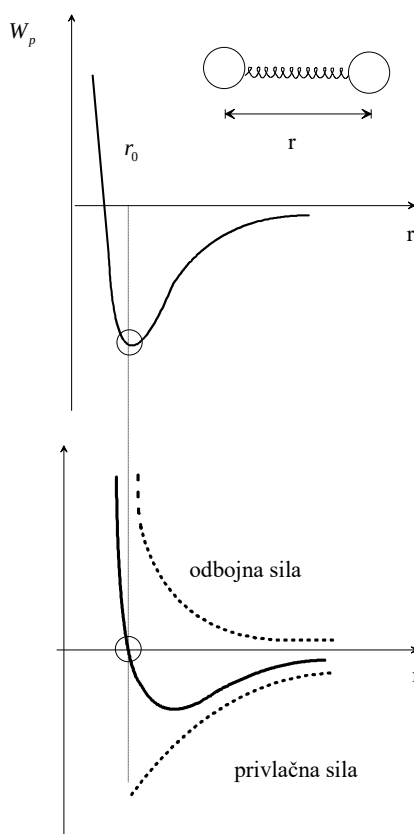


Deformacija trdnih snovi

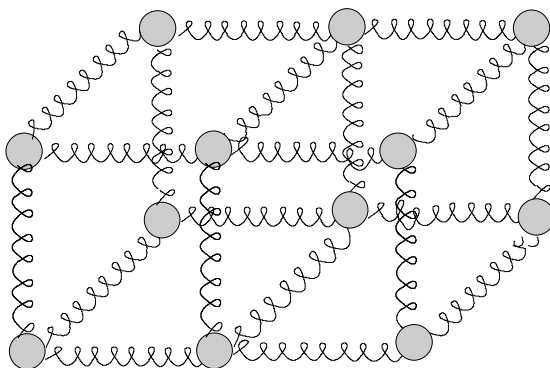
-v kristalu atomi ne mirujejo, pač se termično gibljejo okrog ravnovesne lege.

Sila (F_a) in **energija** (W_p) med sosednjima atomoma trdne snovi v kristalni mreži



$$\text{majhni } |r - r_0| \quad W_p \approx \frac{1}{2} k (r - r_0)^2 - C \quad F_a = -\frac{\partial W_p}{\partial r} = -k(r - r_0)$$

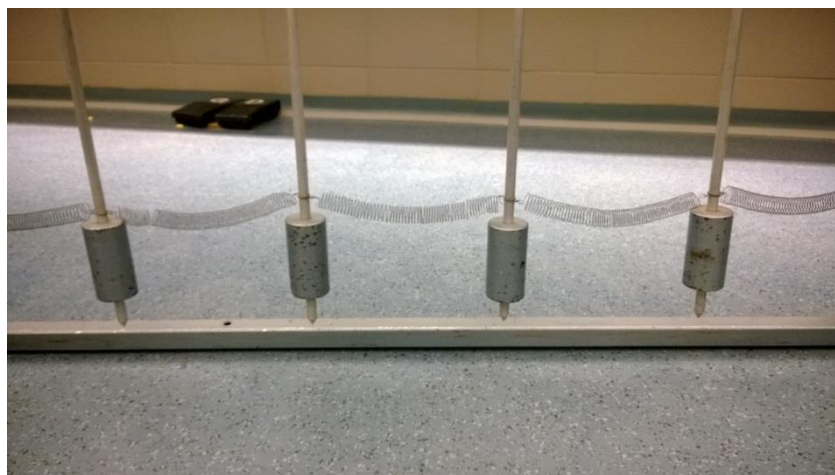
Hook-ov zakon



model kristala NaCl (Cl^- = zeleni, Na^+ = rumeni):



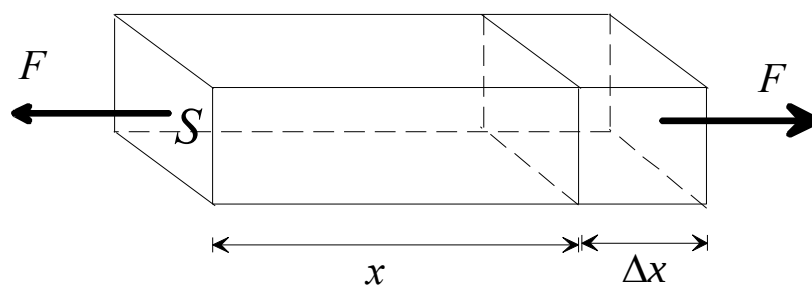
1-dimenzionalen primer :



mikroskopski nivo : $F_a = -k(r - r_0)$

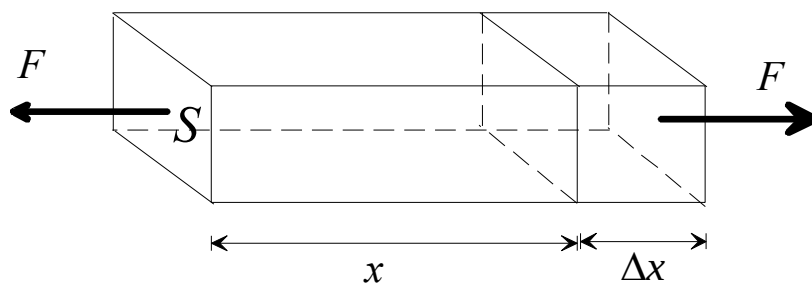
makroskopski nivo : $\sigma_x = \frac{F}{S} = E \frac{\Delta x}{x}$ **Hookov zakon**

E = Youngov modul je sorazmeren mikroskopski konstanti k

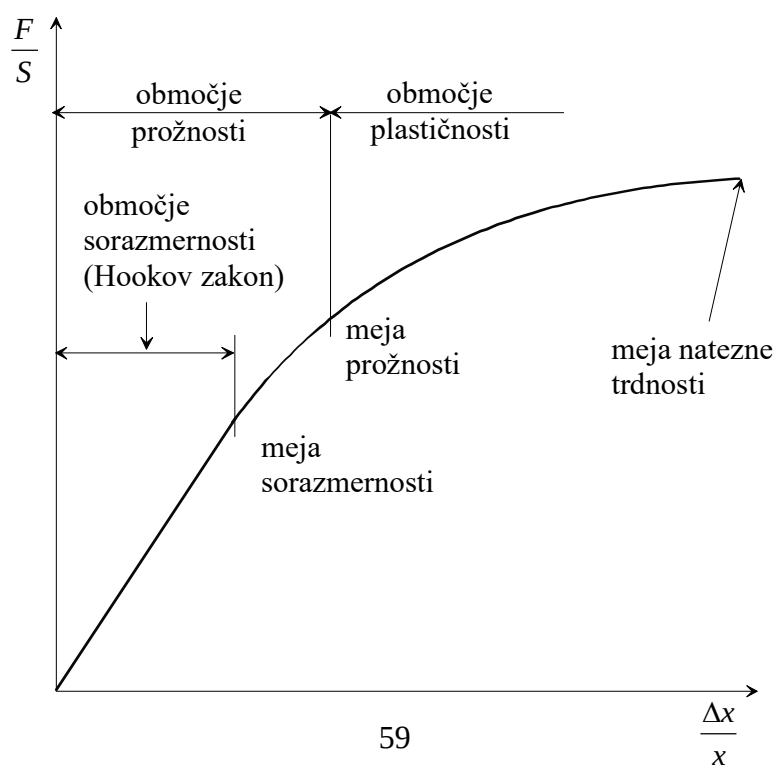


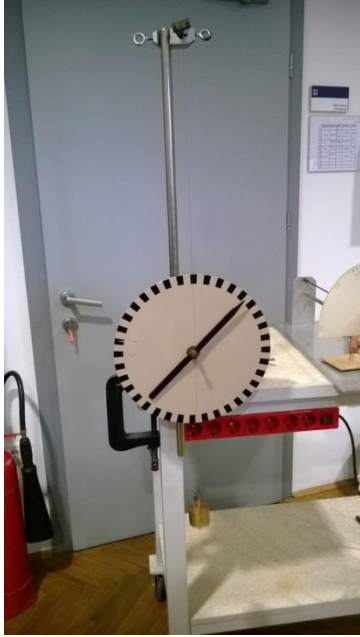
$$\sigma_x = \frac{F}{S}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x}$$

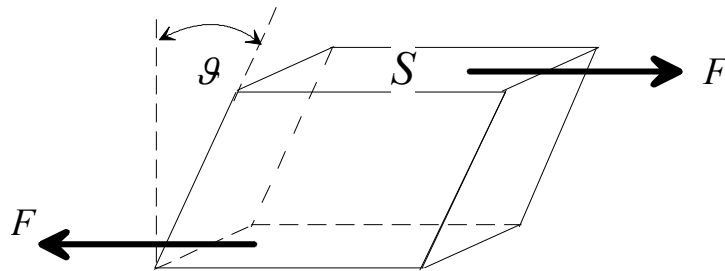


Območje veljavnosti Hookovega zakona



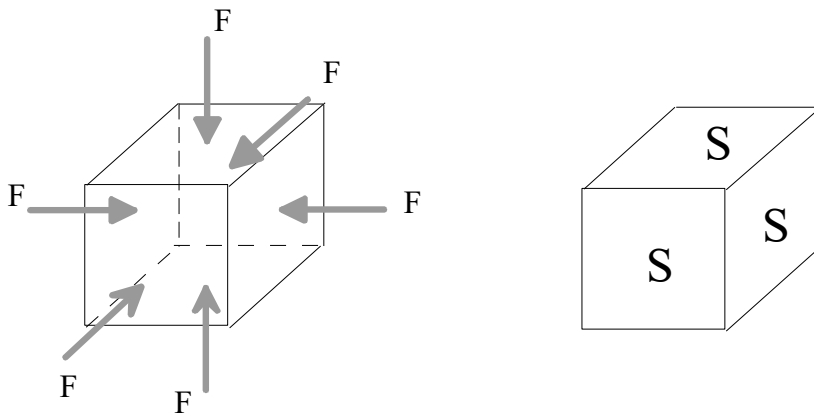


Strižna deformacija



$$\tau = \frac{F}{S} = G \vartheta$$

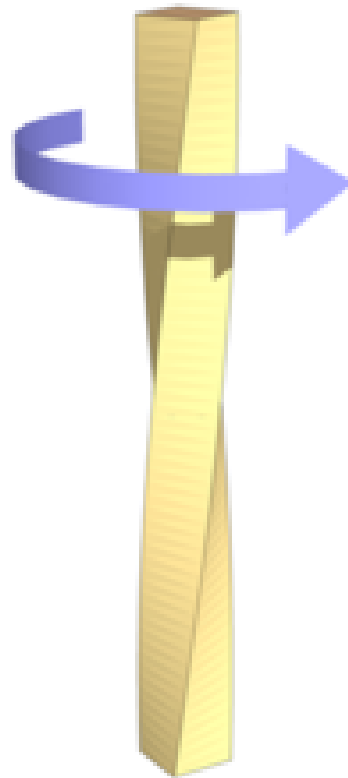
Vsestransko stiskanje (razpenjanje)



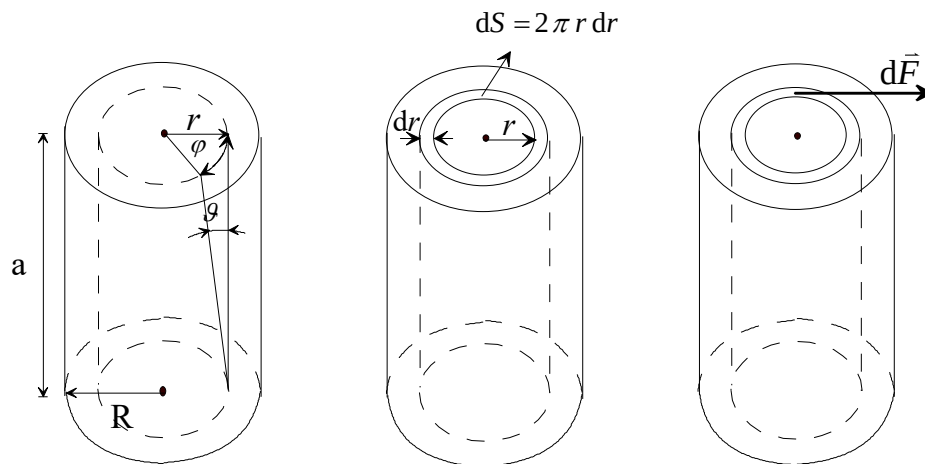
$$\frac{\Delta V}{V} = -\chi \frac{F}{S}$$

χ = stisljivost χ^{-1} = stisljivostni modul

Torzija



Torzija je poseben primer strižne deformacije :



$$r \varphi = a \vartheta \Rightarrow \vartheta = \varphi \frac{r}{a}$$

$$dS = 2 \pi r dr$$

$$\frac{dF}{dS} = G \vartheta$$

$$\frac{dF}{2 \pi r dr} = G \varphi \frac{r}{a}$$

$$dF = \left(\frac{2 \pi G \varphi}{a} \right) r^2 dr$$

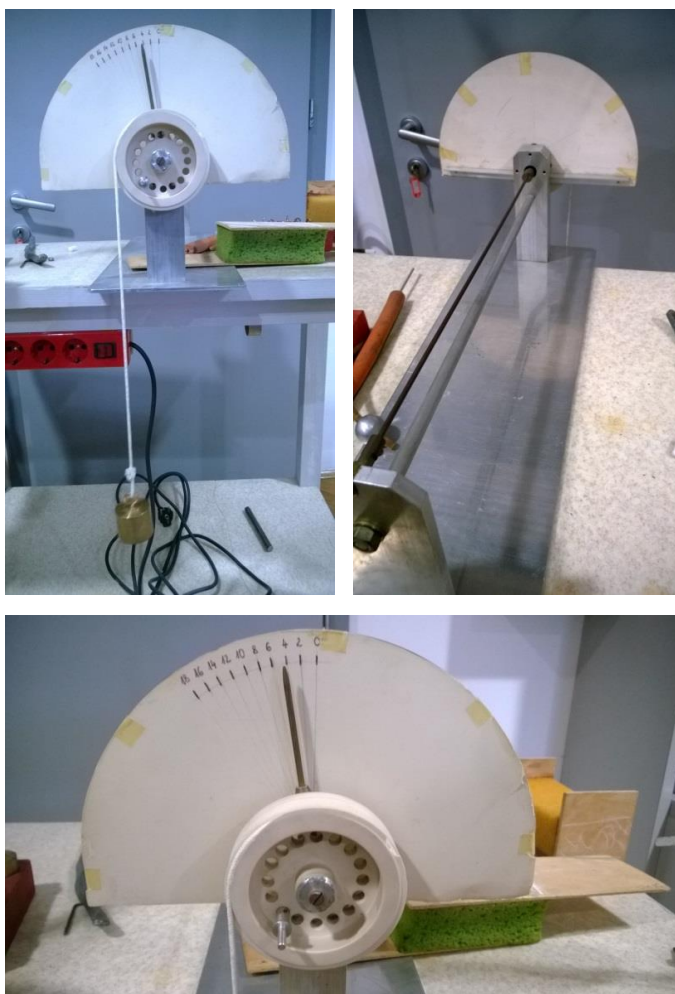
$$dM = r dF = \left(\frac{2 \pi G \varphi}{a} \right) r^3 dr$$

$$M = \int dM = \int_0^R \left(\frac{2 \pi G \varphi}{a} \right) r^3 dr = \left(\frac{2 \pi G \varphi}{a} \right) \frac{R^4}{4}$$

$$M = D \varphi$$

$$D = \frac{\pi G R^4}{2a}$$

Meritev torzijske konstante D

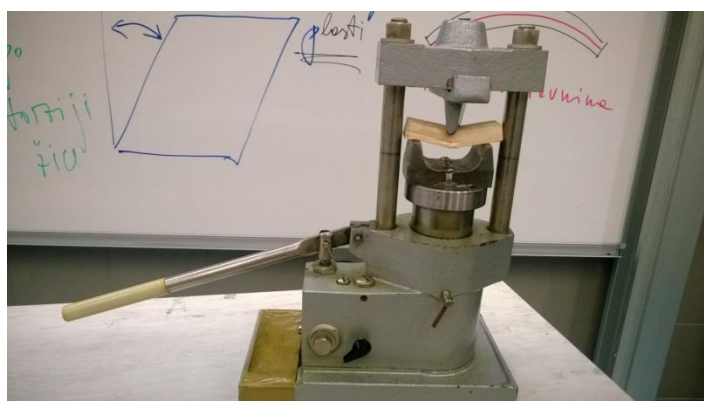


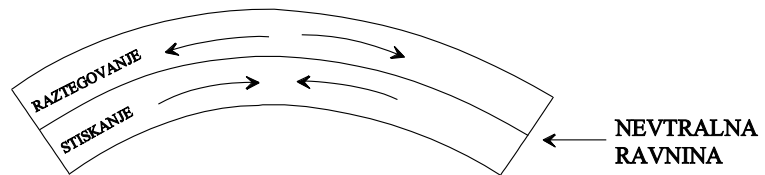
Vrednosti elastičnih konstant za nekatere trdne snovi in kapljevine*:

SNOV	E(Young-ov modul) $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$	G (strižni modul) $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$	χ^{-1} $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$
Aluminij	$7 \cdot 10^{10}$	$2.5 \cdot 10^{10}$	$7 \cdot 10^{10}$
Jeklo	$20 \cdot 10^{10}$	$8.4 \cdot 10^{10}$	$16 \cdot 10^{10}$
Voda	-	-	$0.21 \cdot 10^{10}$
steklo	$7 \cdot 10^{10}$	$3 \cdot 10^{10}$	$5 \cdot 10^{10}$
živo srebro	-	-	$2.8 \cdot 10^{10}$

* kapljevine se razlikujejo od trdne snovi po tem, da ne prenašajo strižnih napetosti

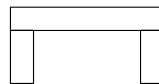
Upogib



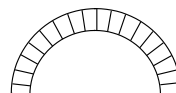


Upogib nosilca

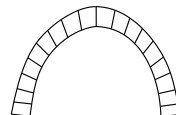
preklada v Mikenah



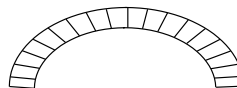
staro rimski lok



gotski lok

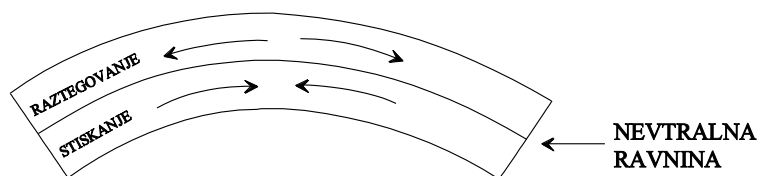


tudorski lok



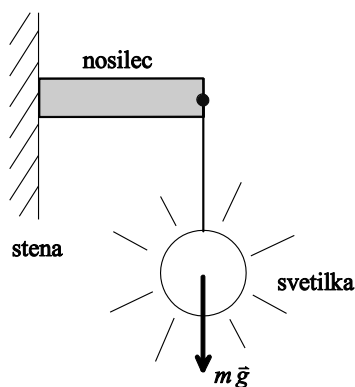
Iz skripte Meh. & term.: **Izračun : upogib nosilca**

Pri čistem upogibu nosilca obstaja tako imenovana nevtralna ravnina, ki pri upogibni deformaciji ohrani svojo površino. Nad nevtralno ravnino se nosilec razteguje, pod nevtralno ravnino pa je izpostavljen stiskanju. Pojav lahko opazujemo tudi pri upognjeni leskovi palici, kjer se na notranji strani loka lubje naguba, na zunanji strani pa napne.



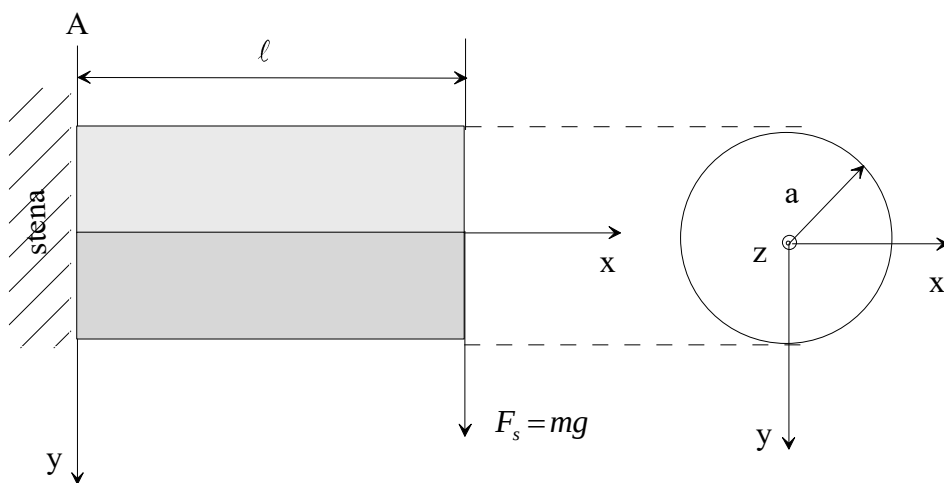
slika 8: Upogib palice.

Kot primer v nadaljevanju analiziramo napetosti in deformacije v zelo lahkem nosilcu s krožnim presekom s polmerom a , ki je na levem koncu vpet v steno, na desnem koncu nosilca pa je z lahko žico pritrjena svetilka z maso m (slika 9).



slika 9

Izhodišče koordinatnega sistema postavimo v središče. Sila teže svetilke $\vec{F}_s = m \vec{g}$ upogiba nosilec. Vpliv lastne teže nosilca na njegov upogib zanemarimo. Zaradi sile F_s se nosilec upogne v ravnini x, y izbranega koordinatnega sistema.



Slika 10

Zato se različni deli nosilca vzdolž osi y različno raztegujejo. Znotraj nosilca obstaja na os y pravokotna plast, ki se ne raztegne ali skrči. Kot smo že omenili jo imenujemo nevtralna plast (ravnina). Vzdolž te ravnine (plasti) merimo od koordinate x odvisno ukrivljenost (glejte sliko 11):

$$C_0 = \frac{1}{R_0}, \quad (13)$$

kjer je R_0 krivinski radij nevtralne ravnine na mestu x . Nad nevtralno plastjo se elementi vzdolžne plasti zaradi navora sile $\bar{F}_s$ raztegnejo (ali skrčijo), pod to plastjo pa se skrčijo (ali raztegnejo), odvisno pač od predznaka ukrivljenosti $C(x)$ (glejte še sliko 11):

$$\varepsilon_x = \frac{ds - ds_r}{ds_r} = \frac{(R_0(x) + d) \cdot d\vartheta - R_0(x) \cdot d\vartheta}{R_0(x) \cdot d\vartheta}, \quad (14)$$

torej:

$$\varepsilon_x = \frac{d}{R_0(x)} = C(x) \cdot d, \quad (15)$$

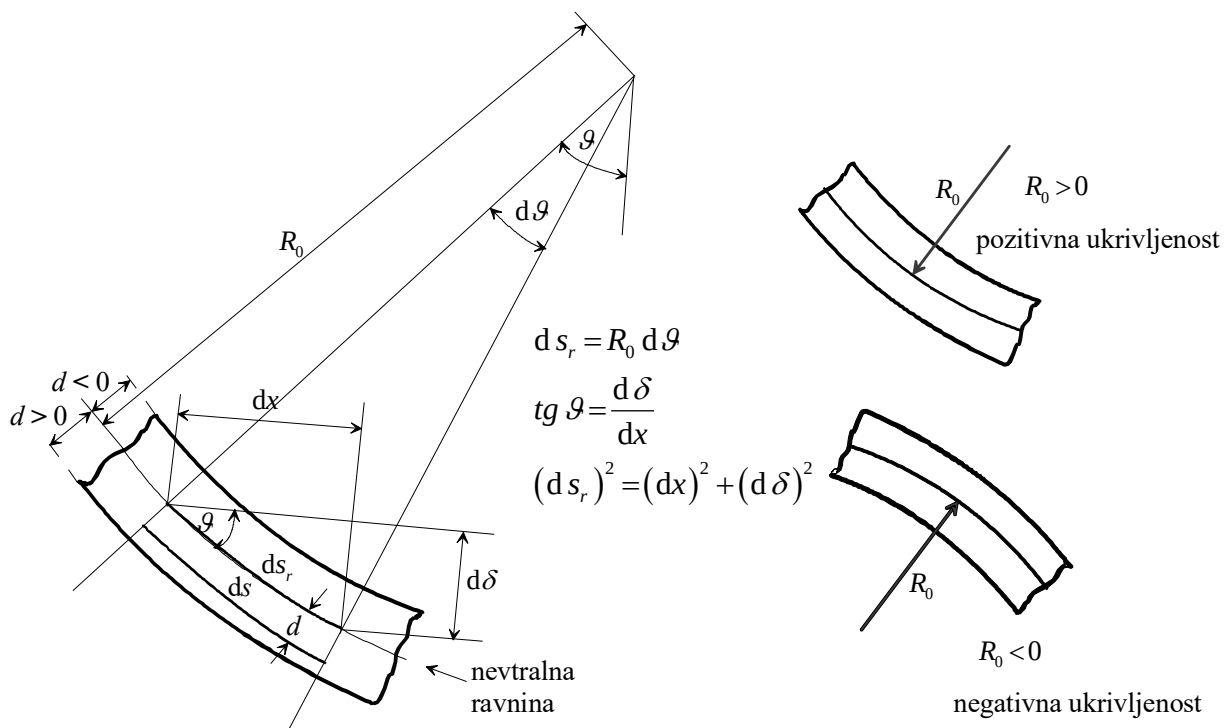
kjer je d razdalja obravnavanega elementa nosilca od nevtralne ravnine, ds_r in ds dolžini tega elementa pred oziroma po upogibu nosilca, pomen kotov ϑ in $d\vartheta$ pa je razviden iz slike 11.

Vrednost d na sliki 11 je pozitivna, če se ravnina nahaja pod nevtralno ravnino in negativna, če se obravnavana ravnina nahaja nad nevtralno ravnino.

Pri upogibu nosilca pod vplivom sile $\bar{F}$ so od nič različne tudi nekatere strižne deformacije, ki pa jih bomo v tej fazi napetostne analize nosilca zanemarili. V nadaljnji analizi napetosti v nosilcu bomo predpostavili, da Hookov zakon v obliki enačbe (3) velja tudi za posamezne zelo tanke elemente vzdolžnih plasti v nosilcu na izbrani razdalji d od referenčne plasti. Torej, če vstavimo ε_x iz enačbe (15) v Hookov zakon $\sigma_x = E \varepsilon_x$ dobimo:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \cdot C(x) d, \quad (16)$$

kjer je d pozitiven za plasti, ki se pri upogibu raztegnejo in negativen za plasti, ki se pri upogibu skrčijo.

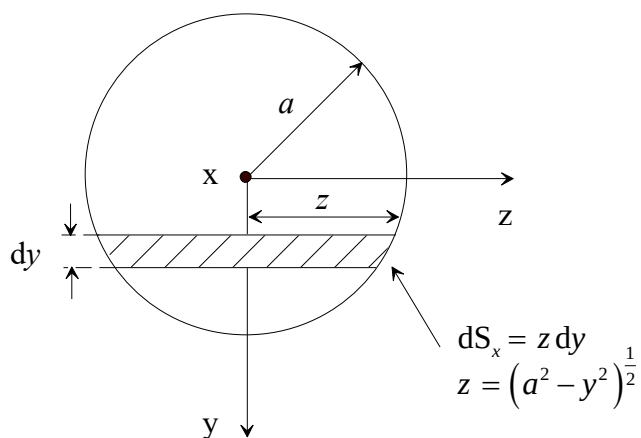


slika 11: Zaradi upogiba nosilca se element nosilca z dolžino ds_r na razdalji d od nevtralne ravnine raztegne na dolžino ds . Simbol R_0 označuje krivinski radij nevtralne ravnine v izbrani točki, δ pa je vertikalni odmik izbrane točke v nevtralni ravnini od stanja v katerem nosilec ni upognjen.

V ravnovesju se morajo sile zaradi notranjih napetosti uravnovesiti z zunanjiimi silami v vsakem delu nosilca. Ker v smeri x -osi na nosilec ne deluje nobena sila, mora biti vsota vseh sil zaradi notranjih napetosti po prerezu nosilca enaka nič:

$$\int \sigma_x dS_x = 0, \quad (17)$$

kjer je dS_x infinitezimalni element površine preseka nosilca v ravnini y, z (glejte sliko 12):



slika 12

Če vstavimo izraz za σ_x iz enačbe (16) v enačbo (17) dobimo:

$$\int_{S_x} E C(x) d d S_x = 0, \quad (18)$$

kjer integriramo po površini preseka nosilca v ravnini y, z .

Iz enačbe (18) pri izbrani vrednosti x -a sledi:

$$\int_{S_x} d d S_x = 0. \quad (19)$$

Ob upoštevanju definicije d -ja in definicije predznaka krivinskega radija R_0 (glejte sliko 11), tako iz enačbe (19) sledi:

$$d = y, \quad (20)$$

saj zaradi simetrije velja (glejte slike 10 in 12)

$$\int_{S_x} y d S_x = 0, \quad (21)$$

pri čemer se nevtralna ravnina ujema z x, z ravnino (glejte sliko 12), torej poteka po sredini nosilca, kjer je $y = 0$.

Elastične sile v prečnem prerezu nosilca s površino S_x povzročajo navor, ki ima od nič različno komponento samo v smeri z -osi. Navor elastičnih sil namreč nasprotuje zakrivljanju nosilca zaradi navora sile $\vec{F}_S$, ki ima tudi samo z -komponento različno od nič. Navor elastičnih sil M skuša nosilec izravnati, zato ga imenujejo tudi upogibni navor elastičnih sil. S pomočjo enačb (16) in (20) dobimo:

$$M(x) = \int_{S_x} y \sigma_x d S_x = \int_{S_x} y (E C(x) y) d S_x = E C(x) I \quad (22)$$

kjer smo upoštevali enačbo (21), $C(x) = \text{konst.}$ pri izbranem x -u ter

$$I = \int_{S_x} y^2 d S_x \quad (23)$$

definirali kot upogibni vztrajnostni moment prereza nosilca s konstatnim presekom. Ker se ukrivljenost nosilca vzdolž osi x spreminja, je tudi elastični upogibni navor funkcija koordinate x . Prečni presek nosilca ima obliko kroga z radijem a , katerega središče pravokotno prebada x -os izbranega koordinatnega sistema (glejte še slike 10 in 12).

Torej:

$$I = \int_{S_x} y^2 d S_x = \int_{-a}^{+a} y^2 z dy = \int_{-a}^{+a} y^2 (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{\pi a^4}{4}. \quad (24)$$

Če iz enačbe (22) izraženo ukrivljenost

$$C(x) = \frac{M(x)}{EI}, \quad (25)$$

vstavimo v enačbo (16), ter upoštevamo identiteto (20) dobimo:

$$\sigma_x = \left(\frac{M(x)}{I} \right) y. \quad (26)$$

Poiščimo še eksplicitni izraz za ukrivljenost $C(x)$. S slike 11 je razvidno, da je

$$ds_r = R_0 d\vartheta, \quad (27')$$

od koder sledi:

$$C(x) = \frac{1}{R_0(x)} = -\frac{d\vartheta}{ds_r}. \quad (27)$$

Ker je $\frac{d\delta}{dx} = \operatorname{tg} \vartheta$ in $(ds_r)^2 = (dx)^2 + (d\delta)^2$, iz enačbe (27) sledi

$$C(x) = -\frac{-\frac{d^2\delta}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{d\delta}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (28)$$

▪ **Dokaz relacije (28)** (glejte še sliko 11):

$$\begin{aligned} \text{▪} \quad ds_r &= \left[(dx)^2 + (d\delta)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = dx \left[1 + \left(\frac{d\delta}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (29a)$$

$$\text{▪} \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{d\delta}{dx} \Rightarrow d(\operatorname{tg} \vartheta) = d\left(\frac{d\delta}{dx} \right)$$

$$\frac{1}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta = \frac{d^2\delta}{dx^2} dx$$

$$d\vartheta = \cos^2 \vartheta \frac{d^2\delta}{dx^2} dx$$

$$d\vartheta = \frac{\frac{d^2\delta}{dx^2}dx}{1+tg^2\vartheta} = \frac{\frac{d^2\delta}{dx^2}dx}{1+\left(\frac{d\delta}{dx}\right)^2} \quad (29b)$$

V izraz

$$C(x) = -\frac{d\vartheta}{ds_r}$$

vstavimo enačbi (29a) in (29b) in dobimo enačbo (28):

$$C(x) = -\frac{d\vartheta}{ds_r} = \frac{-\frac{d^2\delta}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{d\delta}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (28)$$

Ker je ukrivljenost nosilca zaradi navora sile $\vec{F}_s$ pri vseh x zelo majhna približno velja

$$C(x) = -\frac{d^2\delta}{dx^2} \quad (29)$$

Če kombiniramo enačbi (25) in (29) dobimo:

$$\frac{d^2\delta}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}. \quad (30)$$

Iz enačbe (30) izražen $M_z(x)$ vstavimo v enačbo (26). Tako dobimo:

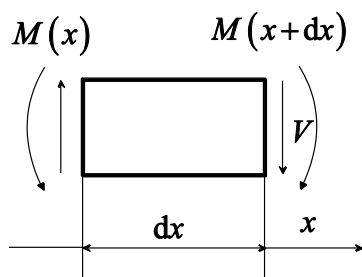
$$\sigma_x = -E y \frac{d^2\delta}{dx^2}. \quad (31)$$

Ker je elastični upogibni navor M funkcija koordinate x , se v prerezu nosilca poleg natezne sile pojavi tudi rezultantna strižna sila V , saj mora biti v ravnovesju vsota navorov, ki delujejo na izbran element nosilca dolžine dx , enak nič:

$$M(x) - M(x+dx) + V(x)dx = 0, \quad (32')$$

$$M(x) - \left(M(x) + \frac{dM}{dx}dx \right) + V(x)dx = 0, \quad (32)$$

kjer smo upoštevali $M(x+dx) = M(x) + \frac{dM}{dx} dx$.



$$V(x) = V(x+dx) = V = \text{konst.}$$

slika 13

Tudi vsota vseh sil v smeri y osi mora biti enaka nič, torej

$$V = \text{konst.} \quad (33)$$

Iz enačbe (32) dobimo zvezo med V in M,

$$V = \frac{dM}{dx} \quad (34)$$

S pomočjo enačb (30), (33) in (34) pa dobimo

$$V = -EI \frac{d^3 \delta}{dx^3} \quad (35)$$

in

$$EI \frac{d^4 \delta}{dx^4} = 0, \quad (36)$$

kjer smo upoštevali $\frac{dV}{dx} = 0$, ker je V konstanta. Diferencialno enačbo (36) rešujemo za primer predstavljen na slikah 9 in 10. Enačbo (36) štirikrat integriramo na obeh straneh enačaja:

$$EI \delta = \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4, \quad (37)$$

kjer so $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in α_4 konstante, ki jih določimo iz robnih pogojev. Iz robnih pogojev pri $x = 0$:

$$\delta(x=0) = 0, \quad \frac{d\delta}{dx}(x=0) = 0, \quad (38)$$

sledi:

$$\alpha_3 = \alpha_4 = 0 \quad (39)$$

Iz robnega pogoja pri $x = \ell$,

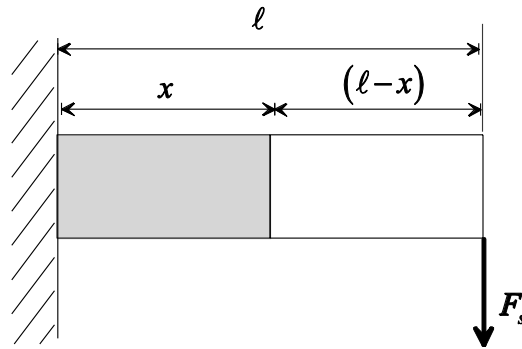
$$-V(x=\ell) + F_s = 0, \quad (40)$$

sledi:

$$\alpha_1 = -\frac{F_s}{6}. \quad (41)$$

Levi pritrjeni del nosilca prek prereza deluje na desni del z navorom $M = -EI \frac{d^2 \delta}{dx^2}$ (glejte enačbo (30)) in ga skuša zavrteti navzgor. Sila $\bar{F}_s$ pa ga želi zavrteti navzdol z navorom $(\ell - x)F_s$:

$$M(x) + (\ell - x)F_s = 0. \quad (42)$$



slika 14

V enačbo (42) vstavimo $M(x) = -EI \frac{d^2 \delta}{dx^2}$ (glejte enačbo (30)) in dobimo:

$$-EI \frac{d^2 \delta}{dx^2} + (\ell - x)F_s = 0 \quad (43)$$

Vstavimo $\delta(x)$ iz enačbe (37) v enačbo (43):

$$-6\alpha_1 x - 2\alpha_2 + (\ell - x)F_s = 0, \quad (44)$$

za α_1 vstavimo izraz $\alpha_1 = -\frac{F_s}{6}$ (enačba (41)) in dobimo:

$$-2\alpha_2 + F_s \ell = 0,$$

oziroma:

$$\alpha_2 = \frac{F_s \ell}{2} \quad (45)$$

Sedaj ko poznamo konstante α_1 , α_2 , α_3 in α_4 lahko zapišemo celotno rešitev (enačba (37)):

$$\delta(x) = \frac{\left(-\frac{F_s}{6}x^3 + \frac{1}{2}F_s\ell x^2\right)}{EI}. \quad (46)$$

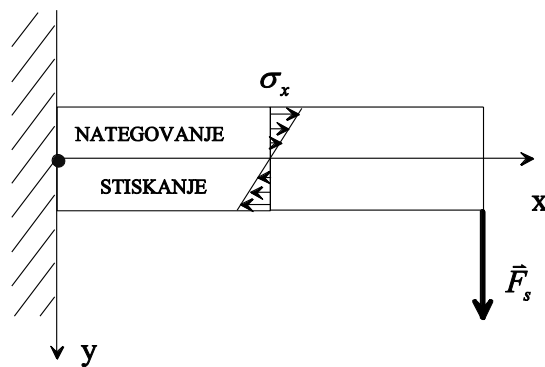
Od tod lahko izračunamo s pomočjo enačbe (30):

$$M(x) = F_s(x - \ell) \quad (47)$$

in s pomočjo enačbe (31):

$$\sigma_x(x) = \frac{F_s y (x - \ell)}{I}, \quad (48)$$

kjer je $I = \frac{\pi a^4}{4}$.



Slika 15: Natezne in kompresijske napetosti v petem nosilcu.