddaja kocka v stacionarnem stanju (P_izs)?

Rešitev:
V stacionarnem stanju je izsevani tok (P_izs) enak absorbiranemu toku (P_abs), ki pa je enak vpadnemu toku (P_vp) minus odbitemu toku (P_odb), torej:

$$P_\mathrm{izs} = P_\mathrm{abs} = P_\mathrm{vp} - P_\mathrm{odb}\,. \tag{140}$$

Ob upoštevanju definicije odbojnosti (albeda) $a = P_\mathrm{odb}/P_\mathrm{vp}$ iz enačbe (140) sledi:

$$P_\mathrm{izs} = P_\mathrm{abs} = P_\mathrm{vp}(1-a)\,,$$

od tod pa:

$$P_\mathrm{izs} = P_\mathrm{abs} = j_\mathrm{vp} b^2 (1-a)\,, \tag{141}$$

kjer je b^2 površina ene kockine ploskve, j_vp pa gostota vpadnega toka EM valovanja.
Velja [2, 7]:

$$j_\mathrm{vp} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 \mathrm{c}_0\,, \tag{142}$$

kjer je c_0 hitrost svetlobe v vakuumu. Iz enačb (141) in (142) tako sledi:

$$P_\mathrm{izs} = \frac{1}{2} b^2 (1-a)\epsilon_0 E_0^2 \mathrm{c}_0 = \ 1.33\times 10^{-2}\ \mathrm{W}\,. \tag{143}$$

Po drugi strani pa lahko ob upoštevanju Stefanovega zakona [2, 7]:

$$j = (1-a)\sigma T^4\,,$$

kjer je σ Stefanova konstanta, zapišemo:

$$P_\mathrm{abs} = P_\mathrm{izs} = 6b^2(1-a)\sigma T_\mathrm{s}^4\,,$$

oziroma:

$$T_\mathrm{s} = \left(\frac{P_\mathrm{abs}}{6b^2(1-a)\sigma}\right)^{(1/4)}\,. \tag{144}$$

Ker je $P_{\mathrm{abs}} = P_{\mathrm{izs}}$ lahko enačbo (144) zapišemo tudi v obliki

$$T_{\mathrm{s}} = \left(\frac{P_{\mathrm{izs}}}{6b^2(1-a)\sigma} \right)^{(1/4)} . \qquad (145)$$

Ob upoštevanju enačbe (143) pa iz enačbe (145) sledi končni izraz za stacionarno temperaturo kocke:

$$T_{\mathrm{s}} = \left(\frac{\epsilon_0 E_0^2 \mathrm{c}_0}{12\sigma} \right)^{(1/4)} = 79 \mathrm{~K} .$$

Vidimo, da rezultat ni odvisen od mase kocke in specifične toplote snovi, iz katere je kocka. To je posledica dejstva, da obravnavamo stacionarno stanje, ko se temperatura kocke ne spreminja več.

12. Dolgo počrnjeno žico s polmerom 4 mm in specifičnim uporom 0.016 $\Omega\mathrm{mm}^2/\mathrm{m}$ grejemo s tokom 160 A. Žica se nahaja v vakuumu. Kolikšna je temperatura žice na površini v stacionarnem stanju?
(275 K)

13. V sončnem sistemu se na isti razdalji od Sonca kot Zemlja nahaja siv okrogel satelit polmera 0.1 m z albedom 0.6. Kolikšna je temperatura satelita? Vzemite, da seva Sonce kot črno telo s temperaturo 6000 K ter da je temperatura satelita enaka po njegovi celotni površini. Polmer Sonca je 696000 km, razdalja od Zemlje do Sonca pa je 149×10^6 km.

Rešitev:
Iz temperature površja Sonca lahko iz Stefanovega zakona izračunamo svetlobni tok, ki ga seva Sonce in gostoto tega svetlobnega toka (j), ko doseže satelit (izgube zaradi absorpcije pri tem zanemarimo). Satelit prestreže $P = j\,\pi R_{\mathrm{satelit}}^2$ tega svetlobnega toka, od katerega se ga $(1-a)P$ (kjer je a odbojnost) absorbira. Ko zapišemo za satelit Stefanov zakon za sevanje sivega telesa, lahko izrazimo temperaturo satelita

v stacionarnem stanju. Dobimo:

$$T_{\text{satelit}} = T_{\text{Sonce}} \sqrt{\frac{R_{\text{Sonce}}}{2\, r_{\text{Zemlja}-\text{Sonce}}}} \doteq 290\text{K}.$$

Vidimo, da je temperatura satelita v stacionarnem stanju neodvisna od njegovega premera in odbojnosti.

14. Spekter elektromagnetnega valovanja, ki ga seva neko črno telo, ima maksimum pri valovni dolžini 600 nm. Kolikšen je energijski tok izsevanega valovanja, če ima telo površino 300 cm^2 ?

15. Neko črno telo ima temperaturo 2500 K. Nato ga segrejemo za toliko, da se valovna dolžina, pri kateri ima spekter maksimum, zmanjša za 0.2 μm. Kolikšno gostoto energijskega toka sedaj seva to črno telo? Njegova površina je 50 cm^2.

16. Iz Planckovega zakona izpeljite Stefanov in Wienov zakon!

    Rešitev:
    Planckov zakon podaja porazdelitev gostote energijskega toka izsevanega elektromagnetnega valovanja po valovnih dolžinah, [7]:

    $$\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{2\pi \mathrm{h c}_0^2}{\lambda^5 \left(\exp(\mathrm{hc}_0/\lambda \mathrm{k} T) - 1\right)}\,.$$

    Pri tem je h Planckova konstanta, j gostota izsevanega energijskega toka, λ valovna dolžina, k Boltzmannova konstanta, c hitrost svetlobe v vakuumu in T absolutna temperatura.

    Stefanov zakon podaja gostoto celotnega izsevanega energijskega toka. Dobimo ga z integracijo Planckovega zakona po valovnih dolžinah:

    $$j = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi \mathrm{hc}_0^2\,\mathrm{d}\lambda}{\lambda^5 \left(\exp(\mathrm{hc}_0/\lambda \mathrm{k} T) - 1\right)}\,.$$

    Uvedemo novo spremenljivko:

    $$x = \frac{\mathrm{hc}_0}{\lambda \mathrm{k} T}, \quad \mathrm{d}\lambda = -\frac{\mathrm{hc}_0}{\mathrm{k} T x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Zgornji integral potem preide v:

$$j = \frac{2\pi \mathrm{k}^4 T^4}{\mathrm{h}^3 \mathrm{c}_0^2} \int_0^\infty \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{e^x - 1} = \frac{2\pi^5 \mathrm{k}^4}{15\mathrm{h}^3\mathrm{c}_0^2} T^4 \,.$$

Vrednost zgornjega integrala poiščemo v tabelah:

$$\int_0^\infty x^3/(e^x - 1)\mathrm{d}x = \pi^4/15.$$

Zgornji izraz preuredimo v bolj znano obliko Stefanovega zakona:

$$j = \sigma T^4 \,,$$

kjer je:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 \mathrm{k}^4}{15\mathrm{h}^3\mathrm{c}_0^2} = 5.67 \times 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\mathrm{K}^4}$$

Stefanova konstanta.

Spekter izsevanega elektromagnetnega valovanja ima maksimum pri določeni valovni dolžini. Ta valovna dolžina je odvisna od temperature in to tako, da je produkt valovne dolžine, pri kateri ima spekter maksimum, in absolutne temperature konstanten. Vrednost te konstante izračunamo iz Planckovega zakona. Najprej Planckov zakon zapišemo z novo spremenljivko x, ki smo jo definirali prej:

$$\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}\lambda}(x) = \frac{2\pi \mathrm{k}^5 T^5}{\mathrm{h}^4 \mathrm{c}_0^3} \frac{x^5}{e^x - 1} \,.$$

Ekstrem te funkcije poiščemo tako, da odvod po x izenačimo z 0. Tako dobimo enačbo:

$$x = 5(1 - e^{-x}) \,.$$

To enačbo rešimo numerično, na primer z metodo navadne iteracije. Dobimo:

$$x = \frac{\mathrm{hc}_0}{\lambda \mathrm{k} T} = 4.9651 \,,$$

oziroma:

$$\lambda T = \frac{\mathrm{hc}}{4.9651\mathrm{k}} = k_{\mathrm{W}} = \ 2.898 \times 10^{-3} \ \mathrm{mK}\,.$$

Temu izrazu pravimo Wienov zakon, k_{W} pa je Wienova konstanta.

17. V vakuumu se nahaja črno telo z maso 60 g, narejeno pa je iz snovi, ki ima specifično toploto 200 J/kgK. Na začetku ima temperaturo 2500 K. Površina telesa je 10 cm^2. Po kolikšnem času pade temperatura telesa na 1422 K?

18. Neko črno telo seva tako, da ima spekter izsevanega elektromagnetnega valovanja maksimum pri valovni dolžini 800 nm. Nato temperaturo telesa povečamo za 300 K. Kolikšen energijski tok sedaj seva to črno telo z 1 cm^2 svoje površine?

19. Volframska nitka ima premer 0.2 mm in temperaturo 1500 K. Nahaja se v vakuumu. Grejemo jo z enosmernim električnim tokom. Kolikšen električni tok teče po nitki, ko se vzpostavi stacionarno stanje? Predpostavite, da nitka seva kot črno telo! Specifična upornost volframa je 0.055 Ωmm^2/m.

20. Volframska nitka ima premer 0.2 mm. Nahaja se v vakuumu, po njej pa teče električni tok 3 A. Kolikšna je temperatura te nitke, ko se vzpostavi stacionarno stanje? Predpostavite, da nitka seva kot črno telo! Specifična upornost volframa je 0.055 Ωmm^2/m.

21. Volframska nitka v žarnici ima temperaturo 2700 K. Žarnico ugasnemo. Po kolikšnem času pade temperatura nitke na 1000 K? Nitka ima polmer 0.05 mm in dolžino 10 cm. Gostota volframa je 19.3 g/cm^3, specifična toplota pa 155 J/kgK. Predpostavite, da nitka seva kot idealno črno telo. Kateri podatek je odveč?

22. Črno telo, ki ima površino 50 cm^2 in toplotno kapaciteto 60 J/K segrejemo na temperaturo 2897 K. Po kolikšnem času se telo ohladi za toliko, da se valovna dolžina, pri kateri ima

spekter izsevanega elektromagnetnega valovanja maksimum poveča za 200 nm? Predpostavite, da telo oddaja toploto samo s sevanjem!

23. Črno telo ima maso 600 g, površino 300 cm^2 in specifično toploto 200 J/kgK. V začetku ima temperaturo 2500 K. Po kolikšnem času se temperatura zniža na 1900 K? Predpostavite, da telo oddaja toploto samo s sevanjem!

24. Okrogla, tanka, volframska ploščica ima polmer 4 cm. V središču ploščice je temperatura 2100 K. V radialni smeri temperatura linearno narašča in na robu ploščice meri 2600 K. Kolikšen energijski tok seva ta ploščica z ene od obeh svojih površin? Predpostavite, da ploščica seva kot idealno črno telo!

25. Prva siva ploščica prepusti 65 % vpadlega svetlobnega toka, druga pa 45 % vpadlega svetlobnega toka. Ploščici sta iz enakega materiala. Prva ploščica je debela 4 cm. Kolikšna je debelina druge ploščice?

26. Siva ploščica absorbira 30 % vpadlega svetlobnega toka. Koliko odstotkov svetlobnega toka prepustijo 4 takšne ploščice, ki so postavljene druga za drugo?

27. Siva ploščica debeline 3 cm absorbira 87.5 % vpadlega svetlobnega toka. Kolikšna je razpolovna debelina za to ploščico?

28. Prva siva ploščica prepusti 65 % vpadlega svetlobnega toka, druga pa 45 % vpadlega svetlobnega toka. Koliko odstotkov svetlobnega toka prepustita ploščici, ko ju sestavimo?

29. Na eno stran tanke ravne homogenene kvadratne plošče s stranico dolžine 1 m, ki se nahaja v vesolju, pada v pravokotni smeri EM valovanje z amplitudo električne poljske jakosti 100 V/m. Albedo plošče ni odvisen od valovne dolžine in je enak 0.6. Ocenite, kolikšen energijski tok oddaja plošča v stacionarnem stanju?
(5.31 W)

30. Na eno stran tanke ravne homogenene kvadratne plošče s stranico dolžine 1 m, ki se nahaja v vesolju, pada v pravokotni smeri EM valovanje z amplitudo električne poljske jakosti 100 V/m. Albedo plošče ni odvisen od valovne dolžine in je enak 0.6. Ocenite, kolikšen energijski tok oddaja plošča v stacionarnem stanju?
(5.31 W)

3 Geometrijska optika

1. Pri poenostavljenem modelu človeškega očesa imajo leča, steklovina in tekočina v sprednjem zrkelnem prekatu vse lomni količnik 1.4. Lomni količnik zraka pa je približno 1.0. Kolikšen naj bo polmer ukrivljenosti roženice, da na mrežnici nastane jasna slika predmeta, ki je od roženice oddaljen 25 cm? Razdalja od roženice do mrežnice je 2.6 cm.

Rešitev:

$$\begin{aligned} a &= 25\,\mathrm{cm} \\ b &= 2.6\,\mathrm{cm} \\ n &= 1.4 \end{aligned}$$

$r = ?$

Pri lomu svetlobe iz snovi z lomnim količnikom n_{zun} v kroglo z radijem r in lomnim količnikom n_{not} velja za majhne odmike žarkov od optične osi zveza:

$$\frac{n_{\mathrm{zun}}}{a} + \frac{n_{\mathrm{not}}}{b} = \frac{n_{\mathrm{not}} - n_{\mathrm{zun}}}{r} \,.$$

Tako kot pri enačbi tanke krogelne leče, je a razdalja predmeta do roba krogle kjer vstopajo žarki in b razdalja od roba krogle do slike. Iz geometrije in lomnega zakona izpelji zgornjo zvezo! V našem primeru poenostavljenega modela očesa je $n_{\mathrm{zun}} = 1$ (zrak) in $n_{\mathrm{not}} = n = 1.4$. Tako dobimo za krivinski radij (polmer ukrivljenosti):

$$r = \frac{n}{1/a + n/b} \doteq 0.69\,\mathrm{cm} \,.$$

Naj omenimo še, da pogosto uporabimo tudi nekoliko drugačen preprost model očesa, kjer obravnavamo oko kar kot tanko zbiralno lečo v zraku, slika pa mora nastati na razdalji b na mrežnici. Če ima takšna leča lomni količnik n_l ter krivinska radija r_1 na eni in r_2 na drugi strani, lahko uporabimo zvezo:

$$\frac{1}{f} = (n_l - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \,.$$

Da na mrežnici nastane ostra slika predmeta, ki je na razdalji a od očesa, mora oko prilagoditi krivinska radija leče v našem preprostem modelu tako, da za obratno vrednost goriščne razdalje velja (enačba tanke krogelne leče):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\,.$$

2. Lomni količnik vode $n_{\mathrm{v}} = 1.33$, lomni količnik stekla $n_{\mathrm{s}} = 1.54$. Določite kritični kot za totalni odboj na meji med steklom in vodo α_{c}!

   Rešitev:
   Pri prehodu svetlobe čez mejo dveh snovi velja lomni zakon v obliki:
   $$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_{\mathrm{v}}}{n_{\mathrm{s}}}\,,$$
   kjer je α vpadni kot (v steklu) in β lomni kot (v vodi). Pri prehodu iz optično gostejše snovi (večji lomni količnik) v optično redkejšo snov (manjši lomni količnik) pride do totalnega odboja, ko je $\beta = 90^{\mathrm{o}}$, ustrezni vpadni kot $\alpha \equiv \alpha_{\mathrm{c}}$ pa v tem primeru imenujemo kritični kot:

   $$\frac{\sin\alpha_{\mathrm{c}}}{\sin 90^{\mathrm{o}}} = \frac{n_{\mathrm{v}}}{n_{\mathrm{s}}}\,,$$

   od koder sledi:

   $$\alpha_{\mathrm{c}} = \arcsin\left(\frac{n_{\mathrm{v}}}{n_{\mathrm{s}}}\right) = \ 59.72^{\mathrm{o}}\,.$$

3. Točkasto svetilo na dnu 1 m globokega bazena pošilja svetlobo enakomerno v vse smeri. Kolikšen je polmer kroga, ki ga zariše lučka na vodni gladini? Lomni količnik vode je 1.33. (114 cm)

4. Paralelni snop bele svetlobe pada na prizmo z lomečim kotom $\gamma = 45^{\mathrm{o}}$ pod takšnim kotom glede na površino prizme, da zapušča rdeči snop svetlobe prizmo pod pravim kotom. Za

koliko sta na 10 m oddaljenem zaslonu oddaljeni lisi rdeče in vijolične svetlobe? Lomni količnik prizme za rdečo svetlobo je $n_\mathrm{r} = 1.37$, lomni količnik prizme za vijolično svetlobo pa je 1.42.

Rešitev:
Lomeči kot (γ) je kot med ploskvama prizme, skozi kateri žarek vstopa in izstopa. Vpadni kot (α_1) žarka, ki vstopa v prizmo in lomni kot sta povezana z lomnim zakonom,

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = n, \tag{146}$$

kjer je n lomni količnik prizme in je odvisen od valovne dolžine svetlobe. Enako lahko tudi pri izstopu iz prizme vpadni kot β_2 povežemo z lomnim kotom α_2 (to je kot med normalo na izstopno ploskev in smerjo žarka, ki zapusti prizmo),

$$\frac{\sin\beta_2}{\sin\alpha_2} = \frac{1}{n}\,.$$

Za rdečo svetlobo naloga navaja $\alpha_2 = 0$ in s tem je tudi $\beta_2 = 0$. Ker v prizmi velja

$$\gamma = \beta_1 + \beta$$

(iz geometrije izpelji zgornjo enačbo!), lahko iz lomnega zakona na vpadni ploskvi prizme (enačba 146) izrazimo vpadni kot svetlobe:

$$\sin\alpha_1 = n_\mathrm{r}\,\sin\gamma. \tag{147}$$

Sedaj lahko tudi za vijolično svetlobo izračunamo lomni kot izstopajočega curka. Dobimo:

$$\sin\alpha_2 = n_\mathrm{r}\,sin\left(\gamma - \arcsin\left(\frac{n_\mathrm{r}\,\sin\gamma}{n_\mathrm{v}}\right)\right). \tag{148}$$

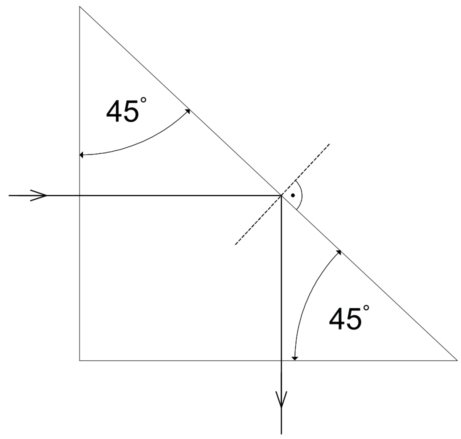
Razdalja med lisama na zaslonu je

$$x = d\,\tan\alpha_2 = 49\,\mathrm{cm}\,.$$

Pri tem predpostavimo, da je zaslon postavljen vzporedno s ploskvijo prizme iz katere svetloba izstopa.

5. Vzporedni snop svetlobe širine 1 cm pada na vodno gladino pod vpadnim kotom 60^o. Kolikšna je širina snopa pod vodo? Lomni količnik vode je 1.33, zraka pa 1.00.

6. Kolikšna je minimalna vrednost lomnega količnika tristrane prizme z lomečim kotom 45^o (slika 18), ki jo uporabljamo za spremembo smeri curka svetlobe za 90^o? Lomni količnik zraka okrog prizme je 1.00.
(1.414)



Slika 18:

7. Tanka razpršilna leča razprši snop vzporednih žarkov tako, da izgleda kot da bi prihajali iz točkastega svetlobnega izvora, ki je od ravnine leče oddaljen 20 cm. Velikost navidezne, pokončne slike nekega predmeta je 1/3 velikosti predmeta. Na kolikšni razdalji od ravnine opisane leče se nahaja ta predmet?
(40 cm)

8. Goriščna razdalja lupe je 9 cm. Kam moramo postaviti predmet, da nastane slika 25 cm pred očesom opazovalca? Kolikšna je velikost slike, če je velikost predmeta 1 mm?
(6.62 cm, 3.78 mm)

Rešitev:
Lupa nam poskrbi za to, da je predmet pri opazovanju skozi

lupo navidezno večji. Slika, ki nastane pri uporabi lupe je navidezna. Predpostavite lahko, da je razdalja med očesom in lupo zanemarljiva. Tako lahko za enačbo leče zapišemo:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{-|b|} = \frac{1}{f} \, .$$

Predmet moramo torej postaviti na razdaljo

$$a = \frac{|b|f}{|b| + f} \doteq 6.62 \text{ cm.}$$

Velikost slike (S) lahko izračunajte iz enačbe za povečavo leče:

$$\frac{S}{|b|} = \frac{P}{a} \, .$$

Velikost slike je torej

$$S = P\frac{|b|}{a} \doteq 3.8 \text{ mm.}$$

9. Predmet višine 1.5 cm postavimo 30 cm daleč od zbiralne leče z goriščno razdaljo 20 cm. Na drugo stran leče postavimo pokončno zrcalo, na oddaljenost 38 cm od leče. Kako velika je slika predmeta?

10. Slika predmeta, ki je oddaljen 10 m od zbiralne leče je visoka 3 cm. Če je isti predmet oddaljen 6 m, pa je njegova slika visoka 5.02 cm. Kolikšna je višina predmeta?
(5m)

11. Daljnovidno oko ne vidi dobro predmetov, ki so oddaljeni od očesa manj kot 75 cm (a'). Ocenite dioptrijo leče za očala ($D = 1/f_{\text{leča}}$), ki jih to oko potrebuje, da vidi jasno tudi do razdalje $a = 25$ cm?

Rešitev:
Pri razdalji $a' = 75$ cm pade slika na mrežnico tudi brez očal, velja:

$$\frac{1}{f_{\text{oko}}} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{b} \, , \tag{149}$$

kjer je b razdalja med lečo očesa in mrežnico. Pri razdalji a = 25 cm pa oko potrebuje očala, da slika pade na mrežnico. Velja:

$$\frac{1}{f_{\text{oko}}} + \frac{1}{f_{\text{leča}}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\,. \tag{150}$$

Iz enačbe (150) izrazimo:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f_{\text{oko}}} - \frac{1}{a'}$$

in to vstavimo v enačbo (149). Tako dobimo:

$$\frac{1}{f_{\text{leča}}} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a'} = \; 2.7 \text{ m}^{-1}\,.$$

12. Kratkovidno oko ne vidi jasno predmetov, ki so oddaljeni več kot 1 meter (x). Kolikšna je dioptrija očal, ki jih oko potrebuje, da vidi jasno predmete do oddaljenosti 5 metrov (y)?

    Rešitev:
    Oko potrebuje konkavna očala, ki predmet na oddaljenosti 5 m preslikajo na razdaljo 1 m, kjer oko predmet lahko jasno vidi. Torej:

    $$\frac{1}{y} + \frac{1}{-x} = \frac{1}{f} = D\,,$$
    $$D = \; -0.8\; m^{-1}\,.$$

13. Predmet preslikamo z zbiralno lečo na d = 90 cm oddaljeni zaslon. Preslikava se posreči pri dveh legah leče. Slika pri drugi legi je štirikrat večja od slike pri prvi ($s_2 = 4s_1$). Kolikšen je lomni količnik n stekla iz katerega je izdelana leča, če sta oba njena krivinska polmera enaka R = 0.2 m?

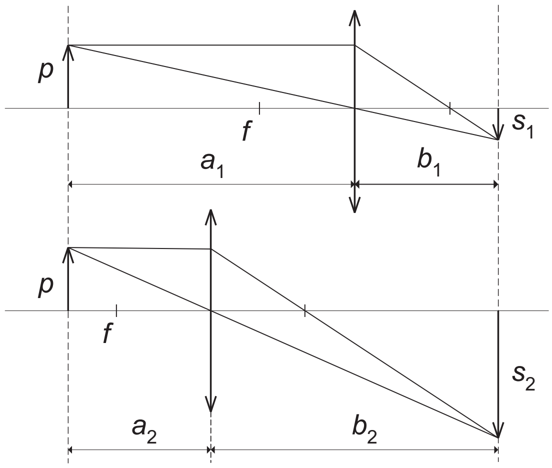
    Rešitev:
    Povezavo med krivinskim polmerom R, lomnim količnikom n in goriščno razdaljo leče f podaja enačba

    $$\frac{1}{f} = (n-1)\,\frac{2}{R}\,. \tag{151}$$

Pri tem smo upoštevali, da sta oba krivinska polmera enaka. Od tod sledi

$$n = \frac{R}{2f} + 1\,. \tag{152}$$

Ugotoviti moramo torej goriščno razdaljo leče f. Pri prvi legi



Slika 19:

je leča oddaljena a_1 od predmeta in b_1 od zaslona. Pri drugi legi pa je leča oddaljena a_2 od predmeta in b_2 od zaslona. V obeh primerih pa velja:

$$a_1 + b_1 = d\,, \tag{153}$$

$$a_2 + b_2 = d\,. \tag{154}$$

Za obe preslikavi velja enačba leče:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}\,, \tag{155}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2}\,. \tag{156}$$

Če je p višina predmeta, ki ga preslikavamo, sledi iz podobnosti trikotnikov (slika 19):

$$\frac{p}{a_1} = \frac{s_1}{b_1}\,, \tag{157}$$

$$\frac{p}{a_2} = \frac{s_2}{b_2}\,. \tag{158}$$

Poleg tega pa velja še:

$$s_2 = 4s_1\,. \tag{159}$$

Iz enač (157), (158) in (159) dobimo:

$$b_1 = \frac{a_1 b_2}{4a_2}\,. \tag{160}$$

Enačbo (160) vstavimo v enačbo (153) in dobimo:

$$a_1 = \frac{4a_2 d}{b_2 + 4a_2}\,. \tag{161}$$

Nato vstavimo (161) v (160) in dobimo:

$$b_1 = \frac{b_2 d}{b_2 + 4a_2}\,. \tag{162}$$

Enačbi (161) in (162) vstavimo v (155) in dobimo:

$$\frac{1}{f} = \frac{b_2 + 4a_2}{4a_2 d} + \frac{b_2 + 4a_2}{b_2 d}\,. \tag{163}$$

Iz enačb (163) in (156) potem sledi:

$$(b_2 + 4a_2)^2 = 4d\,(a_2 + b_2)\,. \tag{164}$$

Iz enačb (154) in (164) pa sledi

$$3\,a_2^2 + 2a_2 d - d^2 = 0\,. \tag{165}$$

Rešitev te enačbe je

$$a_2 = \frac{d}{3} = \ 30 \text{ cm}\,.$$

Od tod dobimo še

$$b_2 = \frac{2d}{3} = \ 60 \text{ cm}\,,$$

$$f = \frac{a_2 b_2}{a_2 + b_2} = \ 20 \text{ cm}\,.$$

Od tod pa iz enačbe (152) sledi n= 1.5.

14. Dve tanki zbiralni leči z goriščnima razdaljama 20 cm in 10 cm postavimo na skupno optično os v medsebojni oddaljenosti 50 cm. Kako daleč od prve leče ($f_1 = 20$ cm) moramo postaviti predmet, da bomo dobili sliko 20 cm od druge leče? Narišite skico poteka žarkov!

15. Predmet stoji pred pokončnim zaslonom. Med predmetom in zaslonom premikamo zbiralno lečo in opazujemo sliko predmeta na zaslonu. Ostro sliko predmeta na zaslonu dobimo pri dveh legah leče. Prvič, ko je leča 120 cm oddaljena od zaslona, in drugič, ko je leča 40 cm oddaljena od zaslona. Kolikšna je goriščna razdalja leče in kolikšna je oddaljenost predmeta od zaslona?

16. Dva predmeta sta razmaknjena za 30 cm. Kam moramo postaviti zbiralno lečo z goriščno razdaljo 14 cm, da bosta sliki obeh predmetov nastali na istem mestu?

17. Na optično os tanke zbiralne leče z goriščno razdaljo f=30 cm postavimo 1.5 m (a) pred lečo paličasto svetilo višine x=6 cm. Za lečo postavimo zaslon tako, da na njem vidimo ostro sliko svetila. Kolikšna je višina slike svetila (y) na zaslonu?

    Rešitev:
    Zapišimo enačbo leče:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}\,. \tag{166}$$

    Iz zvez za podobne trikotnike sledi:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}\,. \tag{167}$$

    Iz enačbe (167) izrazimo višino slike, pri čemer razdaljo slike od leče (b) izračunamo iz enačbe (166):

$$y = x\,\frac{b}{a} = \frac{x}{a(1/f - 1/a)} = \ 1.5 \text{ cm}\,.$$

18. Okroglo ploščico s premerom 5 mm postavimo 50 cm pred zbiralno lečo tako, da sta ravnini ploščice in leče vzporedni, središče ploščice pa leži na optični osi leče. Zaslon za lečo postavimo tako, da je slika predmeta na zaslonu ostra. Velikost slike je 1 mm. Če nato premaknemo zaslon 1 cm nazaj (stran od leče), postane slika razmazana in velika 2 mm. Kolikšen je polmer leče? Kolikšna je goriščna razdalja leče?
(0.5 cm, 8.33 cm)

Namigi za reševanje:

$r_p = 2.5$ mm	...	radij predmeta
r_l	...	radij leče
$r_s = 0.5$ mm	...	radij slike
$x = 1$ cm	...	premik zaslona
$r_x = 1$ mm	...	radij razmazane slike
$a = 50$ cm, b, f	...	klasične oznake za tanko lečo

Iz enačbe za povečavo lahko izrazite razdaljo (b) od leče do zaslona na katerem nastane ostra slika predmeta in nato iz enačbe leče še goriščno razdaljo leče (f):

$$\frac{r_p}{a} = \frac{r_s}{b} \qquad \Rightarrow \qquad b \qquad \Rightarrow \qquad f$$

Skicirajte si žarek iz vrha leče skozi spodnjo točko ostre slike in dalje proti spodnji točki razmazane slike na premaknjenem zaslonu. Zapišete lahko enakosti:

$$\frac{r_l}{y} = \frac{r_s}{b-y} = \frac{r_x}{b-y+x}\ ,$$

kjer je y razdalja med lečo in točko, kjer ta žarek prečka optično os. Iz teh enačb lahko izračunate radij leče (r_l).

19. Mikroskop, ki ga sestavljata objektiv z goriščno razdaljo 9 mm in okular z goriščno razdaljo 6 cm, uporabimo za projekcijo nastale slike na zaslon, ki je od okularja oddaljen 1 m. Slika, ki nastane pri preslikavi preko objektiva, je od objektiva oddaljena 14 cm. Določite lateralno povečavo slike predmeta, ki nastane na zaslonu (torej višina slike v primerjavi z višino

predmeta)! Kolikšna je razdalja med objektivom in okularjem?
(228.5, 20.38 cm)

20. Pri mikroskopu je goriščna razdalja objektiva 0.5 cm, goriščna razdalja okularja 2 cm, razdalja med lečama pa je 22 cm. Razdalja predmeta od objektiva je 0.51 cm. Slika predmeta je za opazovalca navidezno v neskončnosti. Kolikšna je povečava mikroskopa? Za normalno zorno razdaljo vzamemo 25 cm.
(490)

21. Mikroskop ima objektiv z goriščno razdaljo 15 mm in okular z goriščno razdaljo 4 mm. Predmet je 2 cm pred objektivom. Kolikšna je povečava tega mikroskopa in kolikšna je razdalja med okularjem in objektivom? Narišite skico poteka žarkov! Za normalno zorno razdaljo vzemite 25 cm!

22. Mikroskop ima objektiv z goriščno razdaljo 15 mm in povečavo 187.5. Predmet je 2 cm pred objektivom. Kolikšna je goriščna razdalja okularja in kolikšna je razdalja med okularjem in objektivom? Narišite skico poteka žarkov! Za normalno zorno razdaljo vzemite 25 cm!

23. Mikroskop ima objektiv z goriščno razdaljo 5 mm in okular z goriščno razdaljo 4 mm. Objektiv in okular sta 40 mm oddaljena drug od drugega. Kako daleč od objektiva je predmet in kolikšna je povečava tega mikroskopa? Za normalno zorno razdaljo vzemite 25 cm! Narišite skico poteka žarkov!

24. Mikroskop ima objektiv z goriščno razdaljo 4 mm in okular z goriščno razdaljo 5 mm. Povečava mikroskopa je 300. Kako daleč od objektiva je predmet in kolikšna je razdalja med objektivom in okularjem? Za normalno zorno razdaljo vzemite 25 cm! Narišite skico poteka žarkov!

25. Ozek snop paralelnih svetlobnih žarkov pade na stekleno kroglo s polmerom $R = 10$ cm. Koliko cm od nasprotne površine krogle fokusira omenjeni svetlobni snop (d), če je lomni količnik stekla $n = 1.52$?

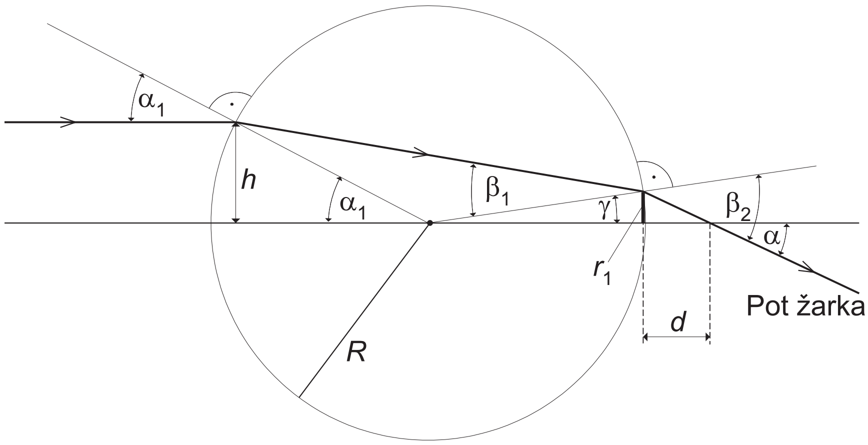
Rešitev:
Iz slike 20 sledi:

$$2\beta_1 + (180^{\circ} - \alpha_1 - \gamma) = 180^{\circ}\,,$$

oziroma

$$\gamma = 2\beta_1 - \alpha_1\,. \tag{168}$$

Prav tako s slike 20 razberemo



Slika 20:

$$\alpha + \gamma + (180^{\circ} - \beta_2) = 180^{\circ}\,,$$

od koder sledi:

$$\alpha = \beta_2 - \gamma\,. \tag{169}$$

Če vstavimo izraz za kot γ iz enačbe (168) v enačbo (169) dobimo:

$$\alpha = \beta_2 - 2\beta_1 + \alpha_1\,. \tag{170}$$

Velja tudi (glejte sliko 20):

$$\sin\gamma = \frac{r_1}{R}\,,$$

oziroma:

$$r_1 = R\sin\gamma\,. \tag{171}$$

S slike 20 sledi ob upoštevanju da je γ zelo majhen,

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{r_1}{d}\,. \tag{172}$$

Če vstavimo izraz za r_1 iz enačbe (171) v enačbo (172) dobimo:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{R\sin\gamma}{d}\,,$$

oziroma:

$$d = \frac{R\sin\gamma}{\mathrm{tg}\,\alpha}\,. \tag{173}$$

Vstavimo v enačbo (173) izraz za kot α iz enačbe (170) in izraz za kot γ iz enačbe (168):

$$d = \frac{R\sin(2\beta_1 - \alpha_1)}{\mathrm{tg}(\beta_2 - 2\beta_1 + \alpha_1)}\,. \tag{174}$$

Napišimo še lomni zakon na obeh straneh krogle in upoštevajmo, da so koti α_1, β_1 in β_2 majhni:

$$n = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} \approx \frac{\alpha_1}{\beta_1}\,, \tag{175}$$

$$n = \frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1} \approx \frac{\beta_2}{\beta_1}\,. \tag{176}$$

Iz enačb (175) in (176) sledi:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1}\,,$$

oziroma:

$$\alpha_1 = \beta_2\,. \tag{177}$$

Izraz (177) upoštevamo v enačbi (174) in dobimo:

$$d = \frac{R\sin(2\beta_1 - \alpha_1)}{\mathrm{tg}(\alpha_1 - 2\beta_1 + \alpha_1)} = \frac{R\sin(2\beta_1 - \alpha_1)}{\mathrm{tg}(2\alpha_1 - 2\beta_1)}\,. \tag{178}$$

Če upoštevamo, da so koti majhni ($\sin\varphi \approx \varphi$, $\mathrm{tg}\,\varphi \approx \varphi$), zapišemo približni izraz za d v obliki:

$$d \approx \frac{R\,(2\beta_1 - \alpha_1)}{(2\alpha_1 - 2\beta_1)}\,. \tag{179}$$

Ob upoštevanju enačb (175) in (176) pa iz enačbe (179) sledi:

$$d = \frac{R\,(2\alpha_1/n - \alpha_1)}{2\alpha_1 - 2\alpha_1/n} = \frac{R\,(2/n - 1)}{2(1 - 1/n)} = \ 4.6 \text{ cm}\,.$$

4 Valovna optika

1. Valovna dolžina rdeče svetlobe iz helij–neonskega laserja je 633 nm v zraku, v tekočini med roženico in lečo očesa pa 474 nm. Izračunajte lomni količnik, hitrost in frekvenco svetlobe v tej tekočini!
   (1.335, 2.25×10^8 m/s, 4.74×10^{14} Hz)

2. Curek svetlobe z valovno dolžino $\lambda = 500$ nm gre skozi režo debeline $b = 0.4$ mm in lečo z goriščno razdaljo $f = 2$ m, ki leži tik za režo. Ocenite razliko med lego osrednjega in prvega maksimuma na zaslonu, ki ga postavimo na tako razdaljo od reže, da je slika ostra!

   Rešitev:
   Gostoto energijskega toka na zaslonu lahko zapišemo v obliki [2]:

   $$j = j_0 \frac{\sin^2(\pi b \sin\beta/\lambda)}{(\pi b \sin\beta/\lambda)^2}\,, \qquad (180)$$

   kjer je j_0 gostota svetlobnega toka v vpadni smeri, kot β pa meri odmik od vpadne smeri. Za osrednji maksimum je $\beta = 0$. Za prvi minimum velja:

   $$\frac{\pi b \sin\beta_1}{\lambda} = \pi \qquad \Rightarrow \qquad b\sin\beta_1 = \lambda\,.$$

   Za drugi minimum velja:

   $$\frac{\pi b \sin\beta_2}{\lambda} = 2\pi \qquad \Rightarrow \qquad b\sin\beta_2 = 2\lambda\,,$$

   torej za minimume v splošnem velja:

   $$b\sin\beta_N = N\lambda\,, \qquad N = 1, 2, ...$$

   Prvi maksimum se nahaja med prvim in drugim minimumom, zato zanj vzamemo:

   $$\frac{\pi b \sin\beta_x}{\lambda} = \frac{3}{2}\pi\,. \qquad (181)$$

Ob upoštevanju, da je kot β_x majhen ($\sin\beta_x \approx \beta_x$) iz enačbe (181) sledi:

$$\beta_x = \frac{3}{2}\frac{\lambda}{b}\,. \tag{182}$$

Ker zahtevamo, da je slika ostra, to pomeni, da mora biti razdalja med režo (lečo) in zaslonom enaka goriščni razdalji $f = 2$ m. Torej velja:

$$\mathrm{tg}\,\beta_x = \frac{\Delta x}{f}\,,$$

oziroma:

$$\Delta x = f\,\mathrm{tg}\,\beta_x\,. \tag{183}$$

Zopet upoštevamo, da je kot β_x majhen. Enačbo (183) lahko zato zapišemo v obliki:

$$\Delta x = f\beta_x\,. \tag{184}$$

Iz enačb (182) in (184) pa sledi:

$$\Delta x = f\beta_x = f\,\frac{3\lambda}{2b} = \ 3.75 \text{ mm}\,.$$

3. Uklonska mrežica ima reže v razmiku 2 μm. V pravokotni smeri jo osvetljujemo s svetlobo, ki ima valovno dolžino 600 nm. Uklonsko sliko opazujemo na 3 m oddaljenem zaslonu. Kolikšna je na zaslonu razdalja med osrednjo in prvo stransko svetlo črto?

4. Vzporeden snop enobarvne svetlobe valovne dolžine $\lambda = 500$ nm pada pod kotom $\alpha = 45^o$ na uklonsko mrežico. Najmanj kolikšna sme biti razdalja med režami, da na drugi strani mrežice še lahko zaznamo prvi uklonski minimum?

   Rešitev:
   Za prvi uklonski minimum mora biti razdalja poti žarkov iz sosednjih rež enaka $\lambda/2$. Razlika poti med vpadnima žarkoma, ki padeta na sosednji reži, je enaka $d\sin\alpha$, kjer je d razdalja med sosednjima režama. Največja razlika poti med uklonjenimi žarki pa je pod največjim kotom glede na normalo na

mrežico, v skrajnem primeru so to žarki, ki so pri izstopu iz reže kar vzporedni z režo. Tako je skupna razlika poti med takšnima uklonjenima žarkoma $d \sin\alpha + d$. Iz zveze

$$d \sin\alpha + d = \lambda/2$$

potem dobimo za razdaljo med režami $d = 146.4$ nm.

5. Svetloba z valovno dolžino 500 nm pade pravokotno na ploskev dvolomnega kristala, ki je rezan tako, da optična os kristala leži na ploskvi, na katero pade svetloba. Lomni količnik za redni žarek je 2.193, za izredni žarek pa 2.198. Kristal je debel 1.81 mm. Kolikšen je fazni premik (v radianih) med rednim in izrednim žarkom po prehodu svetlobe skozi kristal?

6. Z namenom, da zmanjšamo odbojnost leče, se nanjo nanese tanek sloj dielektrika. Ocenite minimalno debelino takega tankega sloja iz snovi z lomnim količnikom 1.2, če hočete kar najbolj zmanjšati odbojnost leče za valovno dolžino 550 nm? Lomni količnik leče je 1.5.
(115 nm)

7. Bela svetloba pada pod kotom α=30° na ravno milnično plast z lomnim količnikom $h = 1.33$. Kolikšna mora biti debelina plasti, da se najmočneje odbija svetloba z valovno dolžino λ_0=555 nm?

   Rešitev:
   V milnični plasti je valovna dolžina svetlobe enaka $\lambda = \lambda_0/n$. Razlika v poti (δ) med žarkom 1 in 2 je približno (glejte sliko 21):

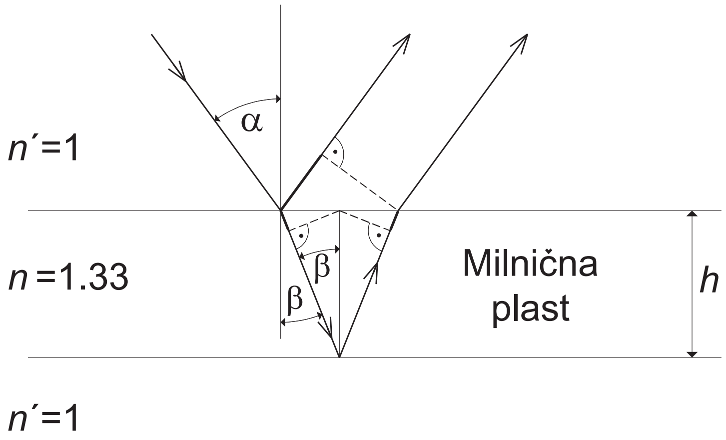
$$\delta = 2h\cos\beta + \frac{\lambda}{2}\,,$$

   kjer smo z $\lambda/2$ upoštevali, da se žarek 1 odbije na optično gostejši snovi $n' > n$). Pogoj za ojačanje zapišemo v obliki:

$$2h\cos\beta + \lambda/2 = N\lambda\,,$$

   kjer je $N = 1, 2, ...$ Upoštevamo $\lambda = \lambda_0/n$ in dobimo:

$$2h\cos\beta + \lambda_0/2n = N\,\frac{\lambda_0}{n}\,,$$



Slika 21:

od koder sledi:

$$2nh\cos\beta = \frac{\lambda_0}{2}\,(2N-1)\,. \tag{185}$$

Ob upoštevanju lomnega zakona:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n\,,$$

dobimo:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = \frac{\sin^2\alpha}{1-\cos^2\beta} = n^2\,,$$

od tod pa sledi:

$$\frac{1}{n^2}\sin^2\alpha = 1-\cos^2\beta\,,$$

oziroma:

$$\cos\beta = \left(1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}\right)^{1/2}\,. \tag{186}$$

Za $N = 1$ in ob upoštevanju enačbe (186) iz enačbe (185) sledi:

$$2nh\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}\right)^{1/2} = \frac{\lambda_0}{2}\,,$$

oziroma:

$$2h(n^2 - \sin^2\alpha)^{1/2} = \frac{\lambda_0}{2}\,. \tag{187}$$

S pomočjo enačbe (187) izračunamo debelino milnične plasti:

$$h = \frac{\lambda_0}{4}\,(n^2 - \sin^2\alpha)^{-1/2} = \ 113\ \mathrm{nm}\,.$$

8. Na vodi z lomnim količnikom 1.33 leži 2 μm debela plast olja z lomnim količnikom 1.6. Plast osvetljujemo s svetlobo z valovno dolžino 489 nm. Kolikšen kot, najbližji 70$^\mathrm{o}$, morajo žarki oklepati s pravokotnico na vodno gladino, da se odbita svetloba oslabi?

9. Na vodi z lomnim količnikom 1.33 leži 5 μm debela plast olja z lomnim količnikom 1.6. Plast osvetljujemo s svetlobo z valovno dolžino 555 nm. Kolikšen kot, najbližji 30$^\mathrm{o}$, morajo žarki oklepati s pravokotnico na vodno gladino, da se odbita svetloba ojači?

10. Tanko prozorno ploščico, ki je debela 1 μm in ima lomni količnik 1.4 osvetljujemo s svetlobo valovne dolžine 500 nm. Ploščica je na stekleni podlagi, ki ima lomni količnik 1.5. Kolikšen kot morajo žarki oklepati s pravokotnico na ploščico, da se odbita svetloba ojači? Poiskati morate vse kote, pri katerih je pogoj za ojačitev izpolnjen!

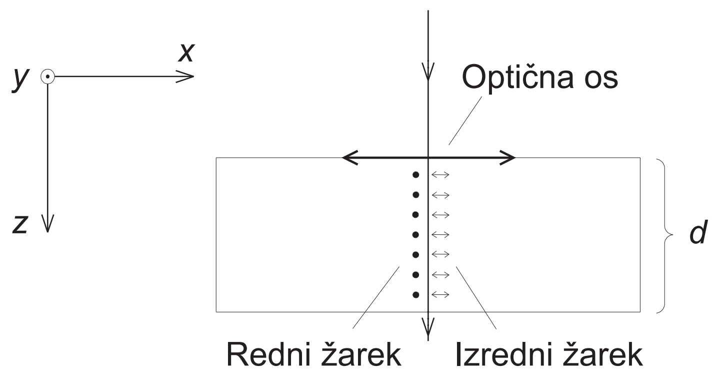
11. Na vodi, ki ima lomni količnik 1.33, je 2 mikrometra debela plast olja z lomnim količnikom 1.5. Plast osvetljujemo z belo svetlobo pod kotom 40$^\mathrm{o}$ glede na normalo na vodno gladino. Določite valovno dolžino svetlobe, ki se pri odboju ojači in je najbližja 500 nm!

12. S točkastim svetilom, ki seva svetlobo z valovno dolžino 600 nm enakomerno na vse strani, posvetimo na 0.1 mm debelo prozorno ploščico z lomnim količnikom 1.58. Kolikšen je najmanjši kot ob vrhu osnega preseka stožca, na plašču katerega leži ojačana svetloba?
(59.5$^\mathrm{o}$)

13. Dva polarizatorja sta postavljena tako, da ne prepuščata svetlobe. Med njiju postavimo tretji polarizator, tako da skozi vse tri polarizatorje preide 9.4 % vpadnega svetlobnega toka popolnoma nepolarizirane svetlobe. Za kolikšen kot je prepustna smer tega tretjega vmesnega polarizatorja nagnjena glede na smer polarizacije svetlobe, ki jo prepušča prvi polarizator? Absorpcijo svetlobe v polarizatorjih zanemarimo.
(30^o)

14. Na idealni polarizator pada pravokotno na njegovo površino vzporeden snop linearno polarizirane svetlobe z gostoto energijskega toka 0.1 W/m^2. Nihajna ravnina vpadajočega valovanja oklepa kot 45^o s prepustno smerjo polarizatorja. Svetloba, ki pride skozi polarizator, osvetljuje zaslon, ki je postavljen pod kotom 45^o glede na smer žarkov. Kolikšna je osvetljenost zaslona merjena v W/m^2 ?
(3.53×10^{-2} W/m^2)

15. Linearno polarizirana svetloba z valovno dolžino λ pada pravokotno na ploščico dvolomnega kristala, ki je rezan tako, da optična os leži v ravnini, na katero pada svetloba (glejte sliko 22). Pri tem električno polje vpadle svetlobe z optično osjo oklepa kot α. Debelina ploščice je d, lomni količnik za redni žarek je n_r, lomni količnik za izredni žarek pa n_i. Obravnavajte polarizacijo svetlobe, ki izstopa iz kristala!



Slika 22:

Nekaj komentarjev:
Ko svetloba pade na dvolomni kristal, se vedno razdeli na dve linearno polarizirani valovanji. En val se širi v vse smeri z enako hitrostjo in ga imenujemo redni žarek. Pri drugem valu je hitrost odvisna od smeri razširjanja. Temu pravimo izredni žarek. V določeni smeri sta obe hitrosti enaki. Ta smer se imenuje optična os. Pravokotno na to smer pa je razlika v hitrostih največja. Obravnavamo samo kristale z eno optično osjo. Obstajajo tudi taki, ki imajo 2 optični osi.

Električno polje rednega žarka je pravokotno na ravnino, v kateri leži redni žarek. Električno polje izrednega žarka je pravokotno na električno polje rednega žarka in leži v ravnini rednega žarka.

V našem primeru je vpad pravokoten, zato se vpadni žarek ne lomi. Vendar pa redni in izredni žarek potujeta skozi kristal z različnima hitrostima, ker se širita v smeri pravokotno na optično os. Zaradi tega sta ob izstopu iz kristala med seboj fazno premaknjena za kot φ, ki je podan z izrazom:

$$\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda}\left(n_r - n_i\right).$$

Po vstopu v kristal se vpadla svetloba razdeli na dve linearno polarizirani valovanji. Ker je vpad pravokoten, je električno polje izrednega žarka vzporedno z optično osjo, električno polje rednega žarka pa ravokotno na to smer. Koordinatni sistem postavimo tako, da optična os ter električno polje izrednega žarka ležita na osi x, električno polje rednega žarka leži na osi y, žarka pa potujeta v smeri osi z. Amplituda električnega polja vpadle svetlobe je E_0. Ob izstopu iz kristala velja za redni žarek:

$$E_r = E_y = E_0 \sin\alpha \sin\omega t\,. \tag{188}$$

Za izredni žarek pa velja:

$$\begin{aligned} E_i = E_x &= E_0 \cos\alpha \sin(\omega t + \varphi) = \\ &= E_0 \cos\alpha \sin\omega t \cos\varphi + E_0 \cos\alpha \cos\omega t \sin\varphi\,. \end{aligned} \tag{189}$$

Iz enačbe (188) izrazimo:

$$\sin \omega t = \frac{E_y}{E_0 \sin \alpha}\,, \quad \cos \omega t = \sqrt{1 - \sin^2 \omega t}\,.$$

To vstavimo v enačbo (189) ter še malo preuredimo. Dobimo:

$$\begin{aligned} E_x^2 \cos^2 \alpha - 2E_x E_y \sin \alpha \cos \alpha \cos \varphi + E_y^2 \sin^2 \alpha &= \\ = E_0^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi\,. \end{aligned} \tag{190}$$

Poglejmo si tri posebne primere.

1. Najprej naj bo φ lihi večkratnik π. Potem je $\cos \varphi = -1$ in $\sin \varphi = 0$. V tem primeru enačba (190) preide v:

$$E_x^2 \cos^2 \alpha + 2E_x E_y \sin \alpha \cos \alpha + E_y^2 \sin^2 \alpha = 0\,. \tag{191}$$

Od tod dobimo, da je

$$E_x = -E_y\, \mathrm{tg}\alpha\,.$$

To pomeni, da je izstopajoče valovanje še vedno linearno polarizirano, le ravnina, v kateri leži električno polje, se je zasukala za $\pi/2$.

2. Naj bo φ sodi večkratnik π. Potem je $\cos \varphi = 1$ in $\sin \varphi = 0$. V tem primeru enačba (190) preide v:

$$E_x^2 \cos^2 \alpha - 2E_x E_y \sin \alpha \cos \alpha + E_y^2 \sin^2 \alpha = 0\,. \tag{192}$$

Od tod sledi, da je

$$E_x = E_y\, \mathrm{tg}\alpha\,.$$

To pomeni, da je izstopajoče valovanje linearno polarizirano, žarek pa je šel skozi kristal, kot da ga sploh ne bi bilo.

3. V zadnjem posebnem primeru naj bo φ lihi večkratnik od $\pi/2$. V tem primeru enačba (190) preide v:

$$\frac{E_x^2}{E_0^2 \sin^2 \alpha} + \frac{E_y^2}{E_0^2 \cos^2 \alpha} = 1\,. \tag{193}$$

To je enačba elipse. Izstopno valovanje je torej eliptično polarizirano, v posebnem primeru, ko je $\alpha = \pi/4$ pa je krožno polarizirano.

16. Pravokotno na zglajeno kovinsko ploščico usmerimo svetlobni tok $P = 0.09$ W. Sila s katero deluje svetlobni curek na ploščico znaša $F = 4 \times 10^{-10}$ N. Ploščica se nahaja v vakuumu. Kolikšna je odbojnost (a) ploščice za vpadni svetlobni curek?

Rešitev:
Upoštevamo, da je gibalna količina fotonov [3, 7] $G_\nu = \mathrm{h}\nu/\mathrm{c}_0 = \mathrm{h}/\lambda$, kjer je c_0 hitrost svetlobe v vakuumu, h Planckova konstanta in λ valovna dolžina. Število absorbiranih fotonov N_{abs} je:

$$N_{\mathrm{abs}} = \frac{P_{\mathrm{abs}}t}{\mathrm{h}\nu} = \frac{(1-a)Pt}{\mathrm{h}\nu}\,, \tag{194}$$

kjer je $P_{\mathrm{abs}} = (1-a)P$ absorbirani svetlobni tok. Število odbitih fotonov (N_{odb}) pa je:

$$N_{\mathrm{odb}} = \frac{Pat}{\mathrm{h}\nu}\,. \tag{195}$$

Skupna sprememba gibalne količine odbitih fotonov v času t je:

$$\Delta G_{\mathrm{odb}} = N_{\mathrm{odb}}\left((-\frac{\mathrm{h}\nu}{\mathrm{c}_0}) - \frac{\mathrm{h}\nu}{\mathrm{c}_0}\right) = \frac{-2aPt}{\mathrm{c}_0}\,, \tag{196}$$

$$\Delta G_{\mathrm{abs}} = N_{\mathrm{abs}}\left(0 - \frac{\mathrm{h}\nu}{\mathrm{c}_0}\right) = \frac{-(1-a)Pt}{\mathrm{c}_0}\,, \tag{197}$$

kjer smo upoštevali enačbi (194) in (195). Uporabimo izrek o gibalni količini:

$$\Delta G = \Delta G_{\mathrm{odb}} + \Delta G_{\mathrm{abs}} = F't\,, \tag{198}$$

kjer je F' sila ploščice na curek fotonov. Iz enačb (196), (197) in (198) izračunamo silo F':

$$F' = -\frac{(1+a)P}{\mathrm{c}_0}\,. \tag{199}$$

Sila svetlobnega (fotonskega) curka na ploščico (F) je nasprotno enaka sili F':

$$F = \frac{(1+a)P}{\mathrm{c}_0}\,. \tag{200}$$

Iz enačbe (200) pa dobimo:

$$a = \frac{F c_0}{P} - 1 = \ 0.33.$$

5 Posebna teorija relativnosti

1. Iz diferencialne oblike Lorentzove transformacije izpeljite Lorentzovo transformacijo za komponente hitrosti!

   Rešitev:
   Najprej se spomnimo "navadne" Lorentzove transformacije (glej na primer [20])

$$
\begin{aligned}
x &= \gamma\left(x' + vt'\right), & x' &= \gamma\left(x - vt\right), \\
y &= y', & y' &= y, \\
z &= z', & z' &= z, \\
t &= \gamma\left(t' + \tfrac{v}{c_0^2}x'\right), & t' &= \gamma\left(t - \tfrac{v}{c_0^2}x\right).
\end{aligned}
$$

   V diferencialni obliki pa Lorentzova transformacija izgleda takole:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= \gamma\left(\mathrm{d}x' + v\mathrm{d}t'\right), & \mathrm{d}x' &= \gamma\left(\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t\right), \\
\mathrm{d}y &= \mathrm{d}y', & \mathrm{d}y' &= \mathrm{d}y, \\
\mathrm{d}z &= \mathrm{d}z', & \mathrm{d}z' &= \mathrm{d}z, \\
\mathrm{d}t &= \gamma\left(\mathrm{d}t' + \tfrac{v}{c_0^2}\mathrm{d}x'\right), & \mathrm{d}t' &= \gamma\left(\mathrm{d}t - \tfrac{v}{c_0^2}\mathrm{d}x\right).
\end{aligned}
$$

   Pri tem je

$$
\gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}},
$$

   v pa je hitrost s katero se izhodišče sistema s črtico giblje v smeri pozitivne osi x sistema brez črtice, vse tri osi obeh sistemov pa so ves čas vzporedne. Komponente hitrosti v vsakem sistemu so definirane kot odvodi ustreznih komponent po lasntem času:

$$
v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma\left(\mathrm{d}x' + v\mathrm{d}t'\right)}{\gamma\left(\mathrm{d}t' + \frac{v}{c_0^2}\mathrm{d}x'\right)} = \frac{\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} + v}{1 + \frac{v}{c_0^2}\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}} = \frac{v_x' + v}{1 + \frac{v}{c_0^2}v_x'},
$$

$$
v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y'}{\gamma\left(\mathrm{d}t' + \frac{v}{c_0^2}\mathrm{d}x'\right)} = \frac{\mathrm{d}y'}{\gamma\mathrm{d}t'\left(1 + \frac{v}{c_0^2}\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}\right)} = \frac{v_y'}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c_0^2}v_x'\right)},
$$

$$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{v_z'}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c_0^2}v_x'\right)}.$$

Na zelo podoben način izpeljemo tudi obratno transformacijo:

$$v_x' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\gamma\left(\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t\right)}{\gamma\left(\mathrm{d}t - \frac{v}{c_0^2}\mathrm{d}x\right)} = \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - v}{1 - \frac{v}{c_0^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c_0^2}v_x'},$$

$$v_y' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}y}{\gamma\left(\mathrm{d}t - \frac{v}{c_0^2}\mathrm{d}x\right)} = \frac{\mathrm{d}y}{\gamma\mathrm{d}t\left(1 - \frac{v}{c_0^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)} = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c_0^2}v_x\right)},$$

$$v_z' = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c_0^2}v_x\right)}.$$

2. Izvidniška ladja leti od Zemlje proti planetu Klingonov s hitrostjo 0.98 c_0 glede na Zemljo. Ko v izvidniški ladji mine 5 let od štarta z Zemlje, mimo njih v nasprotni smeri švigne klingonska ladja, ki leti proti Zemlji po vzporedni premici, s hitrostjo 0.999898 c_0 glede na izvidniško ladjo. Z izvidniške ladje na Zemljo takoj pošljejo opozorilni signal, ki potuje proti Zemlji s svetlobno hitrostjo. Koliko časa mine na Zemlji od prejema opozorila, do prihoda klingonske ladje? Koliko časa mine v klingonski ladji od srečanja z izvidniško ladjo do prihoda na Zemljo?

   Rešitev:
   Najprej se odličimo za oznake. Premica, po kateri se gibljeta ladji, naj bo os x. Izvidniška ladja se giblje v smeri pozitivne osi x: $v_1 = 0.98\ c_0$, klingonska ladja pa v smeri negativne osi x: $v_2' = -0.999898\ c_0$. Hitrost klingonske ladje je izmerjena v sistemu izvidniške ladje. Njeno hitrost glede na Zemljo pa izračunamo z uporabo Lorentzove transformacije za hitrosti. Pri tem se moramo zavedati, da je sedaj hitrost izvidniške ladje v_1 hitrost koordinatnega sistema izvidniške ladje v koordinatnem sistemu Zemlje.

$$v_2 = \frac{v_2' + v_1}{1 + \frac{v_1}{c_0^2}v_2'} = \frac{-0.999898c_0 + 0.98c_0}{1 - \frac{0.98c_0}{c_0^2}0.999898c_0} = -0.99c_0.$$

Klingonska ladja se torej Zemlji približuje s hitrostjo $v_2 = -0.99c_0$. Ko je v izvidniški ladji minilo $T_1' = 5$ let, je na Zemlji zaradi podaljšanja časa minil daljši čas in sicer:

$$T_1 = \gamma_1 T_1' = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v_1^2}{c_0^2}}} \cdot T_1' = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{(0.98c_0)^2}{c_0^2}}} \cdot 5 \text{ let} = 25.13 \text{ let}.$$

Klingonska in izvidniška ladja sta se torej srečali na razdalji

$$s_1 = v_1 \cdot T_1 = 0.98c_0 \cdot 25.13 \text{ let} = 24.63 \text{ svlet}$$

24.63 svetlobnih let od Zemlje. Opozorilni signal potuje do Zemlje torej $T_0 = 24.63$ let. Klingoska ladja pa za pot od kraja srečanja z izvidniško ladjo do Zemlje potrebuje čas:

$$T_2 = \frac{s_1}{v_2} = \frac{24.63\text{svlet}}{0.99c_0} = 24.88 \text{ let}.$$

Čas, ki ga imajo na Zemlji na razpolago za pripravo na klingonski napad je torej $T_1 - T_0 = 0.25$ let oziroma 3 mesece.

V klingonski ladji pa od srečanja z izvidniško ladjo do prihoda na Zemljo mine čas

$$T_2' = \frac{T_2}{\gamma_2} = \frac{T_2}{\sqrt{\frac{1}{1-\frac{v_2^2}{c_0^2}}}} = \frac{24.88}{\sqrt{\frac{1}{1-0.99^2}}} = 3.51 \text{ let}.$$

3. Vesoljska križarka Galactica je v lastnem sistemu dolga 18500 m in leti mimo Zemlje s hitrostjo 0.98 c_0 glede na Zemljo v smeri svoje dolžine. Po vzporedni premici leti v isti smeri majhen vesoljski lovec (raptor) s hitrostjo 0.99 c_0 glede na Zemljo. Koliko časa potrebuje raptor, da pride od zadnjega do sprednjega konca Galactice? Določite čas "prehitevanja" v sistemu Galactice, v sistemu raptorja in v sistemu Zemlje!

   Rešitev:
   Ker je dolžina Galactice podana v njenem lastnem sistemu in nas tudi zanima čas "prehitevanja" v sistemu Galactice je

najkrajši pristop k reševanju naloge, da najprej izračunamo hitrost lovca v sistemu Galactice. Označimo takole $v_G = 0.98$ c_0, $v_r = 0.99$ c_0 in $L_G = 18500$ m. Hitrost raptorja v sistemu Galactice izračunamo z uporabo Lorentzove transformacije za hitrosti

$$v_r' = \frac{v_r - v_G}{1 - \frac{v_G}{c_0^2} v_r} = \frac{0.99 - 0.98}{1 - 0.98 \cdot 0.99} c_0 = 0.336 c_0.$$

Čas prehitevanja v Galactici je potem

$$T_G = \frac{L_G}{v_r'} = \frac{18500\mathrm{m}}{0.336 \cdot 3 \cdot 10^8 \mathrm{~m/s}} = 1.835 \cdot 10^{-4} \mathrm{~s}.$$

Zaradi podaljšanja časa opazovalec na Zemlji izmeri daljši čas prehitevanja in sicer

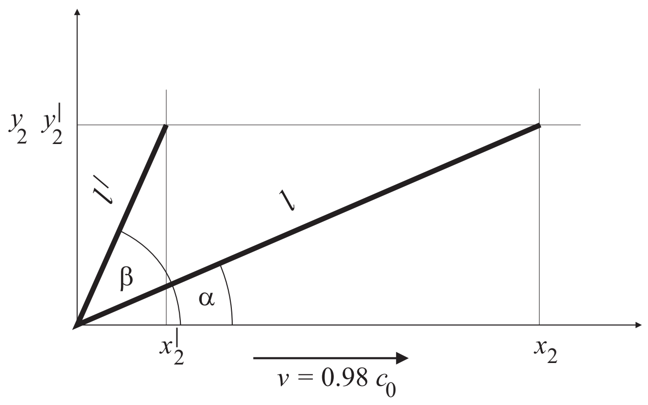
$$T_Z = \gamma_Z T_G = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v_G^2}{c_0^2}}} = 1.835 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{1}{1 - 0.98^2}} \mathrm{~s} = 9.22 \cdot 10^{-4} \mathrm{~s}.$$

Za pilota v raptorju pa je čas prehitevanja krajši:

$$T_r = \frac{T_Z}{\gamma_r} = T_Z \sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c_0^2}} = 9.22 \cdot 10^{-4} \sqrt{1 - 0.99^2} \mathrm{~s} = 1.3 \cdot 10^{-4} \mathrm{~s}.$$

4. Ravna palica je v lastnem sistemu dolga $l = 2$ m. Leži v ravnini xy tako, da oklepa kot $\alpha = 18^o$ z osjo x. Opazovalec se giblje s hitrostjo 0.98 c_0 glede na palico v smeri pozitivne osi x. Kolikšno dolžino palice izmeri ta opazovalec? Kolikšen kot med palico in osjo x izmeri ta opazovalec? Glejte tudi sliko 23.

   Rešitev:
   Reševanja se najprej lotimo na bolj formalističen način. Krajišči palice označimo 1 in 2. V sistemu palice sta koordinati prvega krajišča $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, koordinati drugega krajišča pa sta $x_2 = l \cos\alpha$, $y_2 = l \sin\alpha$. Z Lorentzovo transformacijo



Slika 23:

preslikamo koordinate obe krajišč v sistem gibajočega se opazovalca:

$$x_1' = \gamma\left(x_1 - vt_1\right), \;\; x_2' = \gamma\left(x_2 - vt_2\right),$$

$$y_1' = y_1, \;\; y_2' = y_2.$$

Pri transformaciji obeh koordinat x imamo težavo, ker v izrazih nastopata neznana časa t_1 in t_2. Spomnimo se še Lorentzove transformacije za časovno koordinato:

$$t_1' = \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c_0^2}x_1\right), \;\; t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c_0^2}x_2\right).$$

Iz zadnjih dveh transformacij izrazimo časa t_1 in t_2 in ju vstavimo v Lorentzovi transformaciji za koordinati x_1 in x_2 ter izrazimo x_1' in x_2':

$$x_1' = \gamma\left[x_1\left(1 - \frac{v^2}{c_0^2}\right) - \frac{vt_1'}{\gamma}\right], \; x_2' = \gamma\left[x_2\left(1 - \frac{v^2}{c_0^2}\right) - \frac{vt_2'}{\gamma}\right].$$

Komponenta x dolžine palice je podana z izrazom $l_x' = x_2' - x_1'$. Pri tem pa je potrebno povdariti še nekaj. Če hoče gibajoči se opazovalec izmeriti dolžino palice, mora določiti **sočasno** določiti krajevni koordinati obeh krajišč. Torej mora biti

$$t_1' = t_2'.$$

Potem je

$$l'_x = x'_2 - x'_1 = \gamma \left(1 - \frac{v^2}{c_0^2}\right)(x_2 - x_1) = \frac{x_2 - x_1}{\gamma}. \qquad (201)$$

Ne smemo namreč pozabiti, da je

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}.$$

Dolžina palice, ki jo izmeri gibajoči se opazovalec je potem:

$$l' = \sqrt{l_x^{|2} + l_y^{|2}} = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y^1_1)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x_2 - x_1}{\gamma}\right)^2 + (y_2 - y_1)^2} = l\sqrt{\left(\frac{\cos\alpha}{\gamma}\right)^2 + \sin^2\alpha} = 0.72\,\mathrm{m}.$$

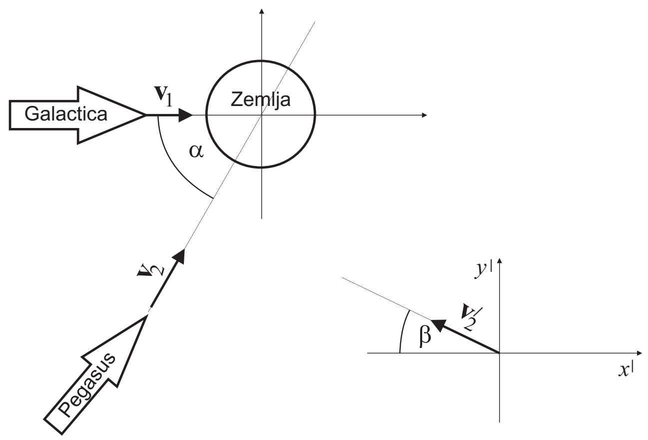
Če pogledamo enačbo (201) pa vidimo, da bi lahko nalogo z bolj intuitivnim razmišljanjem rešili precej hitreje. Ker se opazovalec giblje v smeri osi x, se relativistično skrči projekcija palice glede na to os in temu ustrezno se zmanjša tudi celotna dolžina palice.

Tangens kota β med palico in osjo x, ki ga izmeri gibajoči se opazovalec pa je

$$\tan\beta = \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1} = \gamma\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \gamma\tan\alpha,$$

kot β pa je 51.51^o.

5. Vesoljski križarki Galactica in Pegasus se približujeta Zemlji. Prva s hitrostjo 0.97 c_0 glede na Zemljo, druga pa s hitrostjo 0.99 c_0 glede na Zemljo. Pri tem vektorja hitrosti obeh vesoljskih ladij za opazovalca na Zemlji oklepata kot $\alpha = 54^o$ kot kaže slika 24. Kolikšna je hitrost križarke Pegasus glede na Galactico? Kolikšen je za opazovalca v Galactici kot (β) med vektorjem hitrosti Pegasusa ter zveznico med Galactico in Zemljo?



Slika 24:

Rešitev:
Kot vidimo tudi na sliki 24, se vesoljski ladji gibljeta v ravnini. Zato najprej postavimo koordinatni sistem, da lahko potem vektorja hitrosti obeh ladij zapišemo po komponentah. Zveznico med Galactico in Zemljo izberemo za os x. Potem je vektor hitrosti Galactice takle: $\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y}) = (0.97c_0, 0)$. Vektor hitrosti Pegasusa pa je $\vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y}) = (0.99c_0 \cos\alpha, 0.99c_0 \sin\alpha) = c_0(0.582, 0.801)$. Vesoljska ladja Galactica predstavlja gibajoči se opazovalni sistem, ki se giblje v smeri pozitivne osi x mirujočega opazovalnega sistema - Zemlje. Komponenti hitrosti ladje Pegasus v_{2x} in v_{2y}, ki sta izmerjeni v mirujočem sistemu je potrebno z uporabo Lorentzove transformacije pretvoriti v sistem Galactice. Torej

$$v'_{2x} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{1 - \frac{v_{1x}}{c_0^2} v_{2x}} = \frac{0.582 - 0.97}{1 - 0.97 \cdot 0.582} c_0 = -0.891 c_0,$$

$$v'_{2y} = \frac{v_{2y}}{\gamma \left(1 - \frac{v_{1x}}{c_0^2} v_{2x}\right)} = \frac{v_{2y}\sqrt{1 - \frac{v_{1x}^2}{c_0^2}}}{\left(1 - \frac{v_{1x}}{c_0^2} v_{2x}\right)} = \frac{0.801\sqrt{1 - 0.97^2}}{1 - 0.97 \cdot 0.582} c_0 = \\ = 0.447 c_0.$$

Velikost hitrosti Pegasusa glede na Galactico je potem

$$v'_2 = \sqrt{v'^2_{2x} + v'^2_{2y}} = c_0\sqrt{0.891^2 + 0.447^2} = 0.997 c_0.$$

Tangens kota β, ki ga za opazovalca v Galactici oklepa vektor hitrosti Pegasusa z zveznico med Galactico in Zemljo (to je osjo x) pa je

$$\tan\beta = \frac{v'_{2y}}{v'_{2x}} = \frac{0.447}{-0.891} = -0.502.$$

Kot β je $\beta = -26.6^o$. To pomeni, da se za opazovalca v Galactici Pegasus giblje v smeri proč od Zemlje.

6. Vesoljski postaji se približujeta dve vesoljski ladji. Prva s hitrostjo 0.6 c_0 glede na postajo z leve, druga pa s hitrostjo 0.8 c_0 glede na postajo z desne. Ladji se pri tem ves čas gibljeta po skupni premici. Kolikšna je hitrost prve vesoljske ladje glede na drugo? (0.946 $c_0 = 2.84 \times 10^8$ m/s)

7. Vesoljska križarka Enterprise je v lastnem sistemu dolga 4500 metrov. Križarka leti v smeri svoje dolžine mimo Zemlje s hitrostjo 0.8 c_0 glede na Zemljo. Vesoljska ladja Galactica leti mimo Zemlje s hitrostjo 0.9 c_0 glede na Zemljo. Vesoljski ladji se gibljeta po vzporednih premicah druga proti drugi. Kolikšna je dolžina ladje Enterprise za opazovalca v Galactici? (684 m)

8. Palica je v lastnem sistemu dolga 1 m. Opazovalec, ki se giblje v smeri palice s konstantno hitrostjo, izmeri dolžino palice 80 cm. S kolikšno hitrostjo glede na palico se opazovalec giblje? (0.6 $c_0 = 1.8 \times 10^8$ m/s)

9. V pospeševalniku dobimo protone s kinetično energijo $W_\mathrm{k} =$ 6000 MeV. Kolikšna je njihova hitrost? Mirovna enegija protona $W_0 = 938$ MeV.

   Rešitev:
   olna energija protona (W) je enaka vsoti lastne energije (W_0) in kinetične energije (W_k):

$$W = W_0 + W_\mathrm{k}\,. \qquad (202)$$

Ob upoštevanju [3, 7]:

$$W = \frac{W_0}{\sqrt{1 - v^2/\mathrm{c}_0^2}}\,,$$

kjer je c_0 hitrost svetlobe v vakuumu, iz enačbe (202) sledi:

$$\left(1 - \frac{v^2}{\mathrm{c}_0^2}\right)^{1/2} = \frac{W_0}{W_\mathrm{k} + W_0}\,. \tag{203}$$

Enačbo (203) kvadriramo na obeh straneh:

$$1 - \frac{v^2}{\mathrm{c}_0^2} = \frac{W_0^2}{(W_\mathrm{k} + W_0)^2}\,,$$

od koder sledi:

$$v = \frac{\mathrm{c}_0(W_\mathrm{k}^2 + 2W_0 W_\mathrm{k})^{1/2}}{W_\mathrm{k} + W_0} = 2.97 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}\,.$$

10. Neki delec ima gibalno količino $P = 1254.95\ \mathrm{MeV/c_0}$ in kinetično energijo $W_\mathrm{k} = 628.64$ MeV. Kolikšni sta mirovna masa m_0 in hitrost v tega delca?

Rešitev:
Velja [3, 7]:

$$W^2 = W_0^2 + \mathrm{c}_0^2 P^2\,, \tag{204}$$

kjer je W polna energija, $W_0 = m_0\mathrm{c}_0^2$ lastna energija, c_0 hitrost svetlobe v vakuumu in P gibalna količina delca. Ob upoštevanju:

$$W = W_0 + W_\mathrm{k}\,, \tag{205}$$

kjer je W_k kinetična energija, iz enačbe (204) sledi:

$$(m_0\mathrm{c}_0^2 + W_\mathrm{k})^2 = m_0^2\mathrm{c}_0^4 + \mathrm{c}_0^2 P^2\,,$$

oziroma:

$$2m_0\mathrm{c}_0^2 W_\mathrm{k} + W_\mathrm{k}^2 = \mathrm{c}_0^2 P^2\,. \tag{206}$$

Iz enačbe (206) lahko izračunamo mirovno maso

$$m_0 = \frac{\mathrm{c}_0^2 P^2 - W_\mathrm{k}^2}{2W_\mathrm{k}\mathrm{c}_0^2} = 938\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}_0^2}\,.$$

Relativistična gibalna količina P je [3, 7]:

$$P = \frac{m_0 v}{(1 - v^2/\mathrm{c}_0^2)^{1/2}} \,. \tag{207}$$

Iz enačbe po krajšem računu sledi:

$$v = \frac{P}{\sqrt{m_0^2 + P^2/\mathrm{c}_0^2}} = 0.8\mathrm{c}_0 \,.$$

11. Kolikšna je kinetična energija protona (W_k), ki enakomerno kroži v prečnem homogenem magnetnem polju z gostoto $B = 1.2$ T po tiru s polmerom $R = 15$ m? Računajte relativistično!

Rešitev:
Magnetno polje ne opravlja dela, torej sta protonova kinetična energija in velikost hitrosti (v) konstantni. Zapišimo zakon gibanja v relativistični obliki [3]:

$$\frac{\mathrm{d}(m\gamma\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}_0\vec{v} \times \vec{B} \,, \tag{208}$$

kjer je $\gamma = (1 - v^2/\mathrm{c}_0^2)^{-1/2}$. Ker je velikost hitrosti v konstantna, zapišemo enačbo (208) v obliki:

$$m\gamma\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}_0\vec{v} \times \vec{B} \,. \tag{209}$$

Pospešek $\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$ je v našem primeru enak centripetalnemu pospešku $\vec{a}_r = v^2\,\vec{R}/R^2$, tako da lahko enačbo (209) v skalarni obliki zapišemo kot:

$$m\gamma a_r = \mathrm{e}_0 v B \,,$$

od koder sledi:

$$m\gamma\frac{v^2}{R} = \mathrm{e}_0 v B \,,$$

oziroma:

$$m\gamma v = \mathrm{e}_0 R B \,. \tag{210}$$

Ob upoštevanju definicije relativistične gibalne količine [3] $P = m\gamma v$ zapišemo enačbo (210) v obliki:

$$P = \mathrm{e}_0 R B \,. \tag{211}$$

Iz zvez [3] $W^2 = \mathrm{c}_0^2 P^2 + W_0^2$ ter $W^2 = (W_\mathrm{k} + W_0)^2$ po krajšem računu dobimo še:

$$W_\mathrm{k}^2 + 2W_\mathrm{k}W_0 - \mathrm{c}_0^2 P^2 = 0 \,, \tag{212}$$

kjer je W_0 lastna energija protona. Izraz za gibalno količino iz enačbe (211) vstavimo v enačbo (212) in dobimo:

$$W_\mathrm{k}^2 + 2W_\mathrm{k}W_0 - \mathrm{e}_0^2 R^2 B^2 \mathrm{c}_0^2 = 0 \,. \tag{213}$$

Dobili smo kvadratno enačbo za kinetično energijo W_k katere rešitev je:

$$\begin{aligned} W_\mathrm{k} &= -W_0 + W_0\sqrt{(1 + \mathrm{e}_0^2 R^2 B^2 \mathrm{c}_0^2)} = \\ &= W_0 \left(\sqrt{1 + \frac{\mathrm{e}_0^2 R^2 B^2 \mathrm{c}_0^2}{W_0^2}} - 1 \right) = \; 4.54 \text{ GeV} \,. \end{aligned}$$

12. Kolikšna je kinetična energija elektrona, ki se giblje s hitrostjo 0.928 c_0?
    (5900 MeV)

13. Kolikšni sta kinetična energija in hitrost elektrona, ki ima gibalno količino 4 MeV/c_0? Mirovna masa elektrona je 0.51 MeV/c_0^2.

14. Kolikšni sta gibalna količina in kinetična energija elektrona, ki se giblje s hitrostjo 0.9 c_0? Mirovna masa elektrona je 0.51 MeV/c_0^2.

15. Delec se giblje s hitrostjo 240000 km/s. Če bi njegovo kinetično energijo računali klasično, bi dobili vrednost 0.1632 MeV. Kolikšna je njegova masa in kolikšna je njegova kinetična energija (računana relativistično)?
    (0.51 MeV/c_0^2, 0.34 MeV)

16. Pioni se gibljejo s hitrostjo v=2.74 × 10^8 m/s skozi 110 cm (x) širok števec. Kolikšen del pionov razpade v števcu, če je lastni razpadni čas pionov τ_0=2.6 × 10^{-8} s in se delci v števcu gibljejo skoraj neovirano?

   Rešitev:
   Lastni časovni razmik izmeri ura, ki se giblje skupaj z delcem. Laboratorijski razpadni čas (τ) je daljši kot lastni razpadni čas (τ_0):

$$\tau = \gamma\tau_0 = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}\,, \tag{214}$$

   kjer je c_0 hitrost svetlobe v vakuumu. Velja:

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\,, \tag{215}$$

   kjer je $N_0 = N(t = 0)$, čas gibanja piona skozi števec pa je:

$$t = \frac{x}{v}\,. \tag{216}$$

   S kombinacijo enačb (214), (215) in (216) dobimo:

$$\frac{N_0 - N}{N_0} = 1 - \frac{N}{N_0} = 1 - \exp\left(-\frac{x\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}{v\,\tau_0}\right) = 0.061\,.$$

17. Pri premočrtnem in skoraj neoviranem gibanju skozi števec napravijo mezoni π pot 1.20 m. Mezoni se gibljejo skozi števec s hitrostjo 2.85 × 10^8 m/s. Kolikšen del mezonov razpade v števcu, če je njihov razpolovni čas 1.7 × 10^{-8} s?
   (0.052)

18. Mirujoč elektron damo v homogeno električno polje z jakostjo 3 kV/m. Kolikšno pot opravi elektron, ko v sistemu elektrona minejo prve 3 μs? Kolikšna je tedaj njegova kinetična energija in kolikšna je gibalna količina? Mirovna masa elektrona je 0.51 MeV/c_0^2.
   (745 m)

19. Mirujoča vesoljska ladja se začne gibati premo s pospeškom, ki je v sistemu ladje konstanten in enak $a_0 = 5$ m/s^2. Koliko časa (t_1) mine v vesoljski ladji, preden doseže 95 % svetlobne hitrosti? (Označimo $v_1 = pc_0$, $p = 0.95$). Kolikšno pot (s) opravi ladja v tem času?

Rešitev:
Pospešek a_0, merjen v sistemu ladje, je v vsakem trenutku enak odvodu hitrosti po lastnem času:

$$a_0 = \frac{d}{dt}(\gamma v) = \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c_0^2}}}\right),$$

$$a_0 = \frac{dv}{dt}\left(1-\frac{v^2}{c_0^2}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Dobili smo diferencialno enačbo, katere rešitev je hitrost kot funkcija lastnega časa $v(t)$. Ločimo spremenljivki:

$$a_0 dt = \frac{dv}{\left(1-\frac{v^2}{c_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

nato pa integriramo:

$$a_0 \int_0^{t_1} dt = \int_0^{v_1} \frac{dv}{\left(1-\frac{v^2}{c_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$a_0 t_1 = \frac{c_0 v_1}{\sqrt{c_0^2 - v_1^2}} = \frac{pc_0}{\sqrt{1-p^2}}, \tag{217}$$

$$t_1 = \frac{pc_0}{a_0\sqrt{1-p^2}}.$$

Če zaokrožimo $c_0 = 3{\cdot}10^8$ m/s, dobimo $t_1 = 1.92154{\cdot}10^8$ s. To je približno 6 let in 34 dni.

Sedaj poiščemo šo opravljeno pot. Pot je integral hitrosti po lastnem času. Najprej iz enačbe (217) poiščemo hitrost kot funkcijo lastnega časa:

$$v(t) = \frac{a_0 c_0 t}{\sqrt{c_0^2 + a_0^2 t^2}}.$$

Opravljena pot je

$$s = \int_0^{t_1} v(t)dt = a_0 c_0 \int_0^{t_1} \frac{tdt}{\sqrt{c_0^2 + a_0^2 t^2}} =$$

$$= \frac{c_0^2}{a_0}\left(\sqrt{1 + \frac{a_0^2 t_1^2}{c_0^2}} - 1\right) = \frac{c_0^2}{a_0}\left(\sqrt{\frac{1}{1-p^2}} - 1\right).$$

Če v zgornji razultat vstavimo $c_0 = 3{\cdot}10^8$ m/s, $a_0 = 5\text{m/s}^2$ in $p = 0.95$, dobimo pot $3.96{\cdot}10^{16}$ m, kar je približno 4.19 svetlobnih let.

20. Elektron se giblje v homogenem električnem polju z jakostjo 2 kV/m. Kolikšna je njegova kinetična energija po 1.5 μs, če je elektron v začetku miroval? Računajte relativistično! (0.523MeV)

21. Sinhrociklotron pospešuje protone do kinetične energije $W_\mathrm{k} =$ 700 MeV. Kolikokrat moramo povečati (zmanjšati) frekvenco pospeševalnega polja, da krožijo protoni ves čas sinhrono s poljem?

    Rešitev:
    Klasičen opis:
    Napišimo enačbo gibanja:

    $$ma_r = \mathrm{e}_0 v B\,, \tag{218}$$

    kjer je m masa protona, a_r centripetalni pospešek, v hitrost, e_0 osnovni naboj in B gostota magnetnega polja. Ob upoštevanju relacije:

    $$a_r = \frac{v^2}{R}\,, \tag{219}$$

kjer je R polmer krožnice po kateri kroži proton, iz enačbe (218) sledi:

$$m\,\frac{v^2}{R} = e_0 v B\,,$$

od tod pa:

$$\omega_{\mathrm{kl}} = \frac{v}{R} = \frac{\mathrm{e}_0 B}{m}\,. \tag{220}$$

Relativistični opis:
Napišimo enačbo gibanja:

$$\frac{\mathrm{d}(m\gamma\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}_0\vec{v}\times\vec{B}\,, \tag{221}$$

kjer je $\gamma = (1 - v^2/c_0^2)^{-1/2}$, c_0 je hitrost svetlobe v vakuumu. Ker je v=konst iz (221) sledi:

$$m\gamma\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}_0\vec{v}\times\vec{B}\,,$$

oziroma:

$$m\gamma a_r = \mathrm{e}_0 v B\,. \tag{222}$$

Zopet upoštevamo enačbo (219), torej:

$$m\gamma\,\frac{v^2}{R} = \mathrm{e}_0 v B\,,$$

oziroma:

$$\omega_{rel} = \frac{v}{R} = \frac{\mathrm{e}_0 B}{m}\left(1 - \frac{v^2}{\mathrm{c}_0^2}\right)^{1/2}\,. \tag{223}$$

Iz enačb (220) in (223) pa sledi:

$$\frac{\omega_{\mathrm{rel}}}{\omega_{\mathrm{kl}}} = \left(1 - \frac{v^2}{\mathrm{c}_0^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{1 + W_{\mathrm{k}}/mc_0^2} = 0.57\,. \tag{224}$$

22. Kolikšno električno napetost mora preleteti v začetku mirujoče He jedro, da bo po prihodu v prečno homogeno magnetno polje z gostoto 1 T začelo krožiti po krožnem tiru s polmerom 15 m? (m_{He} = 4,002603 a.e.m.)
(3×10^9 V)

23. V začetku mirujoč dvakrat ioniziran helijev ion preleti napetost 8 GV preden prileti v homogeno magnetno polje z gostoto 1.5 T tako, da je kot med vektorjema hitrosti in magnetnega polja 90°. Kolikšna je ukrivljenost tira po katerem se začne gibati helijev ion?
(0.0464 m^{-1})

24. Dvakrat ioniziran helijev ion preleti napetost 10^4 V in prileti v homogeno magnetno polje gostote 1.5 T tako, da je kot med vektorjema hitrosti in magnetnega polja 90°. Kolikšen je obhodni čas iona v magnetnem polju?
(8.77×10^{-8} s)

25. Dvakrat ioniziran helijev ion preleti napetost 10^4 V in prileti v homogeno magnetno polje gostote 1.5 T, tako da je kot med vektorjema hitrosti in magnetnega polja 90°. Kolikšen je ciklotronski polmer tira po katerem zakroži?

26. Kolikšna je gostota magnetnega polja, če proton kroži v ravnini, ki je pravokotna na smer polja s kinetično energijo 4 GeV po tiru s polmerom 16 m? Računajte relativistično!
(1 T)

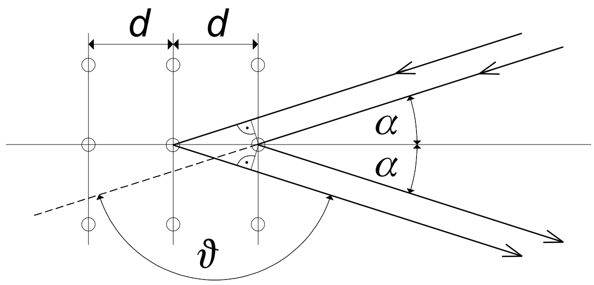
27. Kolikšna je kinetična energija in gibalna količina protona, ki v homogenem magnetnem polju z gostoto 1 T, kroži po tiru s polmerom 12 m? Mirovna masa protona je 938.3 MeV/c_0^2. Računajte relativistično!

28. Kolikšna je kinetična energija elektrona, ki v homogenem magnetnem polju z gostoto 1 T kroži po tiru s polmerom 1 m? Mirovna masa elektrona je 0.51 MeV/c_0^2. Računajte relativistično!

29. Kolikšna je hitrost protona, ki v homogenem magnetnem polju z gostoto 1 T, kroži po tiru s polmerom 11 m? Mirovna masa protona je 938.3 MeV/c_0^2. Računajte relativistično!

6 Kvantna mehanika

1. Paralelne ravnine kristala so oddaljene za $d = 0.3$ nm. Na kristal posvetimo z monokromatskim snopom rentgenske svetlobe z valovno dolžino $\lambda = 5 \times 10^{-3}$ nm. Kolikšen je minimalni sipalni kot tega snopa?



Slika 25:

Rešitev:
Pogoj za ojačenje curka rentgenske svetlobe zapišemo v obliki (glejte sliko 25):

$$2d\cos\alpha = N\alpha\,,\ \ N = 1, 2, 3... \tag{225}$$

Ker velja $\pi = 2\alpha + \vartheta$, lahko zapišemo:

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2}\right) = \sin\frac{\vartheta}{2}\,. \tag{226}$$

Iz enačb (225) in (226) tako dobimo:

$$2d\sin\frac{\vartheta}{2} = N\lambda\,. \tag{227}$$

Za $N = 1$ iz enačbe (227) sledi:

$$\vartheta_{\min} = 2\arcsin\left(\frac{\lambda}{2d}\right) = \ 0.95\,.$$

2. Katodo fotocelice osvetljujemo s svetlobo valovne dolžine $\lambda =$ 500 nm. Površina osvetljenega dela katode je $S = 1$ cm^2. Kolikšna je gostota vpadnega svetlobnega toka (j), če je nasičeni

električni tok skozi fotocelico $I = 10$ mA? Upoštevajte, da v povprečju le vsak deseti foton izbije elektron.

Rešitev:
Gostota vpadnega svetlobnega toka je:

$$j = \frac{P}{S} = \frac{\mathrm{h}\nu\,\mathrm{d}N}{S\,\mathrm{d}t}\,, \tag{228}$$

kjer je P svetlobni tok, h Planckova konstanta, ν frekvenca svetlobe in $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$ število fotonov, ki padejo v enoti časa na katodo fotocelice. Upoštevali smo, da je energija fotona enaka $\mathrm{h}\nu$. Izkoristek fotocelice $\eta = 0.1$, zato je nasičeni električni tok enak:

$$I = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \eta\,\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{e}_0\,, \tag{229}$$

kjer je e_0 osnovni naboj. Iz enačbe (229) izrazimo:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{I}{\eta \mathrm{e}_0}$$

in ga vstavimo v enačbo (228). Tako dobimo:

$$j = \frac{I}{\eta \mathrm{e}_0}\frac{\mathrm{hc}_0}{S\lambda} = \ 2.48 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\,.$$

3. Na ploščico iz volframa z izstopnim delom 4.5 eV pada svetloba z valovno dolžino 90 nm. Kolikšna je lahko največ hitrost izbitih elektronov? Mirovna masa elektrona je 0.51 $\mathrm{MeV/c_0^2}$.

4. Fotokatoda iz cezija, ki ima izstopno delo 1.97 eV je osvetljena s svetlobo valovne dolžine 450 nm. Kolikšna je lahko največ kinetična energija izstopajočih elektronov?

5. Svetloba z valovno dolžino 124 nm osvetljuje fotokatodo, ki ima izstopno delo 2 eV. Kolikšna je lahko največ kinetična energija izstopajočih elektronov? Kolikšna je hitrost teh elektronov? Ali je problem potrebno obravnavati relativistično? Mirovna masa elektrona je $0.51 \times 10^6\ \mathrm{eV/c_0^2}$.

6. Od fotonov, ki padejo na katodo fotocelice, v povprečju samo vsak šesti izbije elektron. Kolikšen nasičeni električni tok teče skozi fotocelico, če pada na katodo svetlobni tok 6 W, valovna dolžina svetlobe pa je 500 nm?

7. Foton z valovno dolžino 0.02 nm se Comptonsko sipa na mi rujo čem elektronu pod kotom 90^o glede na njegovo prvotno smer. Poiščite spremembo valovne dolžine fotona in gibalno količino elektrona po sipanju!
(0.0024 nm, 4.41×10^{-23} $\mathrm{kgms^{-1}}$)

8. Foton z valovno dolžino 0.03 nm se Comptonsko sipa pod kotom 90^o glede na njegovo prvotno smer. Poiščite spremembo valovne dolžine fotona! Kolikšna je kinetična energija elektrona po sipanju?
(0.0024 nm, 3.065 keV)

9. Pravokotno na tanko kvadratno zglajeno kovinsko ploščico, ki se nahaja v vakuumu, usmerimo monokromatski svetlobni tok svetlobe z valovno dolžino 500 nm, ki deluje na ploščico s tlakom $10^{-9}\mathrm{N/cm^2}$. Kolikšna je stacionarna temperatura ploščice? Koliko fotonov zadane ploščico v eni sekundi? Odbojnost ploščice za vpadno svetlobo je 0.8, stranica ploščice pa je dolga 1 cm.
(4.19×10^{17} fotonov, 348 K)

10. Na kovinsko ploščico, ki leži na ravni mizi, z izstopnim delom 3.5 eV pada snop svetlobe z valovno dolžino 90 nm. Ploščica je v vakuumu in v homogenem magnetnem polju z gostoto 0.0016 T. Magnetno polje je vzporedno s ploščico. Koliko časa potrebujejo izbiti elektroni, da dosežejo maksimalno oddaljenost od roba ploščice?
(11.17×10^{-9} s)

11. Sprememba valovne dolžine fotonov z energijo $\mathrm{h}\nu = 60$ keV pri interakciji s slabo vezanimi elektroni je enaka Comptonovi valovni dolžini ($\lambda_\mathrm{c} = 0.0024$ nm). Kolikšna je kinetična energija (W_k) elektrona po interakciji? Pod katerim kotom se razhajata elektron in foton po interakciji?

Rešitev:
Ker je $\lambda' - \lambda = \lambda_c$ iz Comptonove enačbe [3]:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_{\mathrm{c}}(1 - \cos\vartheta)\,,$$

sledi, da je kot med smerjo vpadnega in sipanega fotona (ϑ) enak 90°. Upoštevamo, da je $\lambda_{\mathrm{c}} = \mathrm{h}/m_{0\mathrm{e}}\mathrm{c}_0$, iz česar sledi:

$$\lambda' = \lambda + \frac{\mathrm{h}}{m_{0\mathrm{e}}\mathrm{c}_0}\,, \tag{230}$$

kjer je λ' valovna dolžina sipanega fotona, $m_{0\mathrm{e}}$ mirovna masa elektrona, c_0 hitrost svetlobe v vakuumu in h Planckova konstanta. Iz enačbe (230) sledi:

$$\frac{\mathrm{c}_0}{\nu'} = \frac{\mathrm{c}_0}{\nu} + \frac{h}{m_{0\mathrm{e}}\mathrm{c}_0}\,,$$

od tod pa:

$$\frac{\mathrm{c}_0}{\nu'} = \frac{m_{0\mathrm{e}}\mathrm{c}_0^2 + \mathrm{h}\nu}{\nu m_{0\mathrm{e}}\mathrm{c}_0}\,,$$

oziroma

$$\mathrm{h}\nu' = \frac{\mathrm{h}\nu m_{0\mathrm{e}}\mathrm{c}_0^2}{m_{0\mathrm{e}}\mathrm{c}_0^2 + \mathrm{h}\nu}\,. \tag{231}$$

Iz enačbe 231 dobimo zvezo:

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{m_{0\mathrm{e}}\mathrm{c}_0^2}{m_{0\mathrm{e}}\mathrm{c}_0^2 + \mathrm{h}\nu}\,. \tag{232}$$

Za trk fotona s skoraj prostim elektronom velja ohranitev polne energije:

$$m_{0e}c_0^2 + h\nu = m_{0\mathrm{e}}\mathrm{c}_0^2 + W_{\mathrm{k}} + \mathrm{h}\nu'\,, \tag{233}$$

kjer je W_{k} kinetična energija elektrona po interakciji. Iz enačbe (233) sledi:

$$W_{\mathrm{k}} = \mathrm{h}\nu - \mathrm{h}\nu'\,. \tag{234}$$

Če vstavimo izraz za $\mathrm{h}\nu'$ iz enačbe (231) v enačbo (234) dobimo:

$$W_{\mathrm{k}} = \mathrm{h}\nu\Big(1 - \frac{m_{0\mathrm{e}}\mathrm{c}_0^2}{m_{0\mathrm{e}}\mathrm{c}_0^2 + \mathrm{h}\nu}\Big) = \mathrm{h}\nu\Big(\frac{\mathrm{h}\nu}{m_{0\mathrm{e}}\mathrm{c}_0^2 + \mathrm{h}\nu}\Big) = \ 6.3\ \mathrm{keV}\,.$$

Za trk velja tudi zakon o ohranitvi gibalne količine. Zapišemo ga po komponentah:

$$\frac{\mathrm{h}}{\lambda'} = P_{\mathrm{e}} \sin\varphi \,, \tag{235}$$

$$\frac{\mathrm{h}}{\lambda} = P_{\mathrm{e}} \cos\varphi \,, \tag{236}$$

kjer smo upoštevali, da je gibalna količina fotona enaka h/λ, P_{e} je gibalna količina elektrona, φ pa je kot pod katerim odleti elektron po trku glede na smer vpadnega fotona. Iz enačb (235) in (236) sledi:

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \mathrm{tg}\,\varphi \,. \tag{237}$$

V enačbo (237) vstavimo za kvocient λ/λ' izraz iz enačbe (232). Tako dobimo:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{m_{0\mathrm{e}}\mathrm{c}_0^2}{m_{0\mathrm{e}}\mathrm{c}_0^2 + \mathrm{h}\nu} \,, \tag{238}$$

od tod pa sledi

$$\varphi = \mathrm{arctg}\,(\frac{\mathrm{h}\nu}{m_{\mathrm{e}}\mathrm{c}_0^2 + \mathrm{h}\nu}) = \ 41.8^\circ \,.$$

Izračunajmo še kot pod katerim se razhajata elektron in foton po interakciji (trku):

$$\varphi + \vartheta = \ 131.8^\circ.$$

12. Pozitron s kinetično energijo 20 MeV trči v mirujoč elektron in se z njim v letu anihilira. Za koliko se razlikujeta energiji nastalih žarkov γ, od katerih odleti eden v smeri leta pozitrona, drugi pa v nasprotni smeri? Upoštevajte ohranitev gibalne količine!
(20.5 MeV)

13. Pozitron s kinetično energijo 2 MeV trči v elektron s kinetično energijo 3 MeV in se z njim anihilira. Nastaneta dva fotona,

od katerih eden odleti v smeri elektrona, drugi pa v smeri pozi tro na. Kolikšni sta valovni dolžini nastalih fotonov? Mirovni masi elektrona in pozitrona sta 0.51 MeV/c_0^2. Elektron in pozitron sta se pred trkom gibala drug proti drugemu po isti premici.

Rešitev:
Označimo $W_1 = 2$ MeV, W_2 =3 MeV, $m_0 = 0.51$ MeV/c_0^2. Ohranitev gibalne količine zapišemo takole:

$$p_1 - p_2 = \frac{h}{\lambda_1} - \frac{h}{\lambda_2}. \tag{239}$$

Pri tem je p_1 gibalna količina pozitrona pred trkom, p_2 je gibalna količina elektrona pred trkom, λ_1 je valovna dolžina fotona, ki odleti v smeri, ki jo je pred trkom imel pozitron, λ_2 pa valovna količina fotona, ki odleti v smeri, ki jo je pred trkom imel elektron. Ohrani se tudi energija:

$$2m_0c_0^2 + W_1 + W_2 = \frac{hc_0}{\lambda_1} + \frac{hc_0}{\lambda_2}. \tag{240}$$

Enačbo (239) pomnožimo s c_0 nato pa enačbi (239) in (240) enkrat med seboj seštejemo in drugič odštejemo ter vsakokrat izrazimo ustrezno valovno dolžino:

$$\lambda_1 = \frac{2hc_0}{2m_0c_0^2 + W_1 + W_2 + c_0(p_1 - p_2)},$$

$$\lambda_2 = \frac{2hc_0}{2m_0c_0^2 + W_1 + W_2 - c_0(p_1 - p_2)}.$$

Obe gibalni količini pa izrazimo iz znane relativistične zveze med gibalno količino in kinetično energijo, ki pravi:

$$\left(m_0c_0^2 + W_k^2\right)^2 = m_0^2c_0^4 + p^2c_0^2.$$

Torej sta gibalni količini:

$$p_1 = \frac{\sqrt{W_1(W_1 + 2m_0c_0^2)}}{c_0}, \quad p_2 = \frac{\sqrt{W_2(W_2 + 2m_0c_0^2)}}{c_0}.$$

Ko vstavimo podatke, dobimo za gibalni količini pozitrona in elektrona $p_1 = 2.46$ MeV/c_0 in $p_2 = 3.47$ MeV/c_0, valovni dolžini pa sta potem $\lambda_1 = 6{\cdot}10^{-13}$ m in $\lambda_2 = 4.1{\cdot}10^{-13}$ m.

14. Pozitron ima kinetično energijo 1 MeV. Za njim po isti premici leti elektron s kinetično energijo 3 MeV. Ko elektron dohiti pozitron, se delca anihilirata. Nastaneta dva fotona, od katerih eden odleti v smeri elektrona in pozitrona, drugi pa v nasprotni smeri. Kolikšni sta valovni dolžini nastalih fotonov? Mirovni masi elektrona in pozitrona sta 0.51 MeV/c_0^2.

15. Elektron pospešimo z napetostjo 10^6 voltov. Kolikšna je de Broglieva valovna dolžina tega elektrona? Mirovna masa elektrona je 0.51 MeV/c_0^2.

16. Kolikšni sta kinetična energija in de Broglieva valovna dolžina delca, ki ima mirovno maso 0.51 MeV/c_0^2 in se giblje s hitrostjo 0.9 c_0?

17. Kolikšna je de Broglijeva valovna dolžina elektrona, ki ga je pospešila napetost 10^7 V, na začetku pa je miroval? Mirovna masa elektrona je 0.51 MeV/c_0^2, naboj elektrona pa je -1.6 $\times$ 10^{-19} As.

18. Eden izmed fotonov, ki nastane pri anihilaciji mirujočega pozitrona in mirujočega elektrona, se Comptonsko sipa pod kotom 90^o glede na njegovo vpadno smer. Kolikšen je polmer kroga, ki ga opiše izbiti elektron v ravnini, ki je pravokotna na magnetno polje gostote 10^{-3} T? Računajte relativistično!
(1.91 m)

19. Proton z de Broglievo valovno dolžino 2×10^{-11} m prileti v homogeno magnetno polje z gostoto 0.1 T tako, da je njegova hitrost pravokotna na silnice magnetnega polja. Kolikšen je ciklotronski polmer tira po katerem zakroži?

7 Zgradba atoma

1. Elektron v vodikovem atomu preide iz prvega vzbujenega v osnovno stanje. Kolikšna je valovna dolžina svetlobe, ki se pri tem izseva? Uporabite Bohrov model vodikovega atoma!

   Rešitev:
   V Bohrovem modelu vodikovega atoma je energija elektrona v vodikovem atomu kvantizirana, to pomeni, da lahko ima samo določene diskretne vrednosti, ki jih podaja izraz:

   $$W_n = -W_r \frac{1}{n^2}.$$

   Pri tem je W_r Rydbergova energija:

   $$W_r = \frac{e_0^2}{8\pi\varepsilon_0 r_B} = 13.6\,\mathrm{eV},$$

   n je celo število $n = 1, 2, 3, ...$ r_B pa je Bohrov radij:

   $$r_B = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{e_0^2 m_e} = 53 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}.$$

   Pri tem je $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05{\cdot}10^{-34}$ Js. V prvem vzbujenem stanju je $n = 2$, v osnovnem stanju pa je $n = 1$. V prvem vzbujenem stanju je torej energija večja, kot v osnovnem stanju, ker je manj negativna. Po absolutni vrednosti pa je energija prvega vzbujenega stanja manjša od energije v osnovnem stanju. Sprememba energije ΔW pri prehodu iz prvega vzbujenega v osnovno stanje je torej:

   $$\Delta W = W_1 - W_2 = -W_r - \left(-\frac{W_r}{4}\right) = -\frac{3W_r}{4} = -10.2\,\mathrm{eV}.$$

   Energija elektrona se je torej zmanjšala za 10.2 eV. To energijo elektron odda v obliki izsevane svetlobe. Valovno dolžino λ svetlobe, ki se pri tem izseva, izračunamo iz:

   $$\frac{hc_0}{\lambda} = |\Delta W|,\ \lambda = \frac{hc_0}{|\Delta W|} = 121.57\,\mathrm{nm}.$$

Takšne izračune si zelo olajšamo, če si zapomnimo, da je produkt Planckove konstante in hitrosti svetlobe enak

$$hc_0 = 1240\,\mathrm{eVnm}.$$

2. Elektron v vodikovem atomu je v drugem vzbujenem stanju. Z uporabo Bohrovega modela ocenite obodno hitrost in polmer kroženja za ta elektron!

   Rešitev:
   V Bohrovem modelu je tudi vrtilna količina elektronov na njihovih tirih kvantizirana in lahko zavzame samo diskretne vrednosti

   $$\Gamma = n\hbar,\ n = 1, 2, ...,$$

   posledica tega pa je (glejte npr. [20] - str 181), da imajo tudi polmeri tirov lahko samo naslednje diskretne vrednosti:

   $$r_n = r_B n^2.$$

   Za elektron v drugem vzbujenem stanju velja $n = 3$. Iz zgornje formule dobimo:

   $$r_3 = 9r_B = 477 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}.$$

   Vrtilna količina tega elektrona je

   $$\Gamma = 3\hbar = m_e r_3 v = m_e 9 r_B v.$$

   Hitrost tega elektrona pa ocenimo takole:

   $$v = \frac{\hbar}{3m_e r_B} = \frac{\hbar c_0}{3m_e r_B c_0} = \frac{197\mathrm{evnm}c_0^2}{3 \cdot 510000 c_0\mathrm{eV} \cdot 53 \cdot 10^{-3}\mathrm{nm}} =$$

   $$= 0.0024c_0 = 728820\,\mathrm{m/s}.$$

   Pri računu smo si pomagali z zaokrožitvijo:

   $$\hbar c_0 = 197\,\mathrm{eVnm}.$$

3. Kolikšna mora biti valovna dolžina svetlobe, s katero obsevamo vodikov atom, da bo elektron prešel iz drugega v tretje vzbujeno stanje? Uporabite Bohrov model vodikovega atoma!

Rešitev:
Za drugo vzbujeno stanje je $n = 3$, za tretje vzbujeno stanje pa $n = 4$. Foton svetlobe, s katero obsevamo atom, mora priskrbeti elektronu energijsko razliko med tema dvema stanjema:

$$\frac{hc_0}{\lambda} = W_4 - W_3 = -\frac{W_r}{16} - \left(-\frac{W_r}{9}\right) = \frac{7}{144}W_r,$$

Od to dobimo

$$\lambda = \frac{144hc_0}{7W_r} = 1875.63\,\text{nm}.$$

8 Atomsko jedro

1. Mirujoče atomsko jedro $_{84}\mathrm{Po}^{210}$ se z emisijo delca α s kinetično energijo 5.3 MeV pretvori v neko drugo atomsko jedro. Kolikšna je mirovna masa, kinetična energija in gibalna količina novonastalega jedra? Masa α delca je $\mathrm{m}_\alpha = 4.00260$ a.e.m., masa atoma polonija pa $\mathrm{m}_{\mathrm{Po}} = 209{,}98287$ a.e.m..
(205.97459 a.e.m., 0.103 MeV, 10.61×10^{-20} kgms^{-1})

2. Helijevo jedro, ki vstopa v reakcijo $^4\mathrm{He} +^{14}\mathrm{N} \longrightarrow^{17}\mathrm{O}_1 +^1\mathrm{H}$, ima tako kinetično energijo, da sta hitrosti ^{17}O in ^{1}H po reakciji ravno enaki. Kolišna je omenjena hitrost ^{17}O in ^{1}H, če je dušikovo jedro pred reakcijo mirovalo? Produkta reakcije letita v smeri vpadnega delca. Mase atomov, ki nastopajo v reakviji so: $\mathrm{m}_{\mathrm{He}} = 4.002603$ a.e.m., $\mathrm{m}_{\mathrm{N}} = 14.003074$ a.e.m., $\mathrm{m}_{\mathrm{O}} = 16.999134$ a.e.m. in $\mathrm{m}_{\mathrm{H}} = 1.007825$ a.e.m..
(8.58×10^6 m/s)

3. Za obsevanje potrebujemo radioaktivni izvor z aktivnostjo vsaj 10 razpadov v sekundi. Izračunaj kolikšna mora biti aktivnost izvora ob dobavi, da bo uporaben vsaj dva meseca? Razpolovni čas izotopa je 5 mesecev.
(1.32×10^9 s^{-1})

4. Z radioizotopom Co^{60} obsevamo pacienta; 1 cm pod kožo v tkivu je dobil dozo 1 J/kg. Kolikšna je bila doza 3 cm globoko v tkivu, če je absobcijski koeficient za tkivo pri kobaltovih gama žarkih 0.031 cm^{-1} ?
(0.94 J/kg)

5. V 72 urah razpade 87.5 odstotkov nekega radioaktivnega izotopa. Kolikšna sta razpolovni čas in razpadna konstanta za ta izotop?

6. Pri radioaktivnem razpadu izotopa broma je v časovnem intervalu $\Delta t = 60$ s verjetnost razpada P = 0.1042. Kolikšen je razpolovni čas ($t_{1/2}$) tega izotopa?

Rešitev:

Označimo $\Delta t = t_2 - t_1$ in $\Delta N = N_1 - N_2$, kjer je N_2 število atomov broma ob času t_2 in N_1 število atomov broma ob času t_1. Velja:

$$P = \frac{N_1 - N_2}{N_1} = 1 - \frac{N_2}{N_1}\,. \tag{241}$$

Ob upoštevanju relacije:

$$N_2 = N_1 \exp\left(-\frac{\ln 2 \Delta t}{t_{1/2}}\right), \tag{242}$$

iz enačbe (241) sledi:

$$P = 1 - \exp\left(-\frac{\ln 2\, \Delta t}{t_{1/2}}\right). \tag{243}$$

Iz enačbe (243) pa sledi:

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2\, \Delta t}{\ln(1/1 - P)} = \ 378 \text{ s}\,.$$

7. Polonij 210 emitira delce α z razpolovnim časom $t_{1/2}$=138.4 dni. Kolikšna je pri tlaku $p = 10^5$ Pa in temperaturi $T = 273$ K prostornina helija (V), ki je nastal iz delcev α, ki jih je emitiral vzorec polonija v prvih 124 (t_0) dneh? Predpostavimo, da se vsi α delci pretvorijo v helij. Masa vzorca polonija je m_0=2 g. Molekulska masa helija je $M = 4$ kg/kmol.

   Rešitev:
   Število atomov $_{84}\mathrm{Po}^{210}$ pojema eksponentno s časom (t):

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{t \ln 2}{t_{1/2}}\right)\,.$$

   Število atomov polonija, ki oddajo delec α je:

$$\Delta N = (N_0 - N) = N_0\left(1 - \exp\left(-\frac{t\ln 2}{t_{1/2}}\right)\right).$$

   Masa vseh atomov polonija, ki so oddali delec α pa je:

$$\Delta m_0 = m_0\left(1 - \exp\left(-\frac{t\ln 2}{t_{1/2}}\right)\right).$$

Masa helijevega plina, ki je pri tem nastal, izrazimo v obliki:

$$m = \frac{4}{210}\, m_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t\ln 2}{t_{1/2}}\right)\right). \tag{244}$$

Za helijev plin zapišemo plinsko enačbo:

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

od koder sledi:

$$m = \frac{pVM}{RT}. \tag{245}$$

Kombinacija enačb (244) in (245) nas pripelje do zveze:

$$\frac{pVM}{RT} = \frac{4}{210}\, m_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t\ln 2}{t_{1/2}}\right)\right). \tag{246}$$

Iz enačbe (246) dobimo končni rezultat:

$$V = \frac{4}{210}\,\frac{RTm_0}{pVM}\left(1 - \exp\left(-\frac{t\ln 2}{t_{1/2}}\right)\right) = \ 100 \text{ cm}^3 .$$

8. Ob času $t = 0$ imamo tolikšno količino polonija z molekulsko maso 210 kg/kmol, da razpade vsako sekundo 1.85×10^8 njegovih jeder ($A(t{=}0)$). Koliko gramov polonija nam bo še ostalo čez 100 dni (t_x)? Razpolovni čas polonija 210 je 138.4 dni ($t_{1/2}$).

   Rešitev:
   Podano imamo aktivnost(A) ob času t=0:

$$A(t = 0) = -\left.\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \frac{\ln 2}{t_{1/2}N_0}, \tag{247}$$

   kjer smo predpostavili eksponentno odvisnost števila nerazpadlih jeder polonija N:

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{t\ln 2}{t_{1/2}}\right). \tag{248}$$

Iz enačbe (247) izračunamo število razpadlih jeder polonija ob času $t = 0$:

$$N_0 = \frac{A(t=0)\, t_{1/2}}{\ln 2}\,. \tag{249}$$

Število nerazpadlih jeder ob času t_x je:

$$\begin{aligned} N_x =& N_0 \exp\left(-\frac{t_x \ln 2}{t_{1/2}}\right) = \\ =& \frac{A(t=0)\, t_{1/2}\, \exp\left(-t_x \ln 2/t_{1/2}\right)}{\ln 2}\,. \end{aligned} \tag{250}$$

Celotna masa nerazpadlih atomov polonija ob času t_x pa je:

$$m_x = N_x \frac{M}{\mathrm{N_A}}\,, \tag{251}$$

kjer je $\mathrm{N_A}$ Avogadrovo število. Če vstavimo izraz za N_x iz enačbe (250) v enačbo (251), dobimo:

$$m_x = \frac{M}{\mathrm{N_A}} \frac{A(t=0) t_{1/2}}{\ln 2} \exp\left(-\frac{t_x \ln 2}{t_{1/2}}\right) = 6.77 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{g}\,.$$

9. Aktivnost nekega radioaktivnega izvora, ki emitira delce α z energijo 5 MeV, je 7×10^9 razpadov v sekundi. Izračunajte, koliko časa mora ostati izvor v tumorju, da bo le ta prejel dozo 20 J/kg. Masa tumorja je 1 kg. Predpostavimo, da se aktivnost izvora med obsevanjem ne spremeni.
(1 h)

10. Radioaktiven vzorec stoji na neki razdalji od števca, ki kaže po eni uri 7000 sunkov na minuto, po štirih urah pa 2000 sunkov na minuto. Koliko sunkov na sekundo je pokazal števec na začetku opazovanja?
($177\ \mathrm{s}^{-1}$)

11. Z izvorom delcev α obsevamo na enak način dva enaka tumorja A in B, ki se nahajata 5 cm (A), oziroma 7.5 cm (B) pod kožo. Tumor A moramo obsevati 20 minut. Koliko časa je potrebno obsevati tumor B, da bo prejel enako količino

energije, kot tumor A? Razpolovna globina delcev α je 10 cm. Predpostavite, da se aktivnost izvora med obsevanjem spremeni zanemarljivo malo, absorpcijo delcev α v zraku pa zanemarimo.
(1427 s)

12. Aktivnost nekega točkastega izvora, ki seva delce α z energijo W_α=5 MeV v vse smeri enakomerno, je $A_0 = 7\times10^9$ razpadov v sekundi. Izvor je na oddaljenosti $r = 0.5$ m od površine kože, ki jo obsevamo z izvorom. Obsevalna površina je S_0=20 cm^2. Koliko časa moramo obsevati omenjeni del kože, da le ta prejme 10 J (ΔE). Predpostavite, da se aktivnost izvora med obsevanjem spremeni zanemarljivo malo.

    Rešitev:
    Aktivnost $A = -\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$. Na osnovi definicije aktivnosti zapišemo približen izraz za število nastalih delcev α (ΔN) v časovnem intervalu Δt:

    $$\Delta N \cong A_0 \Delta t\,. \tag{252}$$

    Približno velja:

    $$\Delta E = \frac{S_0 \Delta N \cdot W_\alpha}{4\pi r^2} = \frac{S_0 A_0 \Delta t W_\alpha}{4\pi r^2}\,. \tag{253}$$

    Iz enačbe (253) sledi:

    $$\Delta t = \frac{\Delta E 4\pi r^2}{A_0 W_\alpha} = \ 5610\ \mathrm{s}\,. \tag{254}$$

Literatura

[1] Strnad J. (1977) Fizika (1. del), Mehanika, Toplota, DMFA Slovenije, Ljubljana

[2] Strnad J. (1992) Fizika (2. del), Elektrika, Optika, DMFA Slovenije, Ljubljana

[3] Strnad J. (1981) Fizika (3.del), Posebna teorija relativnosti, Kvantna fizika, Atomi, DMFA Slovenije, Ljubljana

[4] Gros M., Hribar M., Kodre A., Strnad J. (1973) Naloge iz fizike, FNT, Univerza v Ljubljani, Ljubljana

[5] Halliday D., Resnick R. (1977) Physics, Parts I and II Combined, J. Wiley & Sons, New York

[6] Kladnik R. (1969) Osnove fizike (1. del), DZS Slovenije, Ljubljana

[7] Kladnik R. (1971) Osnove fizike (2. del), DZS Slovenije, Ljubljana

[8] Babić E., Krsnik R., Očko M. (1990) Zbirka riješenih zadataka iz fizike, Školska knjiga, Zagreb

[9] Detoni S., Korbar R., Skubic T. (1974) Naloge iz fizike, DZS Slovenije, Ljubljana

[10] Lopac V., Kulišić P., Volovšek V., Dananić V. (1992) Riješeni zadaci iz elektromagnetskih pojava in strukture tvari, Školska knjiga, Zagreb

[11] Todorovič M.S., Jovičić O., Jovičić J. (1988) Zbirka ispitnih zadataka iz fizike, Gradževinska knjiga, Beograd

[12] Kulišić P., Bistričić L., Horvat D., Narančić Z., Petković T., Pevec D. (1990), Školska knjiga, Zagreb

[13] Girt E., Knežević G., Bikić S., Baltić R., Girt E., Pušić Marijanović R. (1991), Svjetlost, Sarajevo

[14] Young, D.H., Freedman, A.R. (1996), University Physics, Vol.2, Addison-Wesley Publishing Co., Inc.

[15] Hecht E. (1975), Theory and Problems of Optics, Schaums Outline Series, McGraw-Hill, New York

[16] Sena L.A. (1988), A Collection of Questions and Problems in Physics, Mir Publishers Moscow, Moscow

[17] Kladnik R., Šolinc H. (1996), Zbirka fizikalnih nalog z rešitvami 1, DZS, Ljubljana

[18] Kladnik R., Šolinc H. (1984), Zbirka fizikalnih problemov z rešitvami 2, Državna založba Slovenije, Ljubljana

[19] Sevšek F. (2002), Biomehanika, Visoka šola za zdravstvo, Ljubljana.

[20] Stanovnik A. (2010), Fizika II - zapiski predavanj, Založba FE in FRI, Ljubljana, 4. izdaja.

[21] Iglič A. (2008), Električne in magnetne lastnosti snovi, Založba FE in FRI, Ljubljana, 1. izdaja.

[22] Žitnik J. (2003), Univerzitetne fizikalne naloge II del, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana, 1. natis.

[23] Drevenšek-Olenik I., Golob B., Serša I. (2008), Naloge iz fizike za študente tehniških fakultet, DMFA Založništvo, Ljubljana.

[24] Horvat D., Možina J., Petkovšek R. (2007), Naloge iz tehniške fizike, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana.

Fizikalne konstante

Ime	Simbol	Vrednost
Gravitacijska konstanta	G	6.67259×10^{-11} Nm^2/kg^2
Avogadrovo število	$\mathrm{N_A}$	6.022×10^{23} mol^{-1}
Plinska konstanta	R	8.314510 J/(mol K)
Osnovni naboj	$\mathrm{e_0}$	1.602177×10^{-19} As
Influenčna konstanta	ε_0	8.8542×10^{-12} As/Vm
Indukcijska konstanta	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ Vs/Am
Stefanova konstanta	σ	5.6705×10^{-8} W/m^{2}K^4
Boltzmannova konstanta	k	1.380657×10^{-23} J/K
Planckova konstanta	h	$6.6260754 \times 10^{-34}$ Js
Hitrost svetlobe	$\mathrm{c_0}$	2.99792×10^{8} m/s
Masa elektrona	m_e	9.10939×10^{-31} kg
Masa protona	m_p	1.67262×10^{-27} kg
Masa nevtrona	m_n	1.67492×10^{-27} kg