

Pospešek telesa v danem inercialnem koordinatnem sistemu nastane zaradi učinkovanja drugih teles iz okolice. Kakršnokoli spremembo hitrosti telesa vedno povzroča kako drugo telo. Tovrstno učinkovanje enega telesa na drugo telo predstavimo s fizikalno količino sila ( $F$ ). Pravimo, da na telo učinkuje sila. Povzroča jo kako drugo telo. Posledica učinkovanja sile na telo je **pospešek (a)**, ki ima smer delujoče sile (slika 2.1). Velikost pospeška je premo sorazmerna s silo  $F$ , odvisna pa je še od mase ( $m$ ) telesa. Čim masivnejše je telo (čim večja je njegova masa), tem manjši pospešek dobi pri dani sili, oziroma tem večja sila je potrebna za dan pospešek.

**Pospešek (a) telesa je premo sorazmern s silo ( $F$ ), ki učinkuje na telo, in obratno sorazmern z njegovo maso ( $m$ ):**

$$a = F/m \quad \text{ali} \quad F = ma \quad (2.1)$$

**Sila je enaka produktu mase in pospeška.** Ta enačba je znana z imenom **Newtonov zakon dinamike**.

Pospešek telesa je pri dani sili tem manjši, čim večja je masa; torej je masa merilo za vztrajnost telesa proti spremembji hitrosti. Čim večja je masa, tem bolj telo vztraja pri prvotni hitrosti, tem bolj se upira spremembji hitrosti, to je tem večja sila je potrebna, da se hitrost spremeni.

V mednarodnem sistemu merskih enot (SI) je masa izbrana kot osnovna fizikalna količina, njena enota **kg (kilogram)** je osnovna merska enota. Poleg nje uporabljamo še enote: g (gram) =  $10^{-3}$  kg, mg (miligram) =  $= 10^{-6}$  g =  $10^{-9}$  kg, µg (mikrogram) =  $10^{-9}$  g =  $10^{-12}$  kg in druge.

Mersko enoto sile – **1 N (newton)** – izpeljemo iz Newtonovega zakona dinamike: to je **sila, ki da telesu z maso 1 kg pospešek 1 m/s<sup>2</sup>**:

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

Večji enoti sile sta  $1 \text{ kN} = 10^3 \text{ N}$  (sila, ki da telesu z maso 1 kg pospešek 1 km/s<sup>2</sup>, ali telesu z maso 1 t pospešek 1 m/s<sup>2</sup>) ter  $1 \text{ MN} = 10^6 \text{ N}$ . Stara enota sile je **1 kp (kilopond)**; pri tej sili dobi telo z maso 1 kg pospešek prostega pada ( $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ):

$$1 \text{ kp} = 1 \text{ kg} \cdot g = 9,8 \text{ N}$$

Šibke sile so včasih izražali z mersko enoto **dina** =  $= 1 \text{ gcm/s}^2$ , 1 dina =  $10^{-5} \text{ N} = 10 \mu\text{N}$ .

Če na telo hkrati učinkuje več drugih teles, pomeni, da na telo deluje več sil, npr.  $F_1, F_2, F_3, \dots$  (slika 2.2). Celoten učinek vseh teles na izbrano telo je odvisen od rezultante  $F$  vseh delujočih sil:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$$

**Pospešek (a) telesa ima smer rezultante  $F$ ;** telo se pospeši v smeri rezultante vseh sil, ki učinkujejo na telo.

Iz Newtonovega zakona dinamike sledi, da je

$$\text{za } F = 0 \text{ tudi } a = 0 \text{ oziroma } v = \text{konst.}$$

## 2. **SILA (DINAMIKA)**

Če na telo ne deluje sila ali če je rezultanta vseh sil, ki učinkujejo na telo, enaka nič, se telo giblje enakomerno (premočrtno s stalno hitrostjo). Telo se giblje enakomerno s hitrostjo, ki jo je imelo v trenutku, ko so sile odnehatle. Če je telo tedaj mirovalo, miruje tudi naprej, saj ni sile, ki bi spremenila hitrost. Za vsako spremembo hitrosti je potrebna sila. Če se hitrost telesa spreminja s časom (če se telo giblje pospešeno, ali pojemajoče, ali po zakrivljeni tirnici), pomeni, da na telo deluje sila.

Učinkovanje enega telesa na drugo telo s silo je medsebojno. Če prvo telo deluje na drugo s silo  $\vec{F}_{12}$ , deluje istočasno drugo telo nazaj na prvo z nasprotno enako silo  $\vec{F}_{21}$ . Ni mogoče, da bi eno telo delovalo na drugo, ne da bi obenem tudi drugo telo delovalo nazaj na prvo.

**Sili medsebojnega učinkovanja teles sta enako veliki, a nasprotno usmerjeni:**  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$  ali  $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$ .

Ti sili sta sicer enako veliki, vendar učinkujeta na različni telesi, zato povzročata različna pospeška. Prvo telo npr. dobi pospešek  $\vec{a}_1 = \vec{F}_{12}/m_1$ , drugo telo pa pospešek  $\vec{a}_2 = \vec{F}_{21}/m_2 = -\vec{F}_{12}/m_2 = -\vec{a}_1(m_1/m_2)$ . Telesi se pospešita drug k drugemu; težje telo dobi manjši pospešek kot lažje telo.

Newtonov zakon dinamike (2.1) lahko izrazimo nekaj drugače, če vpeljemo gibalno količino  $G$ ; ta je po definiciji produkt mase telesa in njegove hitrosti:

$$G = mv \quad \text{merska enota: kgm/s} \quad (2.2)$$

Gibalna količina telesa ima smer hitrosti. Če se hitrost spremeni, se spremeni tudi gibalna količina. Sprememba hitrosti (to je pospešek) je dana z Newtonovim zakonom dinamike:

$$F = ma = mdv/dt = d(mv)/dt = dG/dt$$

$$F = dG/dt \quad (2.3)$$

**Sila je enaka odvodu gibalne količine po času;** je kvocient spremembe gibalne količine ( $dG$ ) in časovnega intervala ( $dt$ ), v katerem se sprememba priperi; pove spremembo gibalne količine v časovni enoti.

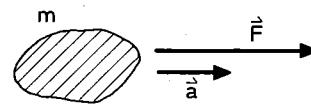
Iz enačbe (2.3) sledi, da je:

$$dG = Fdt$$

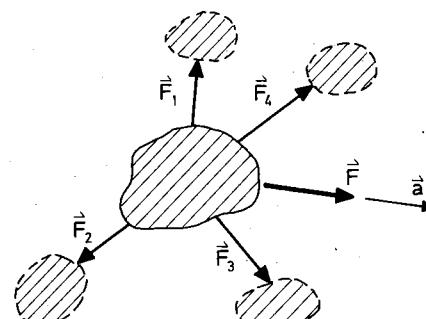
**Produkt sile in časovnega intervala,** v katerem sila učinkuje, se imenuje sunek sile. V kratkem časovnem intervalu  $dt$  je sunek sile  $F$  enak  $Fdt$ . Vidimo, da je **sunek sile enak spremembi gibalne količine;**  $Fdt = dG$ .

Recimo, da je gibalna količina telesa v trenutku  $t_1$  enaka  $G_1$ , v kasnejšem trenutku  $t_2$  pa  $G_2$ . V časovnem intervalu  $\Delta t = t_2 - t_1$  se torej gibalna količina spremeni za  $\Delta G = G_2 - G_1$ , kar je vsota (integral) diferencialnih sprememb  $dG$ , ki nastanejo v vmesnih kratkih časovnih intervalih  $dt$ :

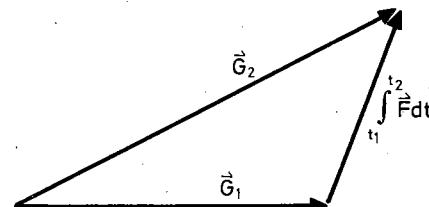
$$\begin{aligned} G_2 - G_1 &= \Delta G = \int dG = \int_{t_1}^{t_2} Fdt \quad \text{kjer je} \\ \int_{t_1}^{t_2} Fdt &= \text{snek sile v} \\ &\quad \text{časovnem intervalu} \\ t_2 - t_1 & \end{aligned} \quad (2.4)$$



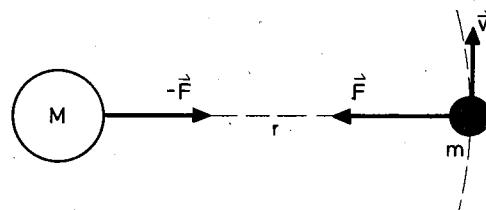
Slika 2.1



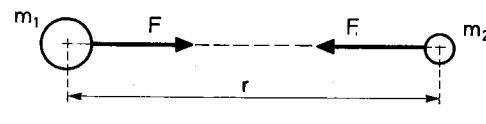
Slika 2.2



Slika 2.3



Slika 2.4



Slika 2.5

Celotna sprememba gibalne količine je enaka celotnemu sunku sile ali drugače; končna gibalna količina je vektorska vsota začetne gibalne količine in sunka sile (slika 2.3):

$$\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt \quad (2.5)$$

## Gravitacijska sila – teža

Vsa telesa se medsebojno privlačujejo z gravitacijsko silo. Ta učinkuje tudi na daljavo in skozi brezračni prostor. Gravitacijska privlačnost teles je odvisna od njihove mase in od njihove medsebojne oddaljenosti. Čim masivnejša so telesa in čim bliže so drugo drugemu, tem močnejša je gravitacijska privlačna sila med njimi.

Odvisnost gravitacijske sile od mase teles in njihove razmaknjenosti (t. i. **gravitacijski zakon**) je prvi izpeljal Isaac Newton, ko je pojasnil kroženje planetov okrog Sonca.

Zemlja kroži okrog Sonca po eliptičnem tiru, ki ga v prvem približku aproksimiramo s krožnico; njena povprečna oddaljenost ( $r$ ) od Sonca je  $149,5 \cdot 10^6$  km (pozimi 147,0 milj. km, poleti 152,0 milj. km); ta razdalja se v astronomiji uporablja kot enota dolžine (UA):

$$1 \text{ UA} = 149,5 \cdot 10^6 \text{ km} = 1,495 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Obhodni čas ( $t_o$ ) Zemljinega letnega kroženja je 1 leto, to je 365,25 dni. Tudi drugi planeti krožijo okrog Sonca po bolj ali manj krožnih tirnicah. Njihove povprečne oddaljenosti in obhodni časi so v tabeli. Bolj ko je planet oddaljen od Sonca, daljši je njegov obhodni čas (daljše je leto na planetu). Zanimivo je, da je količnik med kubom povprečne oddaljenosti planeta od Sonca ( $r^3$ ) in kvadratom njegovega obhodnega časa ( $t_o^2$ ) za vse planete našega sončja enak (tretji stolpec v tabeli):

Planet	$r$ (UA)	$t_o$ (leto)	$r^3/t_o^2$ (UA <sup>3</sup> /leto <sup>2</sup> )
Merkur	0,387	0,241	0,998
Venera	0,723	0,616	0,996
Zemlja	1,000	1,000	1,000
Mars	1,524	1,88	1,001
Saturn	5,20	11,86	1,000
Jupiter	9,54	29,46	1,000
Uran	19,18	84,0	1,001
Neptun	30,06	164,8	1,001
Pluton	39,5	247,7	1,001

$$r^3/t_o^2 = K = 1 \text{ UA}^3/\text{leto}^2 = 3,36 \cdot 10^{18} \text{ m}^3/\text{s}^2 \quad (2.6)$$

To odvisnost je iz merskih podatkov izluščil astronom J. Kepler, zato se njemu v čast imenuje **Keplerjev zakon**. S pomočjo tega zakona je I. Newton odkril gravitacijski zakon.

Kroženje planetov okrog Sonca omogoča gravitacijska sila  $F$ , s katero Sonce privlačuje planete in jim vsiljuje radialni pospešek (gl. 1.47)  $a_r = r\omega^2 = r(2\pi/t_o)^2$ . Newtonov zakon dinamike lahko uporabimo za kroženje planetov, zato dobimo:

$$F = ma_r = m \cdot 4\pi^2 r/t_o^2 = m \cdot 4\pi^2 K/r^2 \quad (\text{slika 2.4}) \quad (2.7)$$

pri čemer smo še uporabili Keplerjev zakon (2.6):  $t_o^2 = r^3/K$ .

Vidimo, da je gravitacijska sila Sonca premo sorazmerna z maso planeta. To velja splošno: **gravitacijska sila je premo sorazmerna z maso telesa, na katerega učinkuje**.

Naprej razmišljamo takole: s kolikršno silo privlačuje Sonce planet, s tolikšno silo privlačuje tudi planet Sonce. Sila  $F$  iz enačbe (2.7) je torej tudi gravitacijska sila, s katero planet vleče k sebi Sonce. Torej mora biti ta sila premo sorazmerna tudi z maso Sonca ( $M$ ). Ta je lahko skrita edinole v Keplerjevi konstanti  $K$ , ki je skupna za vse planete in zato karakteristična za naše sončje. Zato pišemo Keplerjevo konstanto  $K$  v obliki  $K = M \cdot G/4\pi^2$ , pri čemer smo vpeljali novo konstanto  $G$ , ki je univerzalna (neodvisna od snovi) in se imenuje **gravitacijska konstanta**. Sledi:

$$F = G Mm/r^2$$

Gravitacijsko konstanto  $G$  lahko neposredno izračunamo, če poznamo maso Sonca  $M (= 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg})$ :

$$G = 4\pi^2 K/M = 4\pi^2 \cdot 3,36 \cdot 10^{18} \text{ m}^3/\text{s}^2 / 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kgs}^2$$

Izraz za gravitacijsko silo med Soncem in planeti je Newton posplošil v **gravitacijski zakon**, ki velja za vse telesa, tudi za telesa na zemeljskem površju.

Telo z maso  $m_1$  in telo z maso  $m_2$ , ki sta razmaknjeni za  $r$ , se medsebojno privlačujeta z **gravitacijsko silo**:

$$F = Gm_1m_2/r^2 \quad (2.8)$$

ki je premo sorazmerna s produktom mas obeh teles in obratno sorazmerna s kvadratom njune oddaljenosti. Sila deluje v smeri veznice obeh teles (slika 2.5).

Da Newtonov gravitacijski zakon zares velja tudi za telesa na zemeljskem površju, je potrjeno z meritvijo gravitacijske konstante  $G$ ; dobimo namreč enako vrednost kot iz opazovanja gibanja planetov.

Gravitacijsko konstanto izmerimo s Cavendishovo tehniko (slika 2.6). Na koncu viseče tenke žičke je v sredini pritrjena vodoravna lesena palica (dolžina 1,8 m); na koncih palice sta svinčeni kroglici (premer 5 cm). Ob vsaki kroglici je postavljena velika svinčena krogla (premer 30 cm, Pb na sliki 2.6). Če krogli nenehoma premaknemo od ene kroglice do druge, se viseča žička zasuče. Zasuk žičke izmerimo s svetlobnim žarkom, ki se odbije od zrcalca na žički do prosojnega zaslona. Tovrstna tehnikica je dovolj občutljiva, da lahko izmeri šibko gravitacijsko silo med veliko in malo svinčeno kroglo.

Gravitacijska sila med telesi na zemeljskem površju je zelo šibka (le neznatno vpliva na gibanje teles) in jo večinoma zanemarimo v primerjavi z drugimi silami. Ta sila je pomembna le, če je vsaj eno telo astronomsko, npr. Zemlja.

Newtonov gravitacijski zakon (2.8) lahko brez zadržkov uporabimo za planete in Sonce. Njihova velikost je namreč majhna v primerjavi z oddaljenostjo in je zato vseeno, od kod do kod merimo razdaljo  $r$ , ki nastopa v zakonu. Pri telesih na zemeljskem površju pa je vpraša-

nje, katera razdalja je  $r$ . Če telesa niso majhna v primerjavi z njihovo medsebojno oddaljenostjo (če torej niso točkasta telesa), je gravitacijska sila med njimi odvisna tudi od oblike, velikosti in usmerjenosti teles v prostoru. Za takšna telesa gravitacijski zakon v obliki enačbe (2.8) ne velja. Pomagamo si tako, da telesa v mislih razdelimo na diferencialno majhne dele, za katere lahko uporabimo gravitacijski zakon (2.8). Izračunamo delne gravitacijske sile med posameznimi pari točkastih delov obeh teles in poiščemo njihovo rezultanto, ki je gravitacijska sila med celotnima telesoma.

### Primeri:

**1. Točkasto telo in palica.** Točkasto telo z maso  $m$  leži v smeri palice, za  $a$  oddaljeno od njenega bližnjega konca (slika 2.7). Palica je homogena, njena masa je  $M$ , dolžina pa  $b$ . S kolikšno gravitacijsko silo se privlači palica in točkasto telo?

Palico v mislih razrežemo na koščke; vsak od njih je dolg  $dx$  in ima maso  $dM = (M/b)dx$ . Košček  $dM$  z oddaljenosti  $x$  od desnega konca palice (gl. slika 2.7) privlačuje točkasto telo  $m$  s silo  $dF = GmdM/(a+x)^2 = (GmM/b)(a+x)^{-2}dx$ . Celotna sila  $F$  je vsota (integral) prispevkov posameznih koščkov:

$$F = \int dF = (GmM/b) \int_0^b (a+x)^{-2} dx = \frac{GmM}{a(a+b)}$$

**2. Točkasto telo in velika plošča.** Točkasto telo  $m$  je za  $a$  oddaljeno od velike ravne plošče. Plošča je homogena s ploskovno gostoto mase  $\sigma = dM/dS$  (to je masa na enoto površine,  $\text{kg}/\text{m}^2$ ). Določi gravitacijsko silo med točkastim telesom in ploščo!

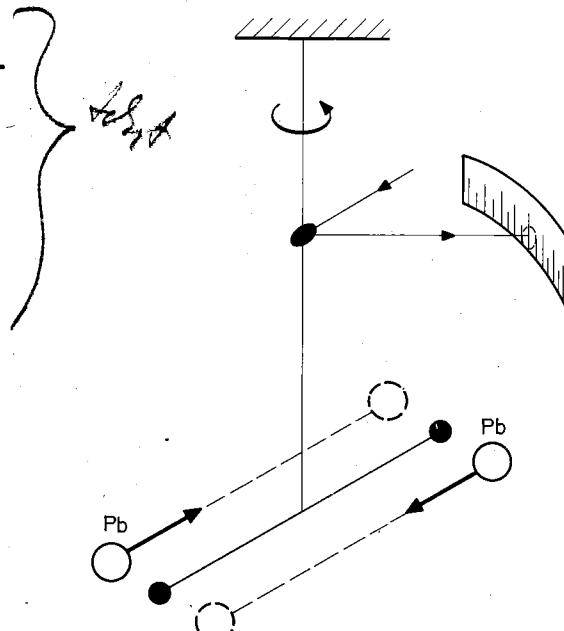
Ploščo v mislih razrežemo na koncentrične kolobarjaste trakove s središčem v vznožju točkastega telesa (slika 2.8). Kolobar s polmerom  $x$  in širino  $dx$  ima površino  $dS = 2\pi x dx$  in maso  $dM = \sigma dS = 2\pi \sigma x dx$ . Točkasta telesa s tega kolobarja privlačujejo točkasto telo  $m$  s silo  $dF$ , ki je zaradi simetrije pravokotna na ploščo in znaša:  $dF = GmdM \cdot r^2 \cos \alpha = 2\pi \sigma Gm \cdot r^2 \cos \alpha dx$ , kjer je  $r = a/\cos \alpha$  in  $x = a \tan \alpha$ . Celotna sila  $F$  je integral prispevkov  $dF$  posameznih kolobarjev:

$$F = 2\pi \sigma Gm \int_0^\infty r^2 \cos x dx = 2\pi \sigma Gm \int_0^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha =$$

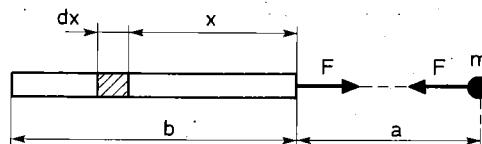
Dobimo presenljiv rezultat: gravitacijska privlačna sila med točkastim telesom in veliko ploščo je neodvisna od oddaljenosti telesa od plošče ( $a$ ); ne glede na to, ali je telo blizu plošče ali daleč proč od nje, čuti enak gravitacijski privlak.

**3. Točkasto telo in kroglasta lupina.** Točkasto telo z maso  $m$  je za  $a$  oddaljeno od središča tanke kroglaste lupine, ki ima polmer  $R$  in maso  $M$  (slika 2.9). Snov lupine je enakomerno razporejena po površini  $4\pi R^2$ , tako da na enoto površine odpade masa  $\sigma = dM/dS = M/4\pi R^2$ .

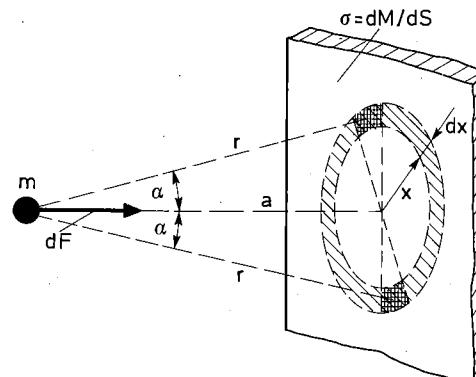
Lupino v mislih razdelimo na ozke kolobarjaste trakove, katerih skupna os je vzdolž veznice točkasto telo – središče lupine. En tak kolobar (s kotom ob vrhu med  $\theta$  in  $\theta + d\theta$ ) ima površino  $dS = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$  in maso  $dM = \sigma dS$ . Celotno lupino zajamemo s  $\theta$  od 0 do  $\pi$ .



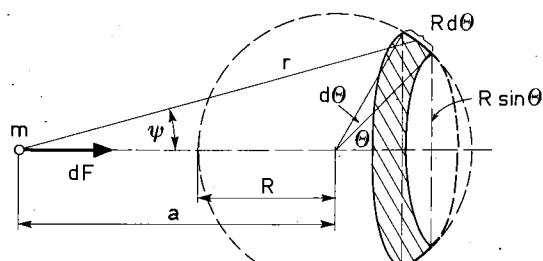
Slika 2.6



Slika 2.7



Slika 2.8



Slika 2.9

Kolobarjast trak je sestavljen iz točkastih delov, ki so približno enako oddaljeni ( $r$ ) od telesa  $m$ . Rezultanta vseh sil, s katerimi ti deli privlačujejo telo  $m$ , ima smer veznice središče lupine – točkasto telo in znaša:  $dF = GmdM \cdot r^2 \cos\psi = Gm\sigma \cdot 2\pi R^2 r^2 \sin\theta \cos\psi d\theta$ , kjer je  $r^2 = a^2 + R^2 + 2aR\cos\theta$  in  $\cos\psi = (a + R\cos\theta)/r$ . Celotna sila  $F$ , s katero vsi kolobarjasti trakovi kroglaste lupine privlačujejo točkasto telo  $m$ , je dana z integralom prispevkov  $dF$ , pri čemer gre  $\theta$  od 0 do  $\pi$ :

$$F = 2\pi R^2 \sigma mG \int_0^\pi (a + R\cos\theta)(a^2 + R^2 + 2aR\cos\theta)^{-3/2} \sin\theta d\theta$$

Vrednost integrala je  $2/a^2$ , če je  $a > R$ , in je nič za  $a < R$ . Če je torej točkasto telo  $m$  zunaj kroglaste lupine ( $a > R$ ), jo privlačuje (ona pa njega) s silo:

$$F = 2\pi R^2 \sigma mG \cdot 2/a^2 = GmM/a^2$$

Ki je tolikšna, kot da bi bila kroglasta lupina točkasto telo v središču, kot da bi bila njena snov zbrana v središču.

Zanimivo je, da **kroglasta lupina ne učinkuje z gravitacijsko silo na telo, če je telo znotraj nje**; za  $a < R$  je namreč  $F = 0$ . Rezultanta gravitacijskih sil, s katerimi posamezni deli kroglaste lupine učinkujejo na telo v notranosti, se iznči, ne glede na to, kje v notranosti lupine je telo. Lupina ne učinkuje na telesa v svoji notranosti; deluje le na telesa iz okolice, na te pa tako, kot da bi sama bila točkasto telo v lastnem središču.

**4. Točkasto telo in polna krogla.** Polna homogena krogla ima maso  $M$  in polmer  $R$ ; njeno središče je za  $a$  oddaljeno od točkastega telesa  $m$ .

Kroglo v mislih olupimo na tanke kroglaste lupine; vsaka od njih je debela  $dr$ , polmer  $r$  pa gre od 0 do  $R$ . Celotna masa  $M$  krogle je enakomerno razporejena po notranosti; na enoto prostornine zato odpade masa  $3M/4\pi R^3$ . Masa lupine s polmerom  $r$  zato znaša  $dM = (3M/4\pi R^3)dr = (3M/R^3)r^2 dr$ .

Vsaka lupina učinkuje le na telesa iz okolice, in to kot da bi sama bila točkasto telo. Za  $a \geq R$  zato dobimo, da celotna krogla deluje na točkasto telo  $m$  s silo:

$$F = GmM/a^2 \quad \text{za } a \geq R$$

Na telo v notranosti krogle ( $a < R$ ) učinkujejo le lupine z  $r \leq a$ . Njihova celotna masa je  $(3M/4\pi R^3) \cdot 4\pi a^3/3 = M(a^3/R^3)$ , zato dobimo:

$$F = Gm(Ma^3/R^3)/a^2 = G(mM/R^3)a \quad \text{za } a \leq R$$

Če označimo silo  $F$  za  $a = R$  (telo na površini krogle) z  $F(R) = GmM/R^2$ , lahko gravitacijsko silo med točkastim telesom  $m$  in polno kroglo napišemo v obliki:

$$F = \begin{cases} F(R)R^2/a^2 & \text{za } a \geq R \\ F(R)a/R & \text{za } a \leq R \end{cases} \quad (2.9)$$

Dokler je telo v notranosti polne homogene krogle ( $a < R$ ), narašča gravitacijska sila med njim in kroglo premo sorazmerno z oddaljenostjo od središča. Sila je največja, kadar je telo na površini krogle ( $a = R$ ). V okolici krogle ( $a > R$ ) pa sila pojema s kvadratom oddaljenosti od središča. Črtkana krivulja na sliki (2.10)

predstavlja odvisnost gravitacijske sile  $F$  med točkastim telesom  $m$  in kroglasto lupino (z maso  $M$  in polmerom  $R$ ) od oddaljenosti ( $a$ ) telesa od središča lupine. Pri  $a = R$  je ta krivulja nevezna; nenadoma se spremeni s  $F(R)$  na 0. Zvlečena krivulja se nanaša na polno homogeno kroglo (z enako maso  $M$  in polmerom  $R$ ). Za  $a > R$  se krivulji ne razlikujeta (zakaj ne?), razlikujeta pa se za  $a < R$ : pri lupini je  $F = 0$ , pri krogli pa se linearno zmanjšuje k nič v središču ( $a = 0$ ).

### Teža – težni pospešek

Na vsako telo na zemeljskem površju in bližnji okolici deluje gravitacijska privlačna sila Zemlje. Privlačnost Lune in drugih nebesnih teles (tudi Sonca) zaradi velike oddaljenosti zanemarimo. Ravno tako ne upoštevamo medsebojne privlačnosti teles.

Gravitacijska sila, s katero Zemlja vleče telo navzdol, se imenuje **teža telesa** ( $T$ ). Telo tehta (ima težo), ker ga Zemlja vleče navzdol z gravitacijsko silo. Ako bi Zemlja bila popolna krogla, bi imela teža telesa smer natančno k središču Zemlje. Zaradi dnevnega vrtenja Zemlje je Zemlja nekoliko sploščena, je skoraj okrogel elipsoid s krajšo (polarno) polosjo 6357 km in z daljšo (ekvatorialno) polosjo 6378 km. Povprečni polmer Zemlje (to je polmer nadomestne krogle z enako prostornino kot dejanski elipsoid) je 6371 km. Natančnejša merjenja s sateliti so celo pokazala, da je južna polobla za spoznanje debelejša od severne, tako da ima Zemlja hruškasto obliko.

Prosto telo zaradi teže pospešeno pada s **težnim pospeškom** ( $g$ ). Iz Newtonovega zakona dinamike (2.1) potem sledi:

$$T = mg \quad (2.10)$$

Ne pozabimo, da Newtonov zakon dinamike velja le za inercialne koordinatne sisteme. Zemlja pa je neinercialni sistem, saj se vrti okrog svoje osi, obenem pa še kroži okrog Sonca. Radialni pospešek zaradi dnevnega vrtenja je največji na ekuatorju in znaša  $R\omega^2 = R(2\pi/\text{dan})^2 = 3,4 \text{ cm/s}^2$ , radialni pospešek pa je zaradi letnega kroženja okrog Sonca približno  $0,6 \text{ cm/s}^2$ . Glede na to, da je težni pospešek okrog 980  $\text{cm/s}^2$ , lahko radialna pospeška Zemlje v prvem približku zanemarimo in Zemljo obravnavamo kot inercialni koordinatni sistem. Le če je natančna vrednost težnega pospeška pomembna, moramo upoštevati tudi vrtenje oziroma kroženje Zemlje, to je upoštevati moramo razliko med relativnim in absolutnim pospeškom.

Teža telesa ( $T = mg$ ) je gravitacijska sila med telesom in Zemljijo, torej je dana z Newtonovim gravitacijskim zakonom (2.8). Zemlja z maso  $M_z$  privlačuje telo z maso  $m$ , ki je na višini  $z$  nad zemeljskim površjem, to je na oddaljenosti  $r = R + z$  od središča Zemlje, z gravitacijsko silo:

$$T = GmM_z/r^2 = mg \quad \text{ali} \\ g = GM_z/r^2 \quad M_z = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Vidimo, da je težni pospešek  $g$  neodvisen od mase telesa. Parametra  $G$  in  $M_z$  raje izrazimo s pospeškom  $g_0$  telesa na površju Zemlje:

$$\begin{aligned} g(r = R) &= g_0 = GM_z/R^2 \\ g &= g_0 R^2/r^2 = g_0(1 + z/R)^{-2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

**Težni pospešek se z višino zmanjšuje;** in sicer s kvadratom oddaljenosti od središča Zemlje. Največji je v neposredni bližini zemeljskega površja. Za  $z \ll R = 6370 \text{ km}$  lahko vzamemo:  $g \approx g_0$ , da se težni pospešek ne spreminja z višino.

Težni pospešek merimo z **gravimetrom**, to je občutljiva vzemtna tehника za merjenje gravitacijske sile. Z natančnim merjenjem so določili njegovo spremenjanje s krajem, predvsem z geografsko širino ( $\varphi$ ). Spreminjanje z geografsko širino je posledica vrtenja Zemlje in sploščenosti njene oble. Mednarodno sprejeta **gravitacijska enačba** podaja odvisnost pospeška  $g_0$  od geografske širine (ta se nanaša na zemeljska tla):

$$g_0 = 9,7805 (1 + 0,005288 \sin^2 \varphi - 0,000006 \sin^2 2\varphi) \text{ m/s}^2$$

Težni pospešek je največji na polu –  $9,8322 \text{ m/s}^2$  in najmanjši na ekvatorju –  $9,7805 \text{ m/s}^2$ . Razlika med polarno in ekvatorialno vrednostjo težnega pospeška je okrog 0,5%, od tega 0,33% zaradi vrtenja Zemlje in 0,17% zaradi sploščenosti oble.

Težni pospešek na površju drugih planetov je odvisen predvsem od mase in velikosti planetov. V tabeli so pospeški  $g_0$  za posamezna nebesna telesa (upoštevan je le gravitacijski vpliv samega nebesnega telesa). Na Luni je težni pospešek kar 6 krat manjši kot na Zemlji. 60-kilogramski človek, ki na zemeljska tla pritiska s silo  $60 \text{ kp} = 600 \text{ N}$ , pritiska na Lunina tla le s silo  $100 \text{ N}$ . Tudi na Marsu je pospešek precej (5 krat) manjši kot na Zemlji. Zelo velik težni pospešek vlada na površini Jupiterja in seveda na Soncu.

### Težni pospešek na površju nebesnih teles

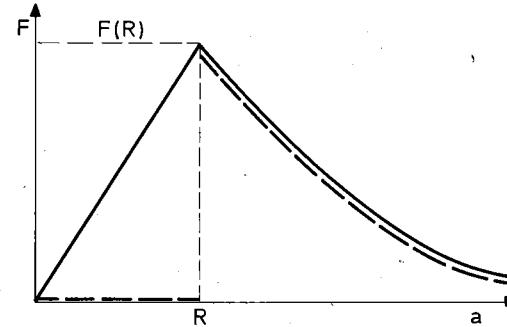
	$g (\text{m/s}^2)$	$g/g_z$
Sonce	275	28
Merkur	2,5	0,26
Venera	8,8	0,90
Zemlja	9,8	1,00
Luna	1,6	0,16
Mars	2,0	0,20
Jupiter	26	2,65
Saturn	11	1,12
Uran	9,4	0,96
Neptun	9,8	1,00

### Gibanje satelitov

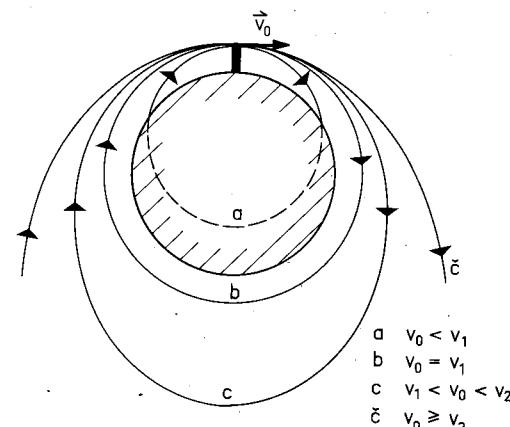
Pri obravnavi gibanja satelitov ali raket v bližnji okolici Zemlje (nekaj sto km nad površjem) lahko gravitacijsko privlačnost Lune in Sonca zanemarimo v primerjavi s privlačno silo Zemlje. Sonce vsiljuje zemeljskim predmetom pospešek  $0,6 \text{ cm/s}^2$ , Luna pa  $0,0033 \text{ cm/s}^2$ , kar je oboje malo v primerjavi s težnim pospeškom  $980 \text{ cm/s}^2$ . Upoštevamo le gravitacijsko silo Zemlje, to je težo satelita:

$$\mathbf{T} = mg(r) = -GM_zmr/r^3 = mg_0R^2/r^2 \quad (2.11a)$$

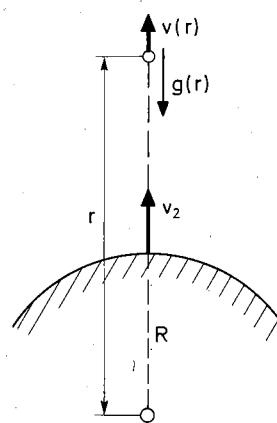
Krajevni vektor  $\mathbf{r}$  satelita izhaja iz središča Zemlje; predznak minus je zato, ker ima teža  $\mathbf{T}$  nasprotno smer kot krajevni vektor  $\mathbf{r}$ .



Slika 2.10



Slika 2.11



Slika 2.12

Recimo, da z vrha visokega stolpa odvržemo telo z začetno hitrostjo  $v_0$  v vodoravni smeri. Ta primer smo na strani 20 obravnavali kot vodoravni met, le da smo predpostavljali vodoravna tla in stalen težni pospešek. Tokrat vzamemo, da je težni pospešek usmerjen k središču Zemlje in da z višino pojema po enačbi (2.11). Telo pade na tla tem dlje od stolpa, s čim večjo hitrostjo  $v_0$  ga odvržemo. Zemlja vpliva z gravitacijsko silo na gibanje telesa tako, kot da bi bila njena snov zbrana v središču, kot da bi gravitacijska sila učinkovala iz središča (t. i. **centralna sila**). Računanje gibanja telesa v polju takšne centralne sile žal presega okvir te knjige, zato bomo navedli le rezultat.

Telo se v splošnem giblje po eliptični tirnici, katere eno gorišče je v središču Zemlje. Če bi se lahko gibalo skozi notranjost Zemlje, bi se gibalo npr. po tiru a na sliki (2.11) in bi se vrnilo iz nasprotnne smeri do izhodnega mesta na stolpu. Velikost in sploščenost eliptične tirnice sta odvisni od začetne hitrosti  $v_0$ . Večja kot je ta, bolj je tirnica zakrožena. Pri  $v_0 = v_1$  se tirnica zaokroži v krog (krivulja b na sliki 2.11): telo se kot satelit giblje po krogu (s polmerom  $r$ ) okrog Zemlje, kar pomeni, da se giblje z radialnim pospeškom  $a_r = v_1^2/r$ , ki ga vsiljuje teža satelita:

$$\begin{aligned} T &= ma_r \\ mg &= mv_1^2/r = mg_0R^2/r^2 \\ v_1^2(r) &= g_0R^2/r \end{aligned} \quad (2.12)$$

Vidimo, da je hitrost kroženja satelita tem manjša, čim bolj je satelit oddaljen od Zemlje. Satelit se giblje najhitreje tik nad zemeljskim površjem, to je za  $r = R$ :

$$v_1 = \sqrt{g_0R} = 7,9 \text{ km/s} \quad (2.13)$$

**prva kozmična hitrost**

Če želimo, da satelit kroži tik nad zemeljskim površjem, ga moramo izstreliti v vodoravni smeri s hitrostjo  $v_1 = 7,9 \text{ km/s}$ ; tej hitrosti pravimo **prva kozmična hitrost**. Običajno izstrelijo satelite v krožne oz. elipsne tirnice na višini 200–300 km, kjer je zahtevana hitrost manjša od  $v_1$ , pa tudi zračni upor ne moti.

Na višini  $z$  nad zemeljskim površjem kroži satelit s hitrostjo  $v_1(z) = v_1(1 + z/R)^{-1/2}$  in z obhodnim časom:

$$\begin{aligned} t_0 &= 2\pi r/v_1(z) = (2\pi R/v_1)(1 + z/R)^{3/2} \\ t_0 &= t_0(0)(1 + z/R)^{3/2}, t_0(0) = 2\pi R/v_1 = 1,41 \text{ h} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Obhodni čas satelita se z višino povečuje. Satelit je ves čas nad istim mestom zemeljskega površja (npr. komunikacijski satelit), če kroži enako hitro kot Zemlja, če je torej tako visoko, da je njegov obhodni čas 24 ur:

$$z = R [(24 \text{ h}/1,41 \text{ h})^{2/3} - 1] = 35800 \text{ km}$$

Vzemimo, da je začetna vodoravna hitrost  $v_0$  satelita večja od prve kozmične hitrosti. Tirnica gibanja je spet eliptična, le da je zdaj središče Zemlje v drugem gorišču elipse (krivulja c na sliki 2.11). Če začetno hitrost še večamo, se eliptična tirnica tudi veča, napihuje in oddaljuje od Zemlje. Pri  $v_0 = v_2$  se zaključena eliptična tirnica pretrga in odpre (elipsa se spremeni v parabolo, krivulja č na sliki 2.11). Začetna hitrost je dovolj velika, da telo premaga gravitacijsko privlačnost

Zemlje in odleti proč. Začetna hitrost  $v_2$ , pri kateri se to zgodi, se imenuje **druga kozmična hitrost**.

Kolikšna je druga kozmična hitrost, najlaže ugotovimo, če satelit z zemeljskega površja izstrelimo v navpični smeri. S kolikšno začetno hitrostjo ( $v_2$ ) ga moramo izstreliti, da zapusti območje zemeljske privlačnosti, da se ustavi šele v neskončni oddaljenosti (in se več ne vrne)? Primer je pravzaprav navpični met (gl. str. 14), le da tu upoštevamo, da se težni pospešek z višino zmanjšuje (slika 2.12).

Najoddaljenosti  $r$  od središča Zemlje ima satelit hitrost  $v = dr/dt$ . Pospešek na tej višini je  $g(r) = g_0R^2/r^2 = -dv/dt$  (negativni predznak zato, ker pozitivnemu  $dt$  ustreza negativni  $dv$ , hitrost se med dviganjem zmanjšuje). Sledi:

$$\begin{aligned} g_0R^2r^{-2} &= -\frac{dv}{dt} = -\frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = -v \frac{dv}{dr} \quad \text{ali} \\ vdv &= -g_0R^2r^{-2}dr \end{aligned}$$

Levo stran enačbe integriramo po  $v$  od  $v_2$  do  $v(r)$ , desno stran pa po  $r$  od  $R$  do  $r$ . Dobimo:

$$\begin{aligned} v^2(r) - v_2^2 &= 2g_0R^2(1/R - 1/r) \quad \text{ali} \\ v^2(r) &= v_2^2 - 2g_0R^2(1/R - 1/r) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Ta enačba je posplošitev enačbe (1.22c), ki smo jo izpeljali za navaden navpični met. Lahko vzamemo, da je v bližini zemeljskega površja pospešek  $g$  konstanten ( $= g_0$ ), torej velja z  $\langle R \rangle$  in zato  $r^{-1} = (R + z)^{-1} = R^{-1}(1 + z/R)^{-1} \approx R^{-1}(1 - z/R) = R^{-1} - z/R^2 + \dots$  ter  $v^2 = v_2^2 - 2g_0R^2(R^{-1} - R^{-1} + zR^{-2} - \dots) \approx v_2^2 - 2g_0z$ , kar že poznamo.

Druga kozmična hitrost  $v_2$  je določena z zahtevo, da se satelit ves čas oddaljuje od Zemlje, da se ustavi kvečemu v neskončnosti:  $v(\infty) = 0$ . Sledi:

$$0 = v_2^2 - 2g_0R^2(1/R - 1/\infty) \quad \text{ali}$$

$$v_2 = \sqrt{2g_0R} = 11,2 \text{ km/s} \quad (2.16)$$

**druga kozmična hitrost**

Če želimo, da satelit (raketa, vesoljska ladja) zapusti območje zemeljske privlačnosti, ga moramo izstreliti z zemeljskega površja najmanj z drugo kozmično hitrostjo  $v_2 = 11,2 \text{ km/s}$ .

**Primer:**

Satelit kroži okrog Zemlje po krožnem tiru na višini  $h = 250 \text{ km}$  nad ekvatorjem. Kolikšna je njegova hitrost? Koliko časa potrebuje za en obhod okrog Zemlje? Težni pospešek na površju Zemlje je  $g_0 = 9,78 \text{ m/s}^2$ , polmer je  $R = 6378 \text{ km}$

$$v^2 = rg(r) = g_0R^2/r = g_0R^2/(R + h)$$

$$v = \sqrt{g_0R^2/(R + h)} = 7,75 \text{ km/s}$$

$$t_0 = 2\pi r/v = (2\pi R/v)(1 + h/R)^{3/2} \quad (\text{gl. 2.14})$$

$$t_0 = 1,41 \text{ h} (1 + 250/6378)^{3/2} = 1,49 \text{ h}$$

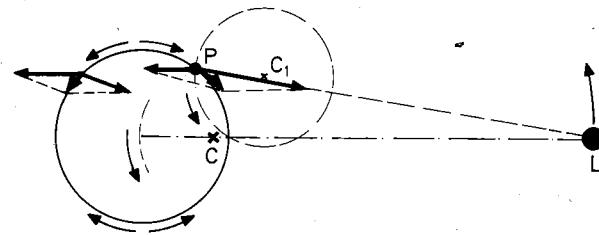
### Plima in oseka

Gladina morij se periodično dviga (plima) in spušča (oseka). Vsak dan nastopita dve plimi in dve oseki; zaporedni plimi oziroma oseki se ponavljata s periodo  $12^{\text{h}}25^{\text{min}}$ , kar je polovica Luninega dneva (časa, ko Luna ponovno prekorači dan meridian). Ko bi bila perioda plimovanja natanko 12 h, bi se plima in oseka ponavljali vsak dan ob enakem času, tako pa sta vsak naslednji dan zakasnjeni za 25 minut. Ker zaporedje plim in osek sledi Luninem in ne Sončnemu dnevnu, pomeni, da Luna močneje vpliva na plimovanje kot Sonce. Račun pokaže, da je vpliv nebesnega telesa na plimovanje zemeljskih voda premo sorazmeren z maso telesa in obratno sorazmeren s kubom njegove oddaljenosti. Kljub velikanski masi je vpliv Sonca na plimovanje zaradi precejšnje oddaljenosti le približno poltolikšen kot vpliv Lune; razmerje med obema je  $(M_S/M_L)(r_L/r_S)^3 = 0,45$ . Kadar so Sonce, Luna in Zemlja v isti črti (ob ščipu ali mlaju), se gravitacijska vpliva Lune in Sonca seštejeta in plimovanje je tedaj najmočnejše. Ob prvem in zadnjem luninem krajcu pa sta plima in oseka najmanj izraziti.

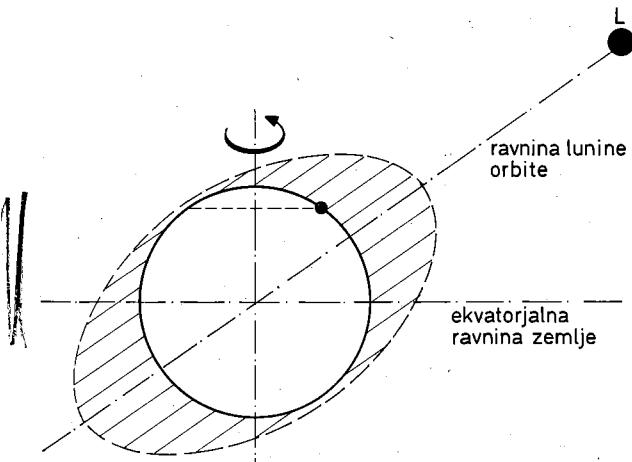
Periodično ponavljanje plime in oseke je posledica gravitacijske privlačnosti Lune (in nekoliko Sonca), mesečnega vrtenja Zemlje in Lune okrog njunega skupnega središča ( $C$  na sliki 2.13) ter dnevnega vrtenja Zemlje okrog polarne osi.

Pravimo, da Luna kroži okrog Zemlje, vendar to ne drži popolnoma. Dejansko se tudi Zemlja in Luna vrtita okrog skupnega masnega središča  $C$ , ki je za  $3/4$  Zemljinega polmera ( $R$ ) oddaljeno od središča Zemlje. Okrog tega središča se Luna in Zemlja vrtita z obhodnim časom 27,3 dni. Zemlja pri tem kroži translatorno, tako da vsaka njena točka opisuje krog z enakim polmerom  $(3/4)R$ , le središča kroženja so za različne točke različna. Središče Zemlje kroži po krogu s središčem v skupnem masnem središču  $C$ , ki je na veznici Luna-Zemlja. Točka  $P$  na sliki (2.13) pa kroži po črtkanem krogu s središčem  $C_1$ .

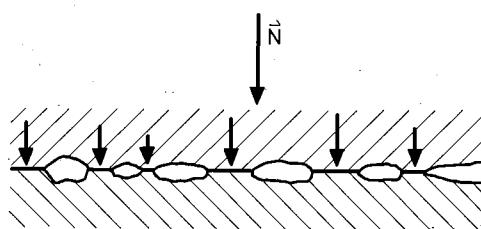
Opazujemo gibanje oceanskih voda na zemeljskem površju, torej gibanje v neinercialnem koordinatnem sistemu, ki kroži. Gibanje v takšnem koordinatnem sistemu pravilno opišemo (gl. str. 50) le, če poleg dejanskih sil upoštevamo še centrifugalno silo, ki je usmerjena proč od centra kroženja. Sledi, da na vsako točko Zemlje »deluje« poleg gravitacijske privlačne sile Lune še centrifugalna sila, ki je paralelna trenutni veznici Zemlja-Luna in usmerjena proč od centra  $C_1$  (to je proč od Lune). V središču Zemlje sta gravitacijska privlačna sila Lune in centrifugalna sila nasprotno enaki ter se tako kompenzirata. Ker gravitacijska sila Lune pojema s kvadratom oddaljenosti od Lune, centrifugalna pa je za vse kraje enaka, je gravitacijska sila Lune na Lunini strani Zemlje močnejša od centrifugalne sile, na nasprotni strani Zemlje pa šibkejša. Rezultanta Lunine gravitacijske in centrifugalne sile je na različnih mestih zemeljskega površja (gl. sliki 2.13) usmerjena tako, da voda odteka s krajev, ki so pravokotni na veznico Luna-Zemlja (tam je oseka), in se gomili (plima) ob krajeh, ki so najbliže Luni oziroma najbolj oddaljeni od nje. Dnevno vrtenje Zemlje okrog polarne osi povzroči, da zemeljske morske vode izmenoma prehajajo iz območja plime v območja oseke in obratno.



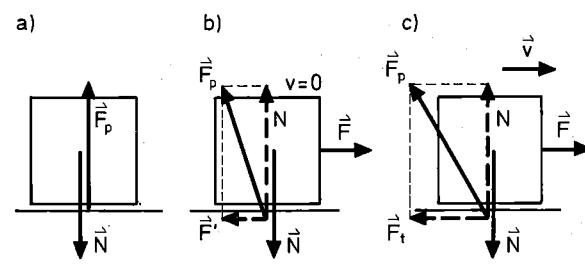
Slika 2.13



Slika 2.14



Slika 2.15



Slika 2.16

Zaporedni plimi običajno nista enako visoki; močni plimi sledi šibka, tej zopet močna itd. Vzrok temu je nagnjenost Lunine orbite glede na ekvatorialno ravnino Zemlje (slika 2.14). Ker nastane najmočnejša plima v smeri proti Luni, ima kraj na severni geografski širini na Lunini strani Zemlje visoko plimo, na nasprotni strani (to je 12 ur kasneje) pa nizko plimo.

## Torna sila (sila trenja)

Telo običajno ni prosti; vezano je na podlago, na kateri leži oziroma se giblje po njej. Poleg drugih sil, ki nanj učinkujejo, moramo upoštevati tudi **silo podlage** ( $F_p$ ). Ta omogoča, da telo na podlagi miruje, vendar tudi nasprotuje premikanju telesa na podlagi.

Površina trdnega telesa nikoli ni povsem gladka. Še tako dobro polirana in očiščena površina kovine je videti hrapava, če jo gledamo pod mikroskopom. Staknjeni telesi se zaradi hrapavosti dotikata le na nekaterih mestih (slika 2.15). Na teh sta dovolj blizu drugo drugemu, da že učinkujejo močne sile med atomi sosednjih teles, ki telesi povežejo (t. i. površinska adhezija). Čim večja je skupna stična površina obeh teles, tem trdneje sta telesi povezani. Stična površina teles se poveča, če pritisnemo na telo v smeri pravokotno na podlago, npr. s silo  $N$ . Ta se osredotoči na majhne odseke stične površine, kjer se tlak zelo poveča. Zaradi povečanega tlaka se telo in podlaga na stičnih mestih plastično deformirata in stična površina se tako poveča. Obenem se telo in podlaga nekako plastično zvarita, kar dodatno ojači povezavo telesa na podlago. Ako bi se stična mesta razširila po celotni skupni ploskvi, bi se telesi povsem (trdno) spojili. Običajno zavzemajo stična mesta le 10 do 100 milijonink celotne površine, ki jo telesi skupno pokrivata.

Da se telo premakne vzdolž podlage (zdrsne), se morajo potrgati vezi med telesom in podlago. Zato je za premik telesa po podlagi potrebna sila v smeri podlage ali drugače; podlaga nasprotuje premiku telesa.

Značilnosti **sile podlage** ( $F_p$ ) si oglejmo s poskusom. Telo leži na ravni podlagi. Nanj lahko poleg teže  $mg$  učinkujejo še dodatne sile, ki ga pritiskajo ob podlago ali ga vlečejo proč. Celotno silo, ki učinkuje na telo v smeri pravokotno na podlago, označimo z  $N$ ; s to silo telo pritiska na podlago, in sicer v smeri pravokotno na stično površino. Če telo leži prosti na vodoravni podlagi, je  $N = mg$ . Z dodatno pravokotno silo  $F$  povečamo pritisk telesa na podlago:  $N = mg + F$ . Če s silo  $F$  vlečemo telo proč od podlage, se pritisk telesa na podlago manjša. Pri  $F = -mg$  (dvigna sila enaka teži telesa) je  $N = 0$ , telo ne pritiska na podlago.

Podlaga se pod vplivom pravokotne sile  $N$ , s katero telo pritiska nanjo, deformira in reagira s silo podlage  $F_p$ , ki je nasprotno enaka sili, s katero telo pritiska nanjo. V tem primeru torej:  $F_p = -N$ . Na telo tako učinkujeta pravokotna sila  $N$  navzdol in nasprotno enaka sila podlage  $F_p$ , tako da je telo v ravnotesju:  $F_p + N = 0$  (slika 2.16a).

Mirujoče telo na podlagi začnemo vleči vzdolž podlage s silo  $F$ , katere velikost postopoma povečujemo. Opozimo, da telo kljub vlečni sili vzdolž podlage še naprej miruje. Torej je rezultanta sil, ki učinkujejo na telo v

smeri podlage, še vedno nič. To je možno le, če se sila podlage  $F_p$  nagne nazaj (nasprotno smeri vleka oziroma premika), tako da dobi projekcijo  $F'$  na smer podlage, ki nasprotuje vlečni sili:  $F' = -F$  (slika 2.16b). Pravokotna projekcija sile podlage je še naprej nasprotno enaka pravokotni sili  $N$ , s katero telo pritiska pravokotno na podlago. Če vlečna sila  $F$  povečujemo, se povečuje tudi projekcija  $F'$  sile podlage (sila podlage  $F_p$  se nagiba nazaj in povečuje). Toda ta projekcija se lahko povečuje le do zgornje meje  $F'_{max} = F_s$ , ki se imenuje **statična torna sila** (drugo ime zanjo je **sila lepenja**). Ko vlečna sila doseže vrednost  $F_s$ , se telo premakne. Statična torna sila je merilo za trdnost povezanosti telesa s podlago. Čim večji je  $F_s$ , tem večja vlečna sila je potrebna, da se telo premakne na podlagi.

Z merjenjem vlečne sile, pri kateri se telo na podlagi premakne, ugotovimo, da je v okviru natančnosti meritev **statična torna sila premo sorazmerna s pravokotno silo  $N$ , s katero telo pritiska na podlago**:

$$F_s = k_s N \quad (2.17)$$

Sorazmernostni faktor  $k_s$  (čisto število) se imenuje **statični torni koeficient**. Odvisen je od vrste in stanja obeh staknjenih teles, predvsem od njune hrapavosti. Grobe in hrapave površine imajo  $k_s$  okrog 1 (npr. avtomobilská guma na asfaltu), gladke površine pa okrog 0,1 – 0,2. Najmanjši  $k_s$  (okrog 0,02) imata dobro očiščeni, spolirani in naoljeni kovinski površini ter npr. moker led na mokrem ledu. Čiste, neoksidirane kovinske površine imajo sicer velik  $k_s$  (od 0,5 do 1), vendar na zraku kmalu oksidirajo, prevlečejo se z 1–10 nm debelo plastjo oksida, ki močno zmanjša  $k_s$ .

Zanimivo je, da je statični torni koeficient v okviru natančnosti merjenja neodvisen od velikosti stične površine teles. Če je ta (pri enaki pravokotni sili  $N$ ) manjša, se sicer zmanjša površina stika telesa s podlago (čemur ustreza manjša sila povezanosti telesa s podlago), toda obenem se poveča tlak sile  $N$ , kar poveča deformacijo stičnih mest in s tem tudi celotno stično površino. Efekta si nasprotujeta in v prvem približku kompenzirata.

Brž ko vlečna sila  $F$  na sliki (2.16) preseže statično torno silo:  $F > F_s = k_s N$ , se telo premakne in začne drseti v smeri vlečne sile. Sila podlage  $F_p$  je tudi med gibanjem telesa nagnjena nazaj (slika 2.16c), le da ne tako močno kot ob začetnem premiku telesa. Projekcija sile podlage  $F_p$  na podlago med drsenjem telesa se imenuje **drsna torna sila**  $F_t$  ali kar **sila trenja**. Tudi ta je v prvem približku (podobno kot statična torna sila  $F_s$ ) premo sorazmerna s silo  $N$ , s katero telo med gibanjem pritiska pravokotno na podlago:

$$F_t = k_t N \quad (2.18)$$

Sorazmernostni faktor  $k_t$  je **drnsni torni koeficient**; je nekoliko manjši od statičnega tornega koeficiente  $k_s$ , obavda sta podobno odvisna od vrste snovi. Približna odvisnost drsnega tornega koeficiente od hitrosti drsenja je skicirana na sliki (2.17). Opazno je nenadno zmanjšanje tornega koeficiente takoj ob premiku telesa (od  $k_s$  na  $k_t$ ); med gibanjem se  $k_t$  v splošnem nekoliko zmanjšuje z naraščanjem hitrosti, vendar

lahko v prvem približku vzamemo, da je neodvisen od hitrosti.

Pri mirajočem telesu na podlagi je projekcija sile podlage na smer podlage ( $F'$ ) nedoločena, lahko ima vrednosti med 0 in  $F_s = k_s N$  (odvisno od vlečne sile):

$$0 \leq F' \leq F_s$$

Med gibanjem (drsenjem) pa je projekcija  $F'$  sile podlage enaka drsnim tornim silam  $F_t = k_t N$ . Tako **statična kot drsna torna sila vedno nasprotuje premiku oziroma drsenju telesa po podlagi**. Če se smer gibanja (hitrosti) obrne, se obrne tudi smer tornih sil.

Statično trenje je potrebno in koristno, kjerkoli želimo preprečiti drsenje enega telesa ob drugem. Če z roko primemo vrv in jo potegnemo, roka ne zdrsne zaradi statične torne sile med roko in vrvjo. Da je ta dovolj velika, je vrv hrapava, roka pa ne sme biti vlažna ali mastna. Poleg tega vrv močno objamemo in sisnemo, s čimer povečamo pravokotno silo  $N$ . Vrv, ki jo večkrat ovijemo okrog droga, ne drsi okrog droga, četudi prosti konec vrvi vlečemo s precejšnjo silo. Tu sama vlečna sila povzroča pravokotno silo, s katero vrv pritiska na drog.

#### Primer:

Vrv je ovita okrog fiksnega vodoravnega droga, tako da objema na krožnem loku kót  $\alpha$  (slika 2.18). Desni konec vrvi vlečemo navzdol s silo  $T$  (npr. s težo obešene uteži). Najmanj s kolikšno silo  $F$  moramo vleči drugi konec vrvi v narisani smeri, da vrv zaradi tovora  $T$  ne zdrsne po obodu valja?

Zaradi torne sile med vrvjo in obodom gredi se sila v vrvi  $F(\varphi)$  spreminja vzdolž oboda (to je s kotom  $\varphi$ ). V začetku ( $\varphi = 0$ ) je  $F(0) = T$ , na drugem koncu, kjer se vrv odlepi od gredi ( $\varphi = \alpha$ ), pa  $F(\alpha)$ . Vlečna sila  $F$  mora biti enaka  $-F(\alpha)$ .

Poglejmo, za koliko se sila v vrvi spremeni na majhnem odseku vrvi med kotoma  $\varphi$  in  $\varphi + d\varphi$  (slika 2.19). Na ta odsek deluje ostala vrv z obema stranmi s silama  $F(\varphi)$  in  $F(\varphi + d\varphi)$ , ki zaradi ukrivljenosti vrvi nista natanko v nasprotnih smereh; sila  $F(\varphi)$  je npr. zasukana za kót  $d\varphi$  glede na silo  $F(\varphi + d\varphi)$ . Njuna rezultanta je velika  $F(\varphi)d\varphi$  in ima smer k središču oboda. Izbrani odsek vrvi pritiska na obod droga s pravokotno silo  $F(\varphi)d\varphi$ , zato čuti torno silo  $k_s F(\varphi)d\varphi$ , ki nasprotuje zdrsu, ima nasprotno smer kot vlečna sila  $F(\varphi)$ . Ker vrv ne sme zdrsniti, mora veljati:

$$F(\varphi + d\varphi) + k_s F(\varphi)d\varphi = F(\varphi) \quad \text{ali}$$

$$dF = F(\varphi + d\varphi) - F(\varphi) = -k_s F(\varphi)d\varphi \quad \text{ali}$$

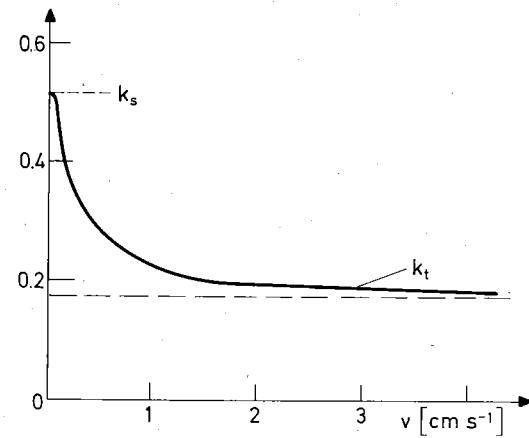
$$\frac{dF}{F} = -k_s d\varphi$$

Dobljeno enačbo integriramo: levo stran od  $T$  do  $F$ , desno pa od 0 do  $\alpha$ . Dobimo:

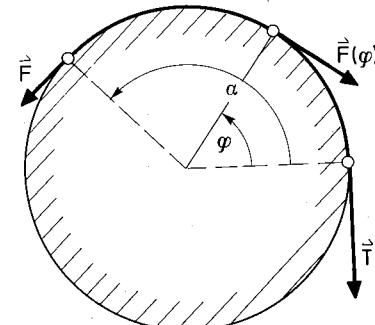
$$\ln F - \ln T = -k_s \alpha \quad \text{ali}$$

$$F = T \exp(-k_s \alpha)$$

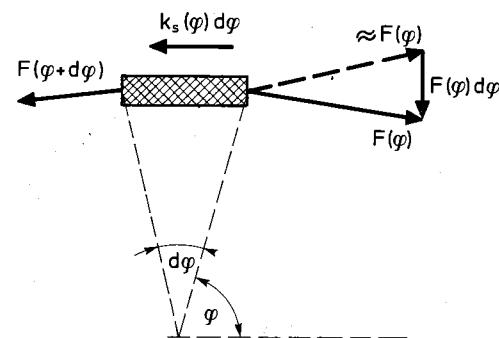
Vidimo, da je vlečna sila  $F$ , ki preprečuje zdrsu vrvi po obodu fiksne gredi, manjša od tovora  $T$  za eksponentni faktor  $\exp(-k_s \alpha)$ ; ta zelo hitro (eksponentno) pada z naraščanjem kota  $\alpha$ , ki ga vrv objema na obodu gredi.



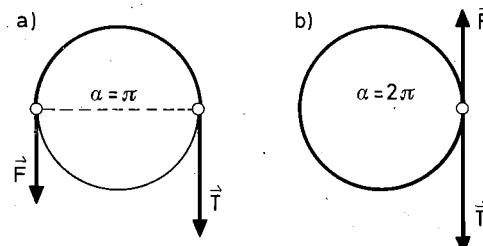
Slika 2.17



Slika 2.18



Slika 2.19



Slika 2.20

Če vlečna sila  $F$  vleče navzdol (slika 2.20a), je  $\alpha = \pi$  in  $F = T \exp(-k_s \pi)$ ; za  $k_s = 0,5$  dobimo  $F = T \exp(-0,5\pi) = 0,21 T$  (vlečna sila je enaka le petini teže, visečega tovora). Če vrv ovijemo enkrat okrog valja (slika 2.20b), je  $\alpha = 2\pi$  in  $F = T \exp(-\pi) = 0,043 T$ . Kolikokrat moramo oviti vrv okrog gredi, da je vlečna sila tisočkrat manjša od teže obešenega tovora?  $F = 0,001 T = T \exp(-k_s 2\pi n)$  ali  $n = (1/2\pi k_s) \ln 1000 = 2,2$ . Vrv moramo oviti nekaj več kot dvakrat.

Če je vlečna sila  $F$  močnejša od  $T \exp(-k_s \alpha)$ , skuša vrv zdrsniti v drugo smer – v smer vlečne sile. Tedaj se smer tornje sile obrne, torni koeficient  $k_s$  v zgornjih enačbah spremeni predznak. Dokler je vlečna sila manjša od  $T \exp(k_s \alpha)$ , vrv še ne zdrsnje v levo. Torej vrv ne zdrsnje ne v levo ne v desno, če je:

$$T \exp(-k_s \alpha) \leq F \leq T \exp(+k_s \alpha)$$

Za hojo po tleh potrebujemo silo v smeri gibanja (npr. za premagovanje zračnega upora, ki nasprotuje gibanju). Zato se z nogama odrivamo od tal in izkoriscamo statično torno silo med podplati in tlemi. Ker hoče noge zdrsniti po tleh v smeri nazaj, ima torna sila smer naprej, v smer gibanja. Vsakdo ve, kako težko je hoditi, če je poledica; posebno težko je pospeševati, zavirati ali zavijati v stran. Transport z vozili na vrteča se kolesa omogoča prav statično trenje med kolesi in cestiščem. Vrteče se kolo skuša zdrseti po cestišču nazaj. Temu nasprotuje sila podlage, ki z vodoravno projekcijo  $F'$  vleče kolo naprej in tako omogoča pospešek (slika 2.21). Večji hitrosti vrtenja koles ustreza večja projekcija sile podlage ( $F'$ ) v smeri vožnje. Ko  $F'$  doseže zgornjo mejo  $F_s = k_s N$ , začne kolo na cestišču podrsati. Statična torna sila potem takem določa največji pospešek, ki ga na cestišču lahko dosežemo. Če se vprašamo, katera sila je neposredno odgovorna, da avto lahko vozi po cesti, je torej odgovor preprost: torna sila. Če ni trenja, npr. na gladkem, poledenelem cestišču, se lahko motor še tako zaganja in kolesa še tako hitro vrtijo, vendar se avto ne premakne.

O pomenu statične tornje sile zgovorno priča tale primer: Fin pesek je sipek in tekoč, ker je trenje med sosednjimi kamenčki prešibko, da bi oviral njihovo medsebojno premikanje. Če pa pesek damo v gumijasto vrečo, iz katere nato izsesamo zrak, tako da zunanj zračni tlak močno stisne vrečo s peskom, se statično trenje med kamenčki močno poveča in pesek učinkuje kot togo telo; z njim npr. lahko zabijamo žebanje.

Torno silo izkoriscamo, da ustavimo gibajoče se telo. Med zaviranjem z zavoro blokiramo kolesa, da prično drseti. Pojavlji se torna sila  $F_t = k_t N$ , ki zavira drsenje. Zavorno silo povečamo, če zavoro nekoliko popustimo, da se kolo malo zakotoli in se s tem stakne s cestiščem, tako da se zopet pojavi statična torna sila, ki je nekoliko večja od drsne  $F_t$ .

### Primeri:

**1. Zavorna pot.** Avto vozi po vodoravni cesti s hitrostjo  $v_0 = 20 \text{ m/s}$ , ko voznik nenadoma s pritiskom na zavoro blokira kolesa, da prično drseti. Na kolikšni razdalji in po kolikšnem času se avto ustavi, če je drsni torni koeficient med gumami in cestiščem enak  $k_t = 0,8$ ?

Avto drsi enakomerno pojemajoče s pojmem kom  $a = -F_t/m = -k_t g$ . Uporabimo zvezo (1.21) med hitrostjo in potjo za enakomerno pospešeno (pojemajoče) gibanje:

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2ax \\ 0 &= v_0^2 - 2k_t g x \quad \text{ali} \\ x &= v_0^2 / 2k_t g = 25 \text{ m} \\ t &= v_0 / k_t g = 2,5 \text{ s} \end{aligned} \quad (2.19)$$

**2. Drsenje pod vplivom poševne sile.** Telo z maso  $m$  leži na vodoravni podlagi. S kolikšnim pospeškom in v kateri smeri se giblje, če ga vlečemo s silo  $F$ , ki z vodoravno smerjo oklepa kót  $\varphi$ ? (Slika 2.22)

Obstajata dve možnosti:

$F \sin \varphi > mg$  (navpična projekcija dvižne sile večja od teže telesa): telo se dvigne in pospešuje v smeri rezultante  $mg + F$  s pospeškom  $a = g + F/m$ .

$F \sin \varphi < mg$ : telo leži na podlagi ali drsi po njej.

V drugem primeru telo pritiska na podlago s pravokotno silo  $mg - F \sin \varphi$ , zato poleg teže  $mg$  in vlečne sile  $F$  deluje nanj še sila podlage  $F_p$ . Navpična projekcija  $N$  zadnje je nasprotno enaka sili  $mg - F \sin \varphi$ , s katero telo pritiska na podlago:

$$N = mg - F \sin \varphi$$

Vodoravna projekcija sile podlage pa je nasprotno enaka vodoravni projekciji vlečne sile:  $F' = F \cos \varphi$  (gl. str. 38). Če je ta manjša od statične tornje sile  $F_s = k_s N$ , telo na podlagi miruje (kljub vlečni sili). Pri  $F \cos \varphi > k_s N$  pa telo zdrsi in se nato giblje vzdolž podlage enakomerno pospešeno s pospeškom:

$$\begin{aligned} a &= (F \cos \varphi - F_t)/m = (F \cos \varphi - k_t N)/m = \\ a &= F(\cos \varphi + k_t \sin \varphi)/m - g k_t \end{aligned}$$

**3. Ravnovese na klancu.** Kvadrasto telo z maso  $m$  leži na klancu, katerega strmina je podana z naklonskim kotom  $\varphi$ . Na telo učinkujeta teža  $mg$  in sila podlage  $F_p$ . Prvo razstavimo na **dinamično komponento**  $m g \sin \varphi$ , ki pospešuje telo navzdol po klancu, in na **statično komponento**  $m g \cos \varphi$ , s katero telo pritiska pravokotno na podlago. Silo podlage  $F_p$  razstavimo, enako kot v prejšnjem primeru, na pravokotno komponento  $N$  in na komponento  $F'$  vzdolž podlage. Komponenta  $N$  je enaka sili, s katero telo pritiska pravokotno na podlago:

$$N = m g \cos \varphi$$

Recimo, da je klanec v začetku zelo položen in da njegovo strmino postopoma povečujemo. V začetku telo še miruje na klancu in je  $m g \sin \varphi = F'$ . Z naraščanjem strmine se  $F'$  povečuje, obenem pa se zmanjšuje pravokotni pritisk telesa na podlago in s tem tudi zgornja meja za  $F'$  (gl. str. 38). Ko  $F'$  doseže zgornjo mejo  $F'_{\max} = F_s = k_s N = k_s m g \cos \varphi$ , telo zdrsnje po klancu navzdol. To se zgodi pri kotu  $\varphi = \varphi_s$ , za katerega velja:

$$\begin{aligned} m g \sin \varphi_s &= k_s m g \cos \varphi_s \quad \text{ali} \\ \operatorname{tg} \varphi_s &= k_s \end{aligned} \quad (2.20a)$$

**Statični torni koeficient je enak tangensu naklonskega kota strmine, pri kateri mirujoče telo na klancu zdrsnje.**

Ko telo zdrsne, naravnomo (nekoliko zmanjšamo) strmino klanca ( $\varphi = \varphi_t$ ), tako da telo drsi navzdol po klancu enakomerno s stalno hitrostjo, kar pomeni, da je dinamična komponentna teža enaka drsni torni sili:

$$mg \sin \varphi_t = k_t mg \cos \varphi_t \quad \text{ali} \\ k_t = \tan \varphi_t \quad (2.20b)$$

**Drsni torni koeficient je enak tangensu naklonskega kota strmine, po kateri telo drsi enakomerno.**

Telo miruje na klancu, če je naklonski kót strmine manjši od  $\varphi_s$ . Pri  $\varphi > \varphi_s$  pa telo drsi pospešeno navzdol. Če kljub preveliki strmini želimo, da telo na klancu miruje, moramo z dodatno silo  $F$  pritiskati na telo poševno, npr. pod kotom  $\alpha$  glede na klanec (slika 2.23). Potisna sila  $F$  potrebna za ravnovesje telesa na klancu, lahko pri danem kotu  $\alpha$  zavzame različne vrednosti med  $F_{min}$  in  $F_{max}$ . Spodnja meja  $F_{min}$  je najmanjša zahtevana sila  $F$ ; pri tej telo začne drseti navzdol, komponenta sile podlage  $F'$  je usmerjena navzgor in enaka  $F_s$ . Za ta mejni primer velja:

$$F_{min} \cos \alpha - mg \sin \varphi + F_s = 0, \quad F_s = k_s N$$

Pravokotna sila  $N$  je nasprotno enaka sili, s katero telo pritiska pravokotno na podlago, to je:

$$N = mg \cos \varphi + F_{min} \sin \alpha$$

Sledi:

$$F_{min} = mg(\sin \varphi - k_s \cos \varphi) / (\cos \alpha + k_s \sin \alpha) \quad (2.21a)$$

Zgornja meja potisne sile,  $F_{max}$ , pa je sila, pri kateri telo zdrsni navzgor po klancu, komponenta sile podlage  $F'$  je enaka  $F_s$  in usmerjena navzdol. Izraz za  $F_{max}$  lahko dobimo neposredno iz enačbe (2.21a), če statičnemu tornemu koeficientu  $k_s$  spremenimo predznak:

$$F_{max} = mg(\sin \varphi + k_s \cos \varphi) / (\cos \alpha - k_s \sin \alpha) \quad (2.21b)$$

Recimo, da večamo naklonski kót  $\alpha$  potisne sile  $F$ , tako da sila  $F$  bolj in bolj pritiská pravokotno na podlago. Ko  $\alpha$  doseže  $\varphi_s$  in je  $\cos \alpha - k_s \sin \alpha = \cos \varphi_s - k_s \sin \varphi_s = 0$ , je  $F_{max} = \infty$ . Torej za  $\alpha \geq \varphi_s$  drsenje telesa navzgor po klancu ni več možno, ne glede na velikost potisne sile  $F$ . Za  $\alpha = 90^\circ$  (potisna sila pravokotna na podlago) računamo le  $F_{min}$ , saj telo lahko drsi le navzdol.

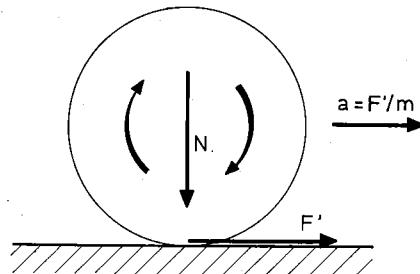
Drsenje prostega telesa po strmem klancu navzdol (za  $F = 0$ ) pospešuje dinamična komponentna teže ( $mg \sin \varphi$ ), zavira pa drsna torna sila  $F_t = k_t mg \cos \varphi$ . Torej telo drsi navzdol po klancu s pospeškom:

$$a = g(\sin \varphi - k_t \cos \varphi) \quad \boxed{\text{pospešek drsenja po klancu}} \quad (2.22)$$

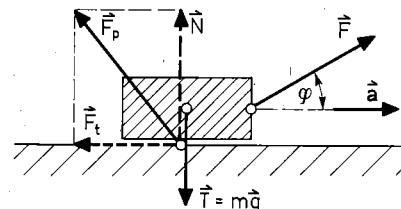
Na poledenelem naletu skakalnice, na bob stezi, san-kališču in drugih gladkih strminah lahko vpliv trenja na drsenje teles zanemarimo ( $k_t \approx 0$ ). Telo drsi navzdol s pospeškom:

$$\boxed{a = g \sin \varphi} \quad \boxed{\text{pospešek drsenja po klancu brez trenja}} \quad (2.22a)$$

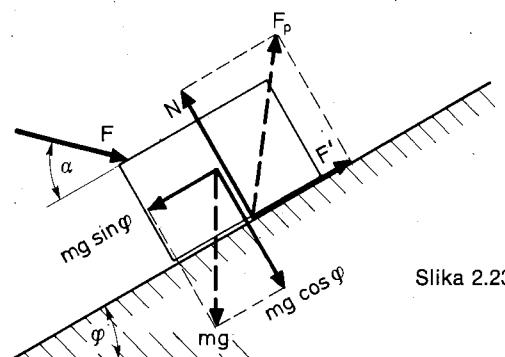
Ki je tem večji, čim strmejši je klanec. Ob navpičnem zidu ( $\varphi = 90^\circ$ ) telo prosto pada:  $a = g$ , na kar ne vpliva



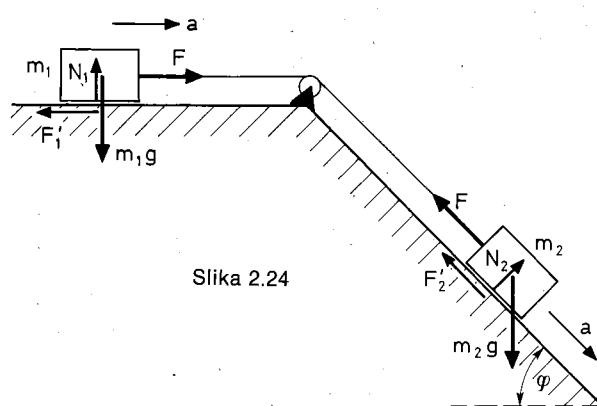
Slika 2.21



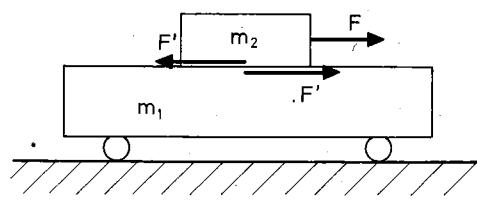
Slika 2.22



Slika 2.23



Slika 2.24



Slika 2.25

niti trenje, saj telo ne pritiska na podlago (statična komponenta teže je tu nič).

**4. Drsenje povezanih teles.** Telo z maso  $m_1 = 5 \text{ kg}$  in telo z  $m_2 = 10 \text{ kg}$  sta povezani z vrvjo, ki vodi prek vrtljivega škripca na vrhu klanca (slika 2.24). Najmanj kolikšen ( $\varphi_s$ ) mora biti naklon klanca, da telesi drsita? Statični torni koeficient med podlago in telesoma je  $k_s = 0,5$ , drsni pa  $k_t = 0,4$ . S kolikšnim pospeškom drsita telesi, če je naklon klanca  $\varphi = 50^\circ$ . Kolikšna je tedaj sila v vrv?

Na telo  $m_2$  deluje v smeri po klancu navzdol dinamična komponenta teže  $m_2 g \sin \varphi$ , zaradi katere bi drslo navzdol. Ker je privezano na vrv, se ta raztegne in v njej se pojavi sila  $F$ , ki zadržuje telo. V celoti torej deluje na telo  $m_2$  sila  $m_2 g \sin \varphi - F$  v smeri po klancu navzdol. Tej sili nasprotuje komponenta sile podlage v smeri po strmini navzgor, ki preprečuje zdrs telesa in lahko naraste le do statične torni sile  $k_s m_2 g \cos \varphi$ . Recimo, da telo zdrs pri  $\varphi = \varphi_s$ . Ta kót torej zadošča enačbi:

$$m_2 g \sin \varphi_s - F = k_s m_2 g \cos \varphi_s \text{ ali} \\ F = m_2 g (\sin \varphi_s - k_s \cos \varphi_s)$$

Sila  $F$  se prek vrv prenese na telo  $m_1$ , ki ga vleče v desno. Škripec je vrtljiv in lahek (njegovo maso zanemarimo), zato zlahka sledi potegu vrv in je sila v vrv na obeh straneh škripca enaka. Telo  $m_1$  na ravni podlagi zdrsne, če je vlečna sila vrv ( $F$ ) enaka statični torni sili  $k_s m_1 g$ . Izenačimo oba izraza za silo  $F$  in dobimo enačbo za kót  $\varphi_s$ , pri katerem telesi zdrsneta:

$$m_2 g (\sin \varphi_s - k_s \cos \varphi_s) = k_s m_1 g \text{ ali} \\ \sin \varphi_s - k_s \cos \varphi_s = k_s m_1 / m_2$$

Dobljeno trigonometrično enačbo za neznanko  $\varphi_s$  prevedemo v kvadratno enačbo za  $\cos \varphi_s$  (vstavimo  $\sin^2 \varphi_s = 1 - \cos^2 \varphi_s$ ). V našem primeru dobimo  $\cos \varphi_s = 0,77$  ter  $\varphi_s = 40^\circ$ .

Pri naklonu  $\varphi > \varphi_s$  drsita telesi ( $m_1$  vodoravno v desno,  $m_2$  pa poševno navzdol po klancu) z enakim pospeškom  $a$  (ker je vrv med njima napeta). Newtonov zakon dinamike za vsako telo posebej dá enačbi:

$$m_2 g \sin \varphi - k_t m_2 g \cos \varphi - F = m_2 a \\ F - k_t m_1 g = m_1 a$$

iz katerih izračunamo neznani količini  $a$  in  $F$ :

$$a = g(m_2 \sin \varphi - k_t m_2 \cos \varphi - k_t m_1) / (m_1 + m_2) = \\ = 2,1 \text{ m/s}^2. \\ F = m_1 m_2 g (\sin \varphi - k_t \cos \varphi + k_t) / (m_1 + m_2) = 30 \text{ N}$$

**5. Voz z maso  $m_1$  je na vodoravnih tleh, po katerih se lahko giblje brez trenja. Na vozu je tovor z maso  $m_2$ . Tovor vlečemo v vodoravni smeri s stalno silo  $F$ . S kolikšnima pospeškoma se gibljeta voz ( $a_1$ ) in tovor ( $a_2$ )? (Slika 2.25)**

Najprej vzemimo, da je vlečna sila  $F$  premajhna, da bi tovor zdrsnil po vozu. Tovor in voz se torej gibljeta kot eno telo – z enakim pospeškom  $a$  ( $a_1 = a_2 = a$ ), ki ga določa vlečna sila:  $F = (m_1 + m_2)a$  ali  $a = F/(m_1 + m_2)$ .

Zaradi vlečne sile  $F$  skuša tovor zdrsniti po vozu, zato se med vozom in tovorom pojavi vodoravna komponenta sile podlage  $F'$ . Voz zadržuje tovor s silo  $F'$ ,

obenem pa tudi tovor deluje na voz z nasprotno enako silo, to je s silo  $F'$  v desno. Na tovor torej deluje rezultanta  $F' = m_2 a$ , voz pa čuti silo  $F'$ , ki ga vleče v smeri vlečne sile:

$$F' = m_2 a = F m_2 / (m_1 + m_2)$$

Če se vlečna sila  $F$  povečuje, se povečuje tudi komponenta  $F'$  sile podlage med tovorom in vozom. Ko ta doseže zgornjo mejo  $F_s = k_s m_2 g$ , tovor po vozlu zdrsnite. To se zgodi pri vlečni sili:

$$F = k_s (m_1 + m_2) g$$

oziroma pri pospešku:  $a = k_s g$ . Sledi, da se tovor in voz lahko gibljeta skupno (ne da bi tovor zdrsnil po vozlu) največ s pospeškom  $k_s g$ .

Če je vlečna sila večja od  $k_s (m_1 + m_2) g$ , tovor drsi po vozlu, tako da se gibljeta z različnimi pospeškoma, komponenta sile podlage ( $F'$ ) med njima pa je enaka drsni torni sili  $F_t = k_t m_2 g$ . Tedaj velja:

$$F - k_t m_2 g = m_2 a_2 \text{ ali } a_2 = F/m_2 - k_t g \text{ in} \\ k_t m_2 g = m_1 a_1 \text{ ali } a_1 = k_t g m_2 / m_1$$

Vlečna sila  $F$  učinkuje na voz le posredno prek trenja. Če med tovrom in vozom ne bi bilo trenja ( $k_s = 0$ ), bi se voz ne premaknil:  $a_1 = 0$  in  $a_2 = F/m_2$ . Torej v tem primeru omogoča pospešek voza ravno trenje, ki večinoma zavira gibanje.

**6. Ploščica z maso  $m$  je prislonjena ob veliko navpično ploščo.** Najmanj s kolikšnim pospeškom ( $a$ ) se mora gibati plošča s ploščico v vodoravni smeri (translatorno), da ploščica ne zdrs po plošči navzdol? (Slika 2.26)

Ploščica se giblje v vodoravni smeri s pospeškom  $a$ , torej deluje nanjo v tej smeri sila  $ma$ . To silo povzroča plošča, ki odriva ploščico pred seboj s pravokotno silo podlage  $N = ma$ . Komponenta  $F'$  sile podlage med ploščico in ploščo je usmerjena navzgor in vzdržuje ravnnovesje s težo ploščice. Dokler ploščica ne zdrs, je  $F' = mg$ . Če je ploščica pretežka, tako da  $F'$  doseže zgornjo mejo  $F_s = k_s N = k_s ma$ , ploščica zdrsnite navzdol. To se torej zgodi za  $mg = F_s = k_s ma$  ali za  $a = g/k_s$ .

## Sila prožnosti

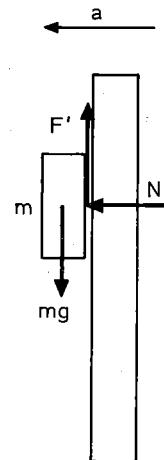
Zgodi se, da je gibajoče se telo vezano na prožno vzmet ali elastično vrv ali na kakšno drugo prožno telo. Med gibanjem telesa se priključena vzmet deformira – razteza ali krči, pri čemer se v njej pojavi **sila prožnosti**. Nastala sila nasprotuje deformaciji in učinkuje na telo, ki to deformacijo povzroča. Poleg drugih sil, učinkujujočih na telo, moramo v teh primerih upoštevati tudi silo prožnosti.

Recimo, da je telo privezano na en konec prožne vzmeti, katere drugi konec je pritrjen na zid (slika 2.27a). Če se telo premakne v desno za  $x$ , razteguje vzmet s silo  $F$  (desna črtkana sila  $F$  na sliki 2.27b). Raztegnjena vzmet nasprotuje pomiku telesa z nasprotno enako silo  $F$  (desna polna sila  $F$  na sliki 2.27b), obenem pa vleče levi konec vzmeti s silo  $F$  v levo

(leva črtkana sila  $F$  na sliki 2.27b). Telo torej čuti silo prožnosti  $F$ , ki ga vleče v levo (nasprotno smeri premika), na raztegnjeno vzmet pa deluje dvoje nasprotno enakih sil  $F$  (črtkani sili  $F$  na sliki 2.27b), ki vzmet raztegjeta. V mejah prožnega raztezanja (če velja Hookov zakon, gl. str. 137) je sila  $F$  premo sorazmerna z raztezkom  $x$ :

$$F = kx \quad (2.23)$$

V zgornji enačbi je  $F$  ena od sil dvojice, ki raztegjeta vzmet. Sorazmernostna konstanta  $k$  je **konstanta prožnosti vzmeti** (merska enota N/m). Čim močnejša je vzmet, tem večja je njena konstanta prožnosti, tem večja sila je potrebna, da raztegnemo vzmet za dan raztezek. Šibka vzmet ima majhen  $k$ ; že majhna sila povzroči velik raztezek; takšna vzmet se mora zelo raztegniti (veliki  $x$ ), da nastane velika sila prožnosti.



Slika 2.26

### Primeri:

1. Telesi  $m_1 = 4 \text{ kg}$  in  $m_2 = 10 \text{ kg}$  sta povezani s prožno vzmetjo ( $k = 1,5 \text{ kN/m}$ ) in ležita na gladkih, vodoravnih tleh. Teže telo  $m_2$  vlečemo s silo  $F = 200 \text{ N}$  v vodoravni smeri. S kolikšnim pospeškom se giblja telesi? Za koliko se pri tem raztegne vzmet med njima? Trenje zanemarimo (slika 2.28).

Vlečna sila  $F$  potegne telo  $m_2$  v desno. Ker je telo privezano na vzmet, se vzmet raztegne. Raztegnjena vzmet potegne telo  $m_1$  v desno, v smer vlečne sile. Ko se raztezek vzmeti ustali (npr. na  $x$ ), se telesi giblja z enakim pospeškom  $a = F/(m_1 + m_2) = 14,3 \text{ m/s}^2$ . Na telo  $m_2$  deluje sila  $F - kx$ , na telo  $m_1$  pa sila  $kx = m_1 a$ . Sledi:  $x = m_1 a / k = m_1 F / k(m_1 + m_2) = 3,8 \text{ cm}$ .

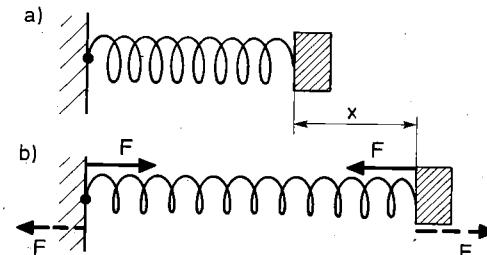
2. **Telo na elastični vrvi.** Telo z maso  $m$  je privezano na elastično vrv, katere dolžina je  $l$ , konstanta prožnosti pa  $k$ . Drugi konec vrv je pritrjen na strop.

Telo na vrv počasi spuščamo in nato spustimo, da visi na napeti vrv (slika 2.29). Vrv se pri tem raztegne in na telo deluje poleg teže  $mg$  še sila prožnosti raztegnjene vrv. Ko se telo umiri, je vrv raztegnjena za toliko ( $x_1$ ), da je teža telesa enaka prožni sili raztegnjene vrv:  $mg = kx_1$  ali

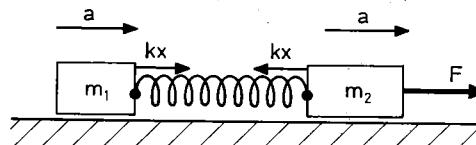
$$x_1 = mg/k \quad (2.24)$$

V naslednjem poskusu pa telo (privezano na vrv) spustimo z višine stropa (slika 2.30a). Na kateri globini se telo ustavi? Upor zraka in maso vrv zanemarimo.

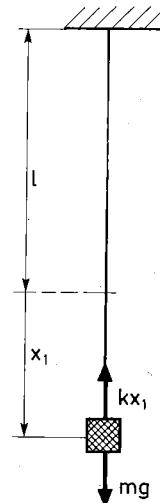
V začetku padanja vrv še ni napeta, zato ne učinkuje na padajoče telo. Telo prosto pada s pospeškom  $g$  in njegova hitrost enakomerno narašča. V trenutku ko doseže globino  $l$  pod stropom in ima hitrost  $v_0 = \sqrt{2gl}$  (slika 2.30b), se vrv pričenja napenjati. Recimo, da koordinato  $x$  merimo od tega mesta navzdol. Za  $x > 0$  je vrv napeta in na telo deluje poleg teže  $mg$  navzdol še sila prožnosti ( $kx$ ) raztegnjene vrv, ki je usmerjena navzgor in premo sorazmerna z raztezkom  $x$  vrv. Do globine  $l + x_1$  je teža še večja od sile prožnosti in telo še pospešeno pada. Za  $x = x_1$  je  $mg = kx_1$  in pospešek je nič; v tej globini doseže telo največjo hitrost. Za  $x > x_1$  je padanje pojemajoče, hitrost se zmanjšuje, dokler se telo pri  $x = x_2$  ne ustavi ( $v = 0$ ).



Slika 2.27



Slika 2.28



Slika 2.29

V poljubni globini  $l + x$  pod stropom ima telo hitrost  $v = dx/dt$  in pospešek  $a = dv/dt$ . Zadnjega izrazimo iz Newtonovega zakona dinamike:

$$mg - kx = ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx}$$

ali

$$vdv = (g - kx/m)dx$$

Dobljeno enačbo integriramo: na desni strani od 0 (to je od mesta, kjer se vrv začne napenjati) do  $x_2$  (kjer se ustavi), na levi pa od  $v_0$  (hitrost telesa pri  $x = 0$ ) do 0. Dobimo:

$$\int_{v_0}^0 v dv = \int_0^{x_2} (g - kx/m) dx$$

$$-v_0^2/2 = gx_2 - (k/2m)x_2^2 \text{ ali}$$

$$x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1l = 0$$

pri čemer smo uporabili izraza  $v_0^2 = 2gl$  ter  $x_1 = mg/k$ . Kvadratna enačba za  $x_2$  ima dve rešitvi:

$$x_2' = x_1 + \sqrt{x_1^2 + 2x_1l} \quad \text{ter} \quad (2.25)$$

$$x_2'' = x_1 - \sqrt{x_1^2 + 2x_1l}$$

Prva rešitev ( $x_2'$ ) dá iskano globino  $x_2$ , na kateri se telo prvič ustavi. Nato se telo začne dvigati (sila raztegnjene vrvi je na tej globini močnejša od teže telesa): do  $x = x_1$  se dviga pospešeno, naprej navzgor pa pojemajoče, dokler se pri  $x = x_2''$  ne ustavi, nakar zoper začne padati itd. Telo na elastični vrvi niha med globinama  $x_2'$  in  $x_2''$ . Nihanje se slej ko prej zaduši in telo obmiruje na sredini med  $x_2''$  in  $x_2'$ , to je za  $x = x_1 = mg/k$  (gl. sliko 2.29).

**3. Vzmetno nihalo.** Telo z maso  $m$  je pritrjeno na prožno vzmet s konstanto  $k$ . Na vodoravni podlagi (slika 2.31) deluje na telo v smeri gibanja edinole sila prožnosti vzmeti, trenje med telesom in podlogo zanemarimo, teža telesa in pravokotna sila podlage pa se medsebojno uničujeta in ne vplivata na gibanje telesa vzdolž podlage. V ravnovesni legi (v kateri telo prepuščeno samemu sebi, obmiruje) vzmet ni ne raztegnjena ne skrčena. Če telo izmaknemo iz te lege za  $x_0$  in nato spustimo, začne nihati z amplitudo  $x_0$ . Pri odmiku  $x$  iz ravnovesne legi deluje nanj sila prožnosti vzmeti  $-kx$ , ki ga vleče nazaj v ravnovesno lego (predznak minus zato, ker odmiku v desno,  $x > 0$ , ustreza pospešek v levo,  $a < 0$ ; in obratno). Izmaknjeno telo dobi pospešek  $a = -kx/m = -(k/m)x$ , ki je premo sorazmeren z odmikom  $x$ , kar je značilno za harmonično nihanje (gl. str. 15). Za takšno nihanje velja (gl. 1.26):  $a = -\omega^2 x$ , kjer je  $\omega = 2\pi/t_0$  krožna frekvence nihala ( $t_0$  je nihajni čas). Za naše vzmetno nihalo torej dobimo:

$$\omega^2 = k/m \text{ ali}$$

$$t_0 = 2\pi\sqrt{m/k} \quad (2.26)$$

Nihajni čas vzmetnega nihala je večji, če je masa telesa večja in če je konstanta prožnosti manjša. Težko telo na šibki vzmeti niha z dolgim nihajnim časom, lahko telo na močni vzmeti pa s kratkim (z veliko frekvenco).

Če je telo pritrjano hkrati na več vzmeti, tako da se vsaka vzmet med premikom telesa za enako raztegne ali skrči (t. i. vzporedna vezava vzmeti), se konstante prožnosti posameznih vzmeti seštejejo (slika 2.32).

Telo niha tako, kot da bi bilo prvezano na vzmet s konstanto  $k = k_1 + k_2 + \dots$ . Drugače je, če so vzmeti povezane zaporedno (slika 2.33). Ko se telo premakne v desno za  $x$ , se spojišče vzmeti premakne za  $x_1$ . Toliko se raztegne leva vzmet, desna pa se raztegne za  $x - x_1$ . Leva vzmet, deluje na spojišče s silo  $k_1x_1$  v levo, desna pa s silo  $k_2(x - x_1)$  v desno. Ti sili sta enaki  $k_1x_1 = k_2(x - x_1)$  ali  $x_1 = xk_1k_2/(k_1 + k_2)$ . Na telo deluje le desna vzmet, s silo  $-k_2(x - x_1) = -xk_1k_2/(k_1 + k_2) = -kx$ , kjer je  $k$  konstanta prožnosti nadomestne vzmeti. Sledi:

$$k = k_1k_2/(k_1 + k_2) \quad \text{ali} \quad 1/k = 1/k_1 + 1/k_2 \quad (2.27)$$

Pri zaporedni vezavi vzmeti se obratne vrednosti konstant posameznih vzmeti seštevajo v obratno vrednost nadomestne konstante. Če je ena vzmet toga (npr.  $k_1 = \infty$ ), učinkuje le druga vzmet:  $k = k_2$ . Najbolj raztegljiva vzmet največ prispeva k celokupni konstanti  $k$ .

**Računski primer:** Telo je prvezano na vzmet s konstanto  $k_1 = 2\text{N/cm}$  in niha z nihajnim časom  $t_1 = 1,5 \text{ s}$ . Kolikšno vzmet ( $k_2$ ) moramo dodati zaporedno k prvi vzmeti, da se nihajni čas poveča na  $t_2 = 2,0 \text{ s}$ ?

$$t_1 = 2\pi\sqrt{m/k_1}, t_2 = 2\pi\sqrt{m/k}$$

Enačbi delimo, da se nepoznana masa krajša:

$$k/k_1 = (t_1/t_2)^2 = k_2/(k_1 + k_2) \text{ ali}$$

$$k_2 = k_1/(t_2^2/t_1^2 - 1) = 2,6 \text{ N/cm}$$

## Sila pri kroženju

Telo z maso  $m$  se giblje s stalno obodno hitrostjo  $v$  po krogu s polmerom  $r$ , to je giblje se z radialnim pospeškom  $a_r = v^2/r = r\omega^2$ , ki je usmerjen k središču kroženja (gl. 1.47). Ta pospešek določa t. i. **centripetalna sila** ( $F_{cp}$ ), ki učinkuje na telo v smeri k središču kroženja. Izračunamo jo z Newtonovim zakonom dinamike:

$$F_{cp} = ma_r = -m\omega^2 r \quad (2.28)$$

kjer je krajevni vektor  $r$  usmerjen iz središča kroženja. Če na krožec telo deluje hkrati več sil, je njihova rezultanta usmerjena k središču kroženja in enaka  $ma_r = mv^2/r = mr\omega^2$  (to je centripetalna sila). Centripetalna sila je npr. sila v vrvici, na kateri je prvezano telo, ki ga vrtimo v vodoravnem krogu; radialna komponenta sile podlage med vožnjo skozi ovinek itd. Na splošno mora okolica delovati na telo s centripetalno silo, če naj telo kroži. Toda obenem tudi telo deluje na okolico, ki ga sili v kroženje, z nasprotno enako silo (gl. str. 31). Ta sila se imenuje **centrifugalna sila** ( $F_{cf}$ ).

**Centrifugalna sila je sila, s katero krožec telo učinkuje na okolico v smeri radija iz središča kroženja navzven.** Po velikosti je enaka centripetalni sili, le smer je nasprotna:

$$F_{cf} = -F_{cp} = m\omega^2 r \quad (\text{Slika 2.34}) \quad (2.29)$$

Centripetalna in centrifugalna sila sta sicer enako veliki, vendar učinkujeta na različni telesi, zato sta njuna učinka različna. Centripetalna sila deluje na krožec telo in ga sili v kroženje, centrifugalna sila pa je

reakcijska sila, s katero krožče telo učinkuje na okolico v smeri iz središča kroženja.

Recimo, da privežemo kamen na vrvico, katere prosti konč držimo v roki. Kamen zalučamo s hitrostjo  $v$  v smeri pravokotno na vrvico, vrvica se nekoliko raztegne in v njej se pojavi sila, ki vleče kamen proti roki, tako da kamen zakroži v lok. Z raztegnitvijo nastane v vrvici tolikšna sila, kolikršna je potrebna za radialni pospešek pri dani obodni hitrosti in danem polmeru kroženja. Če zahtevana centripetalna sila  $mv^2/r$  prekorači mejo trdnosti vrvice, se vrvica pretrga in kamen odleti v smeri tangente s hitrostjo, ki jo ima v tistem trenutku. Na kamen neposredno učinkuje sila vrvice. Izvor te sile pa je v roki, ki mora vrvico trdno držati. Krožiči kamen prek vrvice učinkuje na roko s centrifugalno silo, ki vleče roko ven iz središča kroženja.

Kakšna centripetalna sila deluje na potnika v avtu, ko avto zapelje v ovinek? Ko ogrodje avtomobila skupaj s sedeži zapelje v ovinek, se potnik zaradi vztrajnosti še hoče gibati v prvotni smeri, zato hoče zdrsniti po sedežu. Med potnikom in sedežem se pojavi vodoravna komponenta sile podlage, ki sili potnika v kroženje. Če ta sila ne zadošča za zahtevani radialni pospešek (npr. če je sedež gladek), potnik zdrsne na sedež v smeri prvotne hitrosti in se približa steni avtomobila (ki je medtem zavozil v ovinek) in udari o njeno. Od tedaj naprej določa radialni pospešek normalna sila ( $N$ ) v steni avtomobila.

### Primeri:

1. Kroglico z maso  $m = 200 \text{ g}$  pritrjimo na vrvico ( $r = 40 \text{ cm}$ ) in jo vrtimo v vodoravni ravnini. Največ s kolikšno frekvenco jo smemo vrtneti, da se vrvica ne pretrga? Ta se pretrga, če je sila v njej večja od  $F_1 = 500 \text{ N}$ . Težo kroglice zanemarimo.

Vrvica je napeta s centripetalno silo:

$$F_{cp} = mr\omega^2 = mr \cdot 4\pi^2\nu^2 < F_1 \\ \nu < \sqrt{F_1/4\pi^2mr} = 12,6/\text{s} = 755/\text{min}$$

Kroglica se sme vrtneti največ s 755 vrtljaji na minuto.

2. Telo je prvezano na vrvico, ki jo vrtimo v navpični ravni. Kako se sila v vrvici spreminja med kroženjem (slika 2.35)?

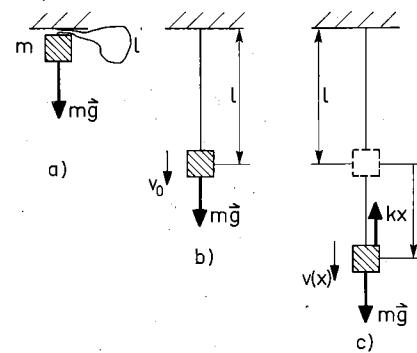
Na telo delujeta teža  $mg$  in sila v vrvici  $F_v$ . Ker je zadnja pravokotna na obodno hitrost  $v$ , ne vpliva nanjo (gl. str. 8). To hitrost spreminja le težo  $mg$ , zato se spreminja z višino podobno kot pri poševnem metu (gl. 1.42):

$$v^2 = v_0^2 - 2gh = v_0^2 - 2gr\sin\varphi$$

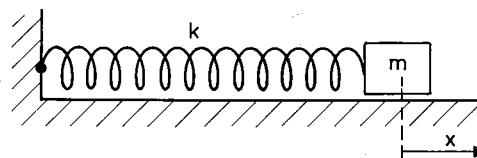
Tu je  $v_0$  hitrost telesa na višini središča kroga,  $h$  pa višina telesa nad središčem:  $h = rsin\varphi$ . Najmanjšo hitrost ima telo v zgornjem delu kroga ( $\varphi = 90^\circ$ ):  $v_{min}^2 = v_0^2 - 2gr$ , največjo pa v spodnjem ( $\varphi = -90^\circ$ ):  $v_{max}^2 = v_0^2 + 2gr$ .

Pri tem kroženju je centripetalna sila sestavljena iz sile v vrvici ( $F_v$ ) in projekcije teže na smer vrvice:

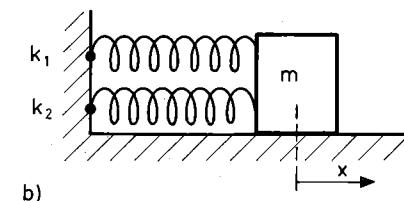
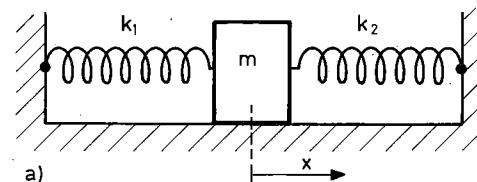
$$F_{cp} = F_v + mg\sin\varphi = mv^2/r = (m/r)(v_0^2 - 2gr\sin\varphi) \\ F_v = mv^2/r - 3mg\sin\varphi$$



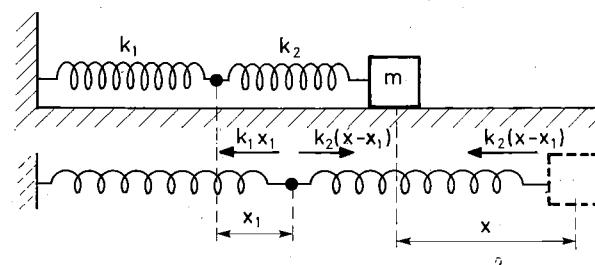
Slika 2.30



Slika 2.31



Slika 2.32



Slika 2.33

Vrv je najmanj napeta v zgornji točki kroga:  $F_{min} = mv^2/r - 3mg$ , najmočneje pa v spodnji točki:  $F_{max} = mv^2/r + 3mg = F_{min} + 6mg$ . Če se telo vrte počasi (majhen  $v_0$ ), vrv v zgornjem delu kroga ni napeta:  $F_{min} = 0$ . Pri  $v_0 > \sqrt{3gr}$  pa je vrv napeta tudi v zgornji točki kroga.

Kot telo vzemimo vedro z vodo. Če ga vrtimo dovolj hitro, voda v zgornjem delu kroga ne izteče iz vreda (čeprav vedro stoji »na glavi«); to se zgodi pri  $v_0 > \sqrt{3gr}$ .

Primer te vrste je tudi pilot v letalu, ki dela »looping« v navpični ravnini. Telo je pilot; nanj poleg njegove teže učinkuje še sila, s katero sedež z vsemi vezmi pritiska nanj in ga sili v kroženje.

**3. Konično nihalo.** Telo je obešeno na vrvici (dolžina  $b$ ), ki kroži okrog navpične osi s kotno hitrostjo  $\omega$ ; prosti konec vrvice je pritrjen na osi (slika 2.36). Opazimo, da se vrvica odmakne od osi za kót  $\varphi$ , ki je tem večji, čim hitreje jo vrtimo (čim večji je  $\omega$ ).

Telo kroži v vodoravni ravnini po krogu s polmerom  $r = b \sin \varphi$ . Ker se giblje z radialnim pospeškom  $a_r = r\omega^2$ , mora nanj delovati centripetalna sila  $mr\omega^2$ . Ta je rezultanta teže  $mg$  in sile  $F_v$  v vrvici. Vrvica se odkloni za tak kót  $\varphi$  in v njej se pojavi tolikšna sila  $F_v$ , da je rezultanta med njo in težo enaka zahtevani centripetalni sili. Sledi:

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= mr\omega^2/mg = b \sin \varphi \omega^2/g \text{ ali} \\ \cos \varphi &= g/b\omega^2 \end{aligned}$$

Večji kotni hitrosti vrtenja vrvice zares ustrezata večji naklonski kót  $\varphi$  vrvice.

Sila  $F_v$  v nagnjeni vrvici s svojo navpično komponento ( $F_v \cos \varphi$ ) vzdržuje ravnovesje s težo obešenega telesa ( $F_v \cos \varphi = mg$ ), njena vodoravna komponenta ( $F_v \sin \varphi$ ) pa omogoča kroženje (je enaka centripetalni sili).

Podobno kot zgoraj vrvica, se sedeži vrtljaka med vrtenjem nagnjeva navzven, in sicer tem bolj (večji kót  $\varphi$ ), čim hitreje se vrtljak vrte.

**4. S kolikšno silo (N) pritiska avto (masa  $m = 1000 \text{ kg}$ ) na tla, če vozi s hitrostjo  $v = 72 \text{ km/h}$  po: a) vodoravnih tleh ( $N_1$ ), b) polkrožni grbini s polmerom  $R = 50 \text{ m}$  ( $N_2$ ) in c) polkrožni jami s polmerom  $R = 50 \text{ m}$  ( $N_3$ )? (Slika 2.37)**

Zanimajo nas sile, ki delujejo na avto v navpični smeri: teža  $mg$  navzdol, sila podlage ( $N$ ) navzgor. Pri vožnji po vodoravni podlagi (a) v navpični smeri ni pospeška, zato je  $mg - N_1 = 0$  in  $N_1 = mg = 1000 \text{ kg} \cdot 10 \text{ ms}^{-2} = 10 \text{ kN}$ . Med vožnjo prek grbine (b) se avto giblje z radialnim pospeškom  $v^2/R$  (usmerjen navzdol), ki ga določa rezultanta med težo in silo podlage:  $mg - N_2 = mv^2/R$  ali  $N_2 = mg - mv^2/R = 10 \text{ kN} - 8 \text{ kN} = 2 \text{ kN}$ . Pritisk avta na podago je na grbini kar petkrat manjši kot na ravni cesti (ob morebitnem zaviranju je tudi zavorna sila petkrat manjša). Drugače je v jami (primer c): radialni pospešek  $v^2/R$  je tu usmerjen navzgor, zato je sila podlage večja od teže:  $N_3 - mg = mv^2/R$  in  $N_3 = mg + mv^2/R = 18 \text{ kN}$ .

**5. Rotor.** Nekatera zabavišča imajo veliko pokončno valjasto cev s polmerom  $R = 2 \text{ m}$ , ki se vrte okrog geometrijske osi. Človek vstopi vanjo in se s hrbotom prisloni ob steno, nakar se cev začne vrteti. Ko je

frekvenca dovolj velika, se dno rotorja spusti in človek ostane »prilepljen« ob steno. Najmanj kolikšna mora biti frekvenca ( $v_0$ ) rotorja, da človek ob steni ne zdrsne navzdol, četudi ne stoji na tleh? (Slika 2.38)

Ko se tla odmaknejo, delujejo na človeka tele sile: teža  $mg$  navzdol, pravokotna komponenta sile stene ( $N$ ) v smeri k središču vrtenja in komponenta  $F'$  navzgor. Največja možna vrednost te komponente je statična torna sila  $F_s = k_s N$ , kjer je  $k_s$  statični torni koeficient med hrbotom in steno (običajno okrog 0,4). Človek ne zdrsne, če je njegova teža manjša od statične torne sile:

$$mg < F_s = k_s N$$

Pravokotna komponenta  $N$  je tu centripetalna sila, ki človeku vsiljuje radialni pospešek kroženja:  $N = ma_r = mR \cdot 4\pi^2 v^2$ . Torej mora veljati pogoj:  $mg < 4\pi^2 v^2 k_s m R$  ali  $v^2 > g/(4\pi^2 k_s R)$  oziroma:

$$v_0 = \sqrt{g/(4\pi^2 k_s R)} = 0,56/\text{s} = 33/\text{min}$$

Človek se v tem mejnem primeru giblje z obodno hitrostjo  $v_0 = R\omega_0 = 2\pi v_0 R = \sqrt{gR/k_s} = 7 \text{ m/s} = 25 \text{ km/h}$ .

**6. Gibanje v ovinku.** Gibanje avta skozi ovinek je kroženje; omogoča ga torna sila med gumami koles in cestiščem. Če je kotaleče se kolo usmerjeno v smer vožnje, deluje v tej smeri tudi vodoravna komponenta sile podlage  $F'$  (gl. str. 78). Največja vrednost te komponente (to je statična torna sila  $F_s = k_s N$ ) določa največji pospešek, s katerim lahko kotaleče se kolo pospešuje naprej. V ovinku voznišek nekoliko zasuka volan v notranjo stran ovinka, tako da kolesa oklepajo majhen kót s prvotno smerjo gibanja. Zaradi zasuka kolesa se vodoravna komponenta sile podlage ( $F'$ ) zasuka na notranjo stran ovinka (ker skuša kolo zdrsniti navzven), tako da ima poleg tangentne komponente  $F_p$  (ki omogoča pospeševanje) še radialno projekcijo  $F_r$ , ki je zahtevana centripetalna sila za vožnjo skozi ovinek:

$$F_r = mv^2/R \quad (\text{Slika 2.39})$$

Če se poveča hitrost vožnje ( $v$ ), se poveča tudi  $F_r$ , a le do največje vrednosti  $k_r N$ , kjer je  $N$  sila, s katero kolo pravokotno na podago,  $k_r$  pa statični torni koeficient v radialni smeri (odvisen je od profila gum; je največji, če je kolo zasukano za kot 10–20° glede na prvotno smer; običajno je večji od 0,5, na suhem cestišču celo večji od 1,0).

Največja hitrost  $v_{max}$ , s katero lahko avto vozi skozi vodoravni ovinek s polmerom  $R$  (ne da bi zdrsnil navzven), je torej določena z enačbo:

$$\begin{aligned} mv^2_{max}/R &= k_r N = k_r mg \text{ ali} \\ v_{max} &= \sqrt{k_r g R} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Za  $k_r = 0,6$  in  $R = 50 \text{ m}$  dobimo  $v_{max} = 17 \text{ m/s} = 62 \text{ km/h}$ .

Tangentna projekcija  $F'_p$  vodoravne komponente sile podlage ima zgornjo mejo  $k_p N$ , kjer je  $k_p$  statični torni koeficient med gumami in cestiščem v tangentni smeri. Ker je  $F'^2 = F_p^2 + F_r^2$  (gl. slika 2.39), velja:

$$k_p^2 + k_r^2 = k_s^2$$

pri čemer je  $k_s$  celoten statični torni koeficient med gumami in cestiščem. Kolikšen del trenja odpade na radialno smer (to je za ovinek) in kolikšen na tangentno smer (to je za pospeševanje), je odvisno od profila gum in od zasuka volana.

Varna vožnja (brez podrsavanja!) skozi vodoravni ovinek je odvisna od statičnega tornega koeficiente ( $k_r$ ); ta pa se lahko spremeni (npr. če se cestišče navlaži ali zamasti ali če se gume izrabijo). Ta odvisnost se precej omili, če je cestišče na zunanjih strani ovinka dvignjeno, tako da tudi pravokotna komponenta sile podlage ( $N$ ) nekoliko prispeva k centripetalni sili.

Na nagnjenem cestišču lahko avto zdrsne ali navzdol (navznoter, če vozi prepričasi) ali navzgor (navzven, če vozi prehitro). Na sliki (2.40) je označena sila  $F_r$ , za primer, da skuša avto zdrsniti navzven. Projekcije sil se v navpični smeri seštejejo v nič, v vodoravni smeri pa v centripetalno silo  $mv^2/R$ :

$$\begin{aligned} N \cos \varphi - F_r \sin \varphi - mg &= 0 & \varphi = \text{nagib cestišča} \\ N \sin \varphi + F_r \cos \varphi &= mv^2/R \end{aligned}$$

Tik preden avto zdrsne, je  $F_r = k_r N$ . Iz zgornjih enačb izločimo  $N$  in izračunamo največjo dovoljeno hitrost  $v_{max}$  (pri kateri avto zdrsne ven iz ovinka):

$$v_{max}^2 = gR(\tan \varphi + k_r)/(1 - k_r \tan \varphi) \quad (2.31a)$$

Če se avto giblje skozi nagnjen ovinek prepričasi, lahko zdrsne navzdol (na notranjo stran ovinka),  $F_r$  ima tedaj smer navzgor. Izraz za  $v_{min}$  dobimo neposredno iz enačbe (2.31a), če koeficientu  $k_r$  spremenimo predznak:

$$v_{min}^2 = gR(\tan \varphi - k_r)/(1 + k_r \tan \varphi) \quad (2.31b)$$

Razlika med  $v_{max}$  in  $v_{min}$  je tem manjša, čim manjši je  $k_r$ . V limiti  $k_r \rightarrow 0$  (idealno gladko cestišče) je  $v_{max} = v_{min} = v_0$ :

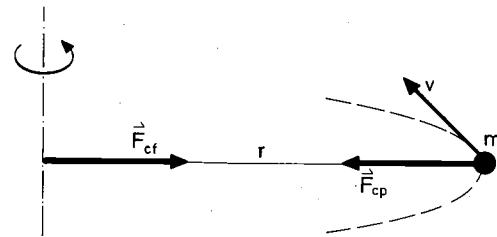
$$v_0 = \sqrt{gR \tan \varphi} \quad (2.32)$$

Skozi nagnjen ovinek se lahko peljemo brez podrsavanja, tudi če je cestišče idealno gladko, le da moramo voziti s točno določeno hitrostjo  $v_0$ .

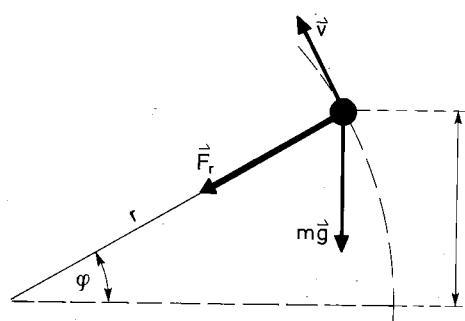
Pri blago nagnjenem cestišču, tako da je  $\tan \varphi < k_r$ , zdrs navzdol ni mogoč, četudi avto vozi zelo počasi ( $v_{min} = 0$ ). Druga skrajnost je močno nagnjeno cestišče s  $\tan \varphi > 1/k_r$ ; avto ne zdrsne navzven, četudi vozi zelo hitro ( $v_{max} = \infty$ ). Poseben primer s  $\varphi = 90^\circ$  vidimo v nekaterih zabaviščih, kjer motorist vozi po notranji steni navpične valjaste cevi-stene; voziti mora najmanj s hitrostjo (gl. 2.31b za  $\varphi = 90^\circ$ )  $v_{min} = gR/k_r$  (gl. podoben primer: človek ob steni rotorja, str. 46).

**7. Sila v vrteči se palici.** Homogena palica (masa  $m$ , dolžina  $b$ ) se vrta v vodoravni ravni s kotno hitrostjo  $\omega$ ; os vrtenja gre skozi konec palice in je pravokotna nanjo (slika 2.41). Kako se sila  $F$  v palici spreminja z oddaljenostjo od osi?

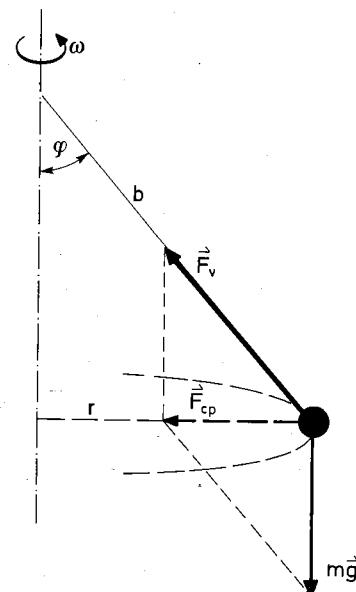
Palico v mislih razrežemo na koščke z debelino  $dr$ . En tak košček z maso  $dm = (m/b)dr$  na oddaljenosti  $r$  od osi se giblje z radialnim pospeškom  $r\omega^2$ . Notranji del palice vleče ta košček s silo  $F(r)$  k osi, zunanjii del palice pa z nekoliko manjšo silo  $F(r+dr)$  proč od osi,



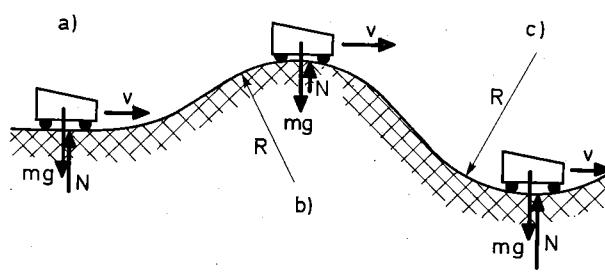
Slika 2.34



Slika 2.35



Slika 2.36



Slika 2.37

tako da nanj deluje rezultanta  $F(r) - F(r + dr) = -dF$ , ki povzroča zahtevani radialni pospešek:

$$-dF = dm r \omega^2 = (m\omega^2/b)rdr$$

Enačbo integriramo, na desni strani od  $b$  do  $r$ , na levi pa od 0 do  $F(r)$  (na zunanjem robu palice ni sile). Dobimo:

$$F(r) = (m\omega^2/2b)(b^2 - r^2) \quad (2.33)$$

Sila v vrteči se palici je največja na osi ( $r = 0$ , enaka je  $m\omega^2 b/2$ ), najmanjša ( $= 0$ ) pa na najbolj oddaljenem delu palice ( $r = b$ ).

**8. Obroč s polmerom  $R = 40$  cm in maso  $m = 20$  kg zavrtimo v vodoravni ravnini okrog njegove geometrijske osi. S kolikšno največjo frekvenco ( $v_o$ ) ga smemo zavrteti, da se ne raztrga? Porušna natezna sila v obroču je  $F_p = 6,5$  kN.**

Na ločni element obroča  $ds = Rd\varphi$ , ki ima maso  $dm = (m/2\pi)d\varphi$ , delujeta z obeh strani notranji sili  $F$ , s katerima ostali del obroča priklepa izbran ločni element. Zaradi ukrivljenosti obroča sta ti sili zasukani druga glede na drugo za kót  $d\varphi$ ; njuna rezultanta (glej podoben primer na sliki 2.19)  $dF \approx F d\varphi$  je zahtevana centripetalna sila, ki daje izbranemu ločnemu elementu radialni pospešek  $R\omega^2$ :

$$\begin{aligned} dF &= F d\varphi = dm a_r = (m/2\pi)d\varphi R \omega^2 \quad \text{ter} \\ F &= 2\pi m R v^2 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Sledi:

$$v_o = \sqrt{F_p / 2\pi m R} = 11,4/\text{s} = 680/\text{min}$$

## Vztrajnostna (sistemska) sila

Newtonov zakon dinamike  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  povezuje silo in pospešek. Če poznamo rezultanto  $\mathbf{F}$  vseh sil, ki učinkujejo na telo, lahko iz te enačbe izračunamo pospešek  $\mathbf{a}$ . Vemo pa, da je pospešek odvisen tudi od koordinatnega sistema, v katerem opazujemo gibanje, če je ta neinercialen, če se giblje neenakomerno (gl. str. 25). V teh koordinatnih sistemih Newtonov zakon v zgornji obliki ne zadošča, z njim ne moremo pravilno določiti pospeška telesa. Pač pa pospešek telesa pravilno izračunamo z Newtonovim zakonom  $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$  v **inercialnem koordinatnem sistemu**, to je v sistemu, ki se giblje enakomerno – premočrno in enako hitro. Ne glede na to, iz katerega inercialnega koordinatnega sistema opazujemo gibanje, dobimo za pospešek enak rezultat:  $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ . **Newtonov zakon dinamike lahko zato uporabimo le za inercialne koordinatne sisteme. Zakonitosti mehanike**, ki izhajajo iz Newtonovega zakona dinamike (npr. kako se telo giblje pod vplivom sil) **veljajo le za inercialne koordinatne sisteme**. V tem pogledu so vsi inercialni koordinatni sistemi enakovredni. Ni mogoče iznajti zakonitosti ali si izmislieti eksperimenta, ki bi razločeval različne inercialne koordinatne sisteme glede na njihovo hitrost. Mehanske zakonitosti gibanja v inercialnem koordinatnem sistemu so neodvisne od hitrosti koordinatnega sistema.

Potnik v letalu, ki leti enakomerno s hitrostjo 1000 km/h, se lahko obnaša enako, kot če bi letalo mirovalo: lahko vstane s sedeža, hodi naprej ali nazaj, nataka

pijačo, vdeva nit itd. Da se letalo pravzaprav zelo hitro giblje, spozna le, če opazuje okolico, ter ob pristanku, ko letalo zavira na pristajalni stezi. To tudi pomeni, da z opazovanjem gibanja znotraj inercialnega koordinatnega sistema ne moremo ugotoviti, kako hitro se koordinatni sistem giblje. Hitrost inercialnega koordinatnega sistema lahko določimo le, če opazujemo gibanje telesa tako iz obravnavanega koordinatnega sistema kot iz kakšnega drugega sistema. Potrebna je primerjava z drugim koordinatnim sistemom.

Drugače je, če je **koordinatni sistem neinercialen**, če se njegova hitrost spreminja s časom, npr. če koordinatni sistem pospešuje ali zavira oziroma se giblje krivočrtno (gl. str. 25). V takšnem koordinatnem sistemu pospešek telesa ni odvisen le od mase in sil, ki učinkujejo na telo (kot to predvideva Newtonov zakon dinamike), temveč tudi od pospeška  $\mathbf{a}_0$  samega koordinatnega sistema.

Recimo, da opazovalec v mirujočem (inercialnem) koordinatnem sistemu izmeri pospešek  $\mathbf{a}$ , ki ga izračuna iz Newtonovega zakona dinamike:  $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ , kjer je  $\mathbf{F}$  rezultanta vseh sil, učinkujučih na telo. Gibanje istega telesa opazuje tudi opazovalec iz gibajočega se neinercialnega koordinatnega sistema. Ta izmeri relativni pospešek  $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0$  (gl. 1.55 na strani 25). Ker je rezultanta  $\mathbf{F}$  delujočih sil neodvisna od koordinatnega sistema, ne more zapisati:  $\mathbf{a}' = \mathbf{F}/m$ , torej ne more neposredno uporabiti Newtonovega zakona dinamike. Pač pa lahko zapiše takole:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0 = \mathbf{F}/m - \mathbf{a}_0 = (\mathbf{F} - m\mathbf{a}_0)/m = \mathbf{F}'/m$$

kar pomeni, da lahko uporabi Newtonov zakon dinamike (da je pospešek kvocient sile in mase), če od dejanskih sil  $\mathbf{F}$  odšteje  $m\mathbf{a}_0$ .

Izraz  $-m\mathbf{a}_0$  se imenuje **vztrajnostna ali sistemska sila** ( $\mathbf{F}_s$ ):

$$\boxed{\mathbf{F}_s = -m\mathbf{a}_0} \quad (2.35)$$

tako da je

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_s \quad \text{in} \quad \mathbf{a}' = \mathbf{F}'/m \quad (2.36)$$

**Opazovalec v neinercialnem koordinatnem sistemu lahko uporabi Newtonov zakon dinamike, če rezultanti dejanskih (realnih) sil  $\mathbf{F}$  prišteje sistemsko silo  $\mathbf{F}_s$ , kot da bi tudi ta delovala na telo. Sistemska ali vztrajnostna sila je produkt mase telesa in pospeška koordinatnega sistema in ima nasprotno smer:  $\mathbf{F}_s = -m\mathbf{a}_0$ .** Vztrajnostna ali sistemska sila ni realna (ni telesa v okolini, ki bi s to silo učinkovalo na telo), ampak je umišljena ali fiktivna sila, ki jo vpeljemo zgolj zato, da lahko Newtonov zakon dinamike uporabljamo tudi v neinercialnih koordinatnih sistemih.

### Primeri:

1. Pritisik telesa na vodoravno podlago je enak teži ( $N = mg$ ) le, če podlaga miruje (ozioroma se giblje enakomerno). Brž ko se podlaga giblje pospešeno (dviga ali spušča), se pritisik telesa na podlago spremeni.

R  
p  
(H  
si  
po  
na  
te  
Op  
ma  
sil  
če  
str  
dv  
N  
Vi  
pri  
Me  
po  
pr  
izm  
tež  
ner  
Če  
in  
2.  
per  
Če  
in  
2.4:  
vrv  
tem  
zov  
vlak  
Zat  
kom  
svet  
Ena  
dobi  
a  
Op  
sveti  
tež  
sko  
napr  
tež  
zuna  
lahk  
določ  
Reci  
hitro  
pospe  
smer  
njo st  
3. Me  
privez  
smer  
giblje  
Ko og  
telo z  
4. Visoki

Recimo, da telo leži na tleh dvigala, ki se dviga s pospeškom  $a_0$ . Zunanji opazovalec na zemeljskih tleh (ki jih tu obravnavamo kot inercialni koordinatni sistem) vidi, da se telo (skupaj z dvigalom) dviga s pospeškom  $a_0$ . Ta pospešek povzroča rezultanta med navzgor usmerjeno pravokotno silo tal ( $N$ ) in težo telesa (slika 2.42a):  $N - mg = ma_0$  ter

$$N = mg + ma_0 \quad (2.37)$$

Opazovalec v dvigalu pa pravi, da telo miruje. Torej mora biti po Newtonovem zakonu dinamike vsota vseh sil enaka nič. Toda Newtonov zakon lahko uporabi le, če poleg dejanskih sil ( $N$  in  $mg$ ) upošteva še vztrajnostno silo  $ma_0$ , ki je usmerjena navzdol (ker je pospešek dvigala usmerjen navzgor). Sledi:  $N - mg - ma_0 = 0$  ter  $N = mg + ma_0$ .

Vidimo, da oba opazovalca dobita enak rezultat za pritisk telesa na podlago, le da vsak na svoj način.

Med pospešenim padanjem dvigala je pritisk telesa na podlago manjši od teže:  $N = mg - ma_0$ . Če dvigalo prosto pada ( $a_0 = g$ ), je  $N = 0$ . Ker se podlaga sproti izmika, telo ne pritiska na podlago (kot da ne bi imelo teže). Telo v prosto padajočem dvigalu je v »breztežnem stanju«.

**2. Viseča svetilka v vlaku.** Vlak se giblje po vodoravnem tiru, s stropa vlaka visi svetilka, obešena na vrvico. Če vlak vozi enakomerno, je svetilka z vrvico navpična in sila v vrvici je enaka teži svetilke:  $F_v = mg$  (slika 2.43a). Brž ko vlak sune naprej s pospeškom  $a_0$ , se vrvica nagnje nazaj in oklepa z navpičnico kót  $\varphi$ , ki je tem večji, čim večji je pospešek  $a_0$  vlaka. Zunanji opazovalec vidi, da se obešena svetilka (potem ko se v vlaku umiri) giblje s pospeškom  $a_0$  (enako kot vlak). Zato je vrvica nagnjena nazaj, da dobi sila v vrvici ( $F_v$ ) komponento v smeri pospeševanja ( $F_v \sin \varphi$ ), ki daje svetilki pospešek  $a_0$  (slika 2.43b). Velja:

$$F_v \sin \varphi = ma_0 \quad \text{ter} \quad F_v \cos \varphi = mg$$

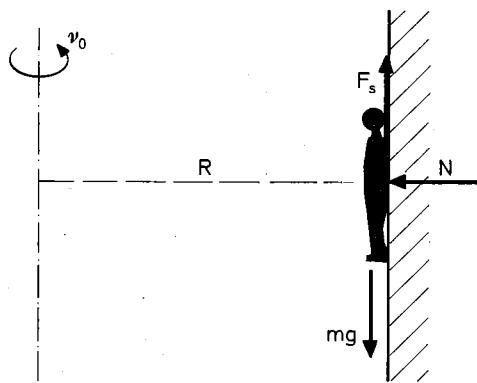
Enačbi delimo, da se neznana sila v vrvici krajša, in dobimo:

$$a_0 = g \operatorname{tg} \varphi$$

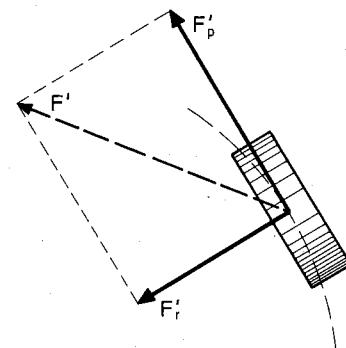
Opazovalec v vlaku sklepa drugače (slika 2.43c). Zanj svetilka miruje, torej je vsota vseh sil enaka nič. Poleg teže  $mg$  in sile v nagnjeni vrvici ( $F_v$ ) upošteva še sistemsko silo  $ma_0$ , ki je usmerjena nazaj (ker vlak pospešuje naprej). Sila v vrvici je nasprotno enaka rezultanti med težo in sistemsko silo. Dobi enak rezultat za  $\operatorname{tg} \varphi$  kot zunanji opazovalec. Mereč naklonski kót vrvice ( $\varphi$ ), lahko opazovalec v vlaku (ne da bi se oziral na okolico) določi pospešek vlaka  $a_0 = g \operatorname{tg} \varphi$ .

Recimo, da vlak ne vozi premočrtno, ampak s stalno hitrostjo v zavozi skozi ovinek s polmerom  $R$ . Zdaj ima pospešek vlaka (to je radialni pospešek:  $a_0 = v^2/R$ ) smer k središču ovinka, zato se vrvica odkloni v zunanjino stran ovinka  $\operatorname{tg} \varphi = a_0/g = v^2/Rg$ .

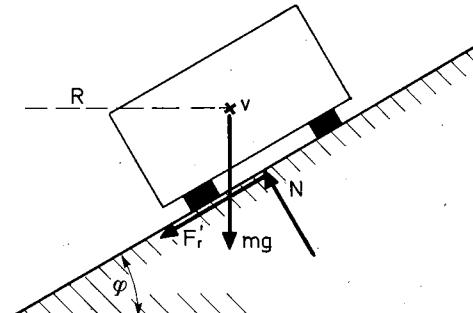
**3. Merilec pospeška.** Naprava vsebuje telo (masa  $m$ ), privezano na prožno vzem (slika 2.44); usmerimo jo v smer merjenega pospeška. Če naprava miruje ali se giblje enakomerno, je telo v ravnotežju (slika 2.44a). Ko ogrodje naprave sune npr. s pospeškom  $a_0$  v desno, telo zaradi vztrajnosti še vztraja pri prvotni hitrosti



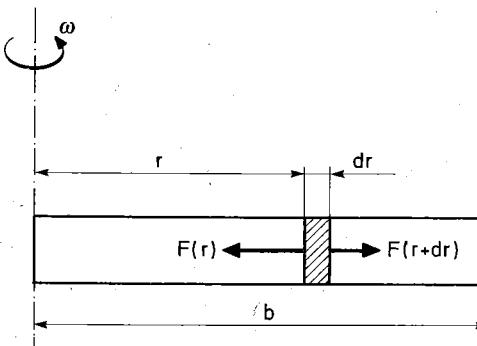
Slika 2.38



Slika 2.39



Slika 2.40



Slika 2.44

(oziroma mirovanju), zato se leva vzmet skrči, desna pa raztegne. Ko se telo v napravi umiri in se giblje z merjenim pospeškom  $a_0$ , je premaknjeno za  $x$  (slika 2.44b), tako da je  $ma_0 = kx$  ( $k$  je konstanta prožnosti vzmeti). Premik telesa ( $x$ ) je merilo za merjeni pospešek.

**4. Centrifugalna sila.** Omenili smo jo (gl. str. 44) kot silo, s katero krožec telo učinkuje na okolico; je torej reakcija telesa na centripetalno silo, ki sili telo v kroženje. Izkaže se, da lahko centrifugalno silo interpretiramo tudi kot **sistemsko silo v vrtečem se koordinatnem sistemu**.

Gibanje telesa v vrtečem se koordinatnem sistemu smo obravnavali na strani 27. Izpeljali smo enačbo (1.63) za pospešek:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2\omega \times \mathbf{v}' - \omega^2 \mathbf{r} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_0$$

Kjer je  $\omega$  kotna hitrost vrtenja koordinatnega sistema (ima smer rotacijske osi),  $\mathbf{v}'$  relativna hitrost telesa (merjena glede na vrteči se koordinatni sistem),  $\mathbf{r}$  pa vektor oddaljenosti telesa pravokotno od vrtilne osi (slika 2.45). Pospešek vrtečega se koordinatnega sistema je torej dan z enačbo:

$$\mathbf{a}_0 = 2\omega \times \mathbf{v}' - \omega^2 \mathbf{r} \quad (2.38)$$

Prvi člen na desni strani je v zvezi s Coriolisovim pospeškom (gl. str. 27; različen je od nič le, če je  $\mathbf{v}' \neq 0$ , torej če se telo v vrtečem se sistemu giblje), drugi pa s centrifugalnim pospeškom. Najprej si oglejmo pomen drugega. Vzamemo, da telo v vrtečem se koordinatnem sistemu miruje ( $\mathbf{v}' = 0$ ), da se torej skupaj s koordinatnim sistemom vrti s kotno hitrostjo  $\omega$ . Tedaj je  $\mathbf{a}_0 = -\omega^2 \mathbf{r}$ . **Vztrajnostna sila**, ki je posledica tega pospeška koordinatnega sistema, je identična z že znano **centrifugalno silo**:

$$\mathbf{F}_{cf} = -m\mathbf{a}_0 = m\omega^2 \mathbf{r} \quad (\text{gl. 2.29}) \quad (2.39)$$

**Usmerjena je pravokotno proč od vrtilne osi in narašča premo sorazmerno z oddaljenostjo telesa od osi.**

Kot primer si mislimo telo, ki privezano z vrvico na os miruje na vodoravni, vrteči se plošči. Zunanji opazovalec vidi, da se telo vrti skupaj s ploščo, da se torej giblje z radialnim pospeškom  $r\omega^2$ . Zato se vrvica napne s silo  $F_v$ , ki kot centripetalna sila omogoča ta pospešek:  $F_v = ma_r = mr\omega^2$ . (Slika 2.46)

Opazovalec na vrteči se plošči sklepa drugače. Zanj telo miruje, torej je vsota vseh sil nič. Poleg sile v vrvici ( $F_v$ ) mora upoštevati še vztrajnostno centrifugalno silo  $F_{cf} = m\omega^2 r$ , ki je usmerjena radialno navzven. Trdi, da je vrvica napeta zato, da s silo  $F_v$  nasprotuje centrifugalni sili, ki »vleče« telo navzven. Sledi:  $F_v - F_{cf} = 0$  ali  $F_v = m\omega^2 r$ .

Tudi Zemlja je vrteči se koordinatni sistem, saj se vrti okrog polarne osi s kotno hitrostjo  $\omega = 2\pi/24 \text{ h} = 7,27 \cdot 10^{-5}/\text{s}$ . Ko obravnavamo telesa na zemeljskem površju, moramo zato poleg teže upoštevati tudi vztrajnostno centrifugalno silo. Ta je največja na zemeljskem ekvatorju, kjer znaša  $mR\omega^2$  ( $R = 6380 \text{ km}$ ), kar je  $R\omega^2/g = 0,00345$ -ti del teže telesa. Vidimo, da je centrifugalna sila največ okrog  $1/3$  odstotka teže telesa, zato

je večinoma lahko zanemarimo (in obravnavamo Zemljo kot inercialni koordinatni sistem).

Za koliko odstotkov ( $p$ ) je človek na geografski širini  $\varphi = 46^\circ$  navidezno lažji zaradi vrtenja Zemlje? (Slika 2.47) Na človeka »delujejo« tele sile: teža  $mg$  navzdol (v smeri k središču Zemlje), centrifugalna sila  $F_{cf} = mr\omega^2 = mR\omega^2 \cos\varphi$  pravokotno proč od polarne osi ter sila tal, ki jo razstavimo na navpično projekcijo  $N$  in na vodoravno  $F$ . Zanimajo nas navpične projekcije sil:  $N + F_{cf} \cos\varphi - mg = 0$  ali

$$N = m(g - R\omega^2 \cos^2\varphi)$$

$$p = (mg - N)/mg = 1 - N/mg = R\omega^2 \cos^2\varphi/g = 0,0017$$

$$p = 0,17\%$$

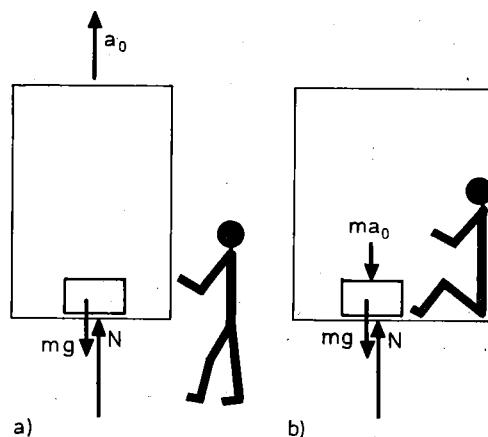
**5. Coriolisova sila** je tisti del vztrajnostne sile v vrtečem se koordinatnem sistemu, ki je posledica relativnega gibanja telesa; ta sila »učinkuje« le, če se telo v vrtečem se sistemu giblje.

Prvi člen na desni strani enačbe (2.38) je v zvezi s Coriolisovim pospeškom (gl. 1.65). Ustrezena vztrajnostna (**Coriolisova**) sila je;

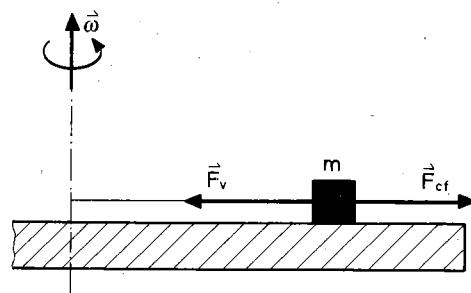
$$\mathbf{F}_C = -2\omega \times \mathbf{v}' m = 2\mathbf{v}' \times \omega m = m\mathbf{a}_C \quad (2.40)$$

**Coriolisova sila je pravokotna tako na vrtilno os kot na relativno hitrost telesa.** Največja je, če je relativna hitrost  $\mathbf{v}'$  pravokotna na vrtilno os, in je nič, če se telo giblje vzporedno z osjo.

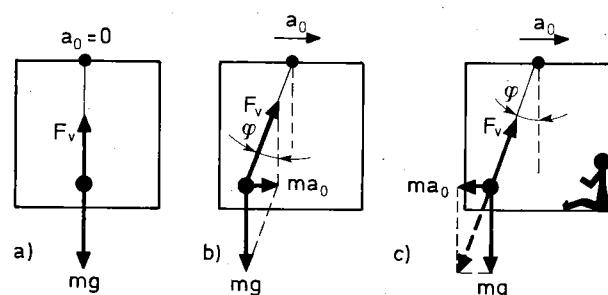
Opazovalec na zemeljskem površju lahko pravilno pojasni gibanje teles v svoji okolini (kar smo obravnavali v poglavju Coriolisov pospešek, stran 27), če poleg realnih sil upošteva tudi centrifugalno in Coriolisovo silo. Zakrivljanje ciklonskih oziroma anticyklonskih vetrov (slika 1.50) npr. »povzroča« Coriolisova sila. Ta vpliva tako močno, da vetrovi celo zakrožijo okrog centra  $C$  nizkega zračnega tlaka. Na sliki (2.48) so s črtanimi krogi označene izobare (to so črte z enakim zračnim tlakom); notranje izobare predstavljajo manjši tlak. Ako bi se Zemlja ne vrtela, bi vetrovi pihali radialno navznoter (to je pravokotno na izobare). Zaradi Coriolisove sile pa se zavrtijo skoraj vzdolž izobar okrog centra  $C$  v nasprotni smeri (na severni polobli), kot se vrti urni kazalec. Anticyklonski vetrovi se vrtijo enako kot urni kazalec (gl. slika 1.50a).



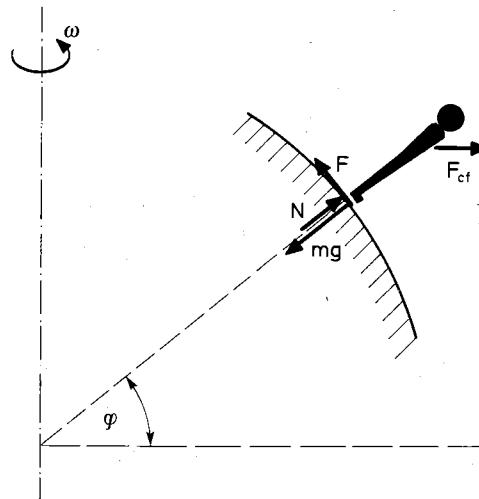
Slika 2.42



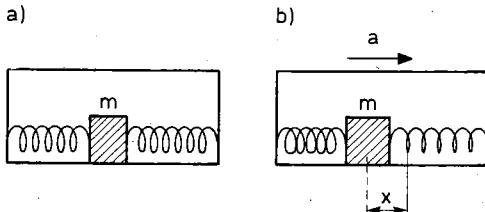
Slika 2.46



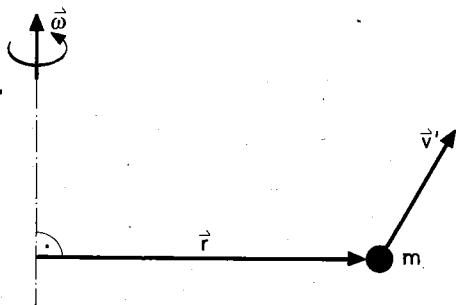
Slika 2.43



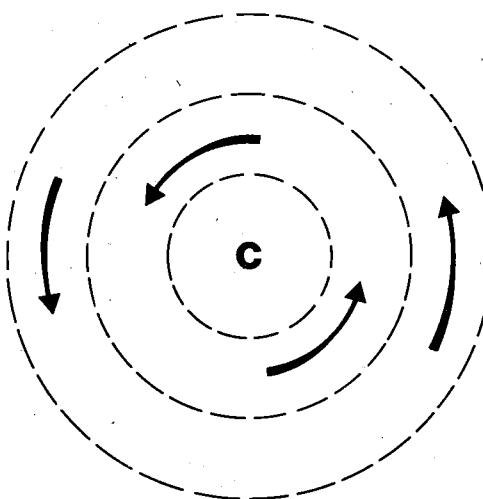
Slika 2.47



Slika 2.44



Slika 2.45



Slika 2.48

Doslej smo obravnavali premikanje telesa v prostoru. O samem telesu – kako veliko je in iz česa je sestavljeno – pa se nismo spraševali. Imeli smo v mislih ali izredno majhno telo (**točkasto telo**) ali pa translatorno gibanje, pri katerem se vsak del telesa enako giblje, tako da razsežnosti telesa pri opisu gibanja ni treba poznati.

Vsako telo je slej ko prej sestavljeno iz velikega števila točkastih teles (npr. molekul ali večjih molekulske skupkov), ki so bolj ali manj močno povezana med seboj. V splošnem se posamezna točkasta telesa gibljejo različno in je zato gibanje telesa kot celote dokaj zapleteno, saj se med gibanjem lahko spreminja tudi oblika in velikost telesa. Kaj lahko o takšnem gibanju povemo, si bomo najprej ogledali pri sistemu točkastih teles.

### Sistem točkastih teles – zunanje in notranje sile

Na svetu je nepreštevno mnogo točkastih teles. Razširjena so po celotnem vesolju, vendar neenakomerno, ponekod so bolj zgoščena kot drugod. Ker sile med njimi upadajo najmanj s kvadratom oddaljenosti, zelo oddaljena telesa ne vplivajo na gibanje teles iz naše bližnje okolice, zato se zanje ne zanimamo. V **sistem točkastih teles** združimo vsa tista točkasta telesa iz naše okolice, katerih gibanje nas zanima. Vsakokrat posebej se dogovorimo, katera telesa spadajo v izbrani sistem, torej katera telesa obravnavamo. Vsa druga telesa pripadajo okolici našega sistema in nas njihovo gibanje ne zanima. Dogovor o tem, katera telesa so v izbranem sistemu in katera v okolici, je seveda poljuben in ga po potrebi spreminja.

Telesa iz okolice učinkujejo na izbrana točkasta telesa sistema s silami; to se **zunanje sile sistema**. Če so okolišna telesa zelo oddaljena, lahko vpliv zunanjih sil na gibanje sistema zanemarimo; tedaj pravimo, da je **sistem izoliran od okolice**. V splošnem to ni, pa se sprašujemo, kako zunanje sile pospešujejo sistem.

Sile, s katerimi posamezna točkasta telesa izbranega sistema učinkujejo drugo na drugo, se imenujejo **notranje sile sistema**. Značilno zanje je, da se pojavljajo v parih nasprotno enakih sil. Če namreč eno telo učinkuje na drugo s silo, istočasno tudi drugo telo učinkuje na prvo z nasprotno enako silo (glej zakon o medsebojnem učinkovanju teles, stran 31), tako da je vektorska vsota vsega para sil nič. Sledi, da je **vektorska vsota vseh notranjih sil**, s katerimi vsa telesa sistema medsebojno učinkujejo, **enaka nič**.

Recimo, da je izbrani sistem sestavljen iz  $N$  točkastih teles. Eno od njih ima maso  $m_i$ , njegovo trenutno lego in hitrost podajata vektorja  $\mathbf{r}_i$  in  $\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt$  (slika 3.1). Če teče indeks  $i$  prek vseh celih števil od 1 do  $N$ , zajamemo vsa točkasta telesa našega sistema.

Gibalna količina telesa  $m_i$  ( $\mathbf{G}_i = m_i \mathbf{v}_i$ , gl. 2.2) se spreminja s časom, ker na telo delujejo notranje in zunanje sile. Z  $\mathbf{F}_i$  označimo rezultanto vseh zunanjih sil, s katerimi vsa telesa iz okolice učinkujejo na točkasto telo  $m_i$ , z  $\mathbf{f}_{ji}$  pa notranjo silo, s katero točkasto telo  $m_j$  učinkuje na  $m_i$  (slika 3.2). Točkasto telo  $m_i$  torej v celoti čuti silo:

## 3. TEL

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_{1i} + \mathbf{f}_{2i} + \mathbf{f}_{3i} + \dots + \mathbf{f}_{Ni} = \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_{ji}$$

ki podaja časovni odvod gibalne količine  $\mathbf{G}_i$  (gl. 2.3):

$$\frac{d\mathbf{G}_i}{dt} = \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_{ji} \quad (3.1)$$

Podobno enačbo napišemo za vsako točkasto telo našega sistema, to je za

$$i = 1, 2, \dots, N$$

Dobimo  $N$  enačb, pri čemer je običajno  $N$  zelo veliko število. Ako bi poznali sile (notranje in zunanje), bi lahko iz zgornjih enačb izračunali, kako se gibalna količina (to je hitrost) vsakega točkastega telesa sistema spreminja s časom. Toda sile (predvsem notranje) so odvisne od razdalje med telesi, te pa se zaradi gibanja spreminjajo s časom (vsaka po svoje), in problem je v splošnem težko rešljiv (vsaj brez pomoči velikega računalnika). Zatorej ne moremo pričakovati, da bi lahko v splošnem ugotovili, kako se posamezna točkasta telesa sistema gibljejo, kako se njihove hitrosti spreminjajo s časom.

Kljub temu lahko vsaj nekaj povemo o gibanju celotnega sistema. Napišimo enačbo (3.1) za vsako telo posebej, to je za  $i = 1, 2, \dots, N$  in nato dobijene enačbe seštejmo. Dobimo:

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\mathbf{G}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_{ji} \quad (3.2)$$

Na lev strani imamo vsoto časovnih odvodov gibalnih količin posameznih tel. Ker je vsota odvodov enaka odvodu vsote, lahko zapišemo:

$$\sum \frac{d\mathbf{G}_i}{dt} = d(\sum \mathbf{G}_i)/dt = d\mathbf{G}/dt$$

kjer je  $\mathbf{G}$  vektorska vsota gibalnih količin vseh tel sistema, to je **gibalna količina celotnega sistema**:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \dots + \mathbf{G}_N = \sum_{i=1}^N \mathbf{G}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \quad (3.3)$$

Prvi člen na desni strani sumarne enačbe (3.2) predstavlja **rezultanto vseh zunanjih sil**, ki učinkujejo na vsa točkasta telesa sistema:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i$$

Drugi člen pa zajema celotno vektorsko vsoto vseh notranjih sil. Ker se te paroma medsebojno kompenzirajo, je njihova rezultanta nič:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_{ji} = 0$$

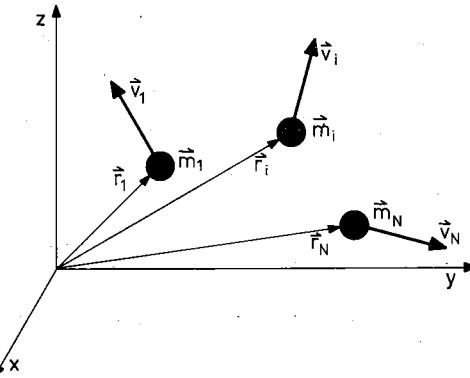
Po vsem tem se sumarna enačba (3.2) poenostavi v enačbo:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{F}} \quad (3.4)$$

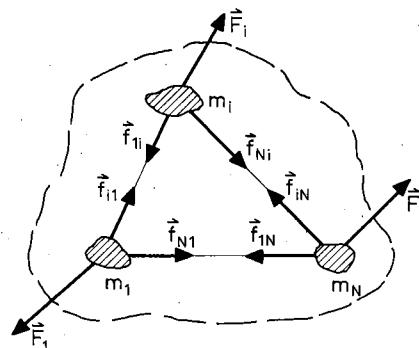
Iz katere sledi, da je **gibalna količina sistema odvisna le od zunanjih sil**; notranje sile izpadajo. Gibalna količina sistema se spreminja s časom tako, kot predpisujejo zunanje sile; notranje sile ne morejo vplivati nanjo. Te sicer spreminjajo gibalne količine posameznih tel sistema, ne morejo pa spremeniti njihove vsote, to je celotne gibalne količine sistema.

Za  $\mathbf{F} = 0$  dobimo  $d\mathbf{G}/dt = 0$  ali

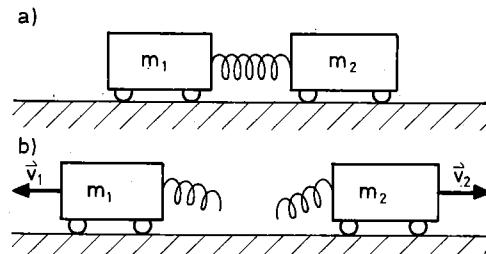
$$\mathbf{G} = \text{konst.} \quad (3.5)$$



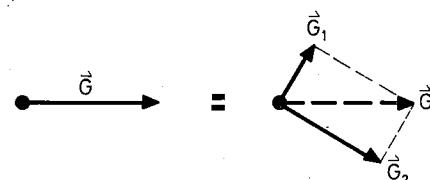
Slika 3.1



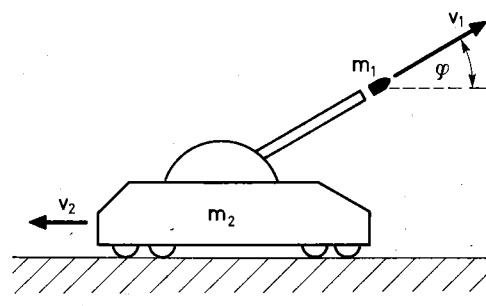
Slika 3.2



Slika 3.3



Slika 3.4



Slika 3.5

**Če na sistem ne delujejo zunanje sile**, oziroma če je njihova rezultanta nič, je gibalna količina sistema stalna (se ne spreminja s časom, četudi učinkujejo in se spreminja notranje sile).

### Primeri:

1. Voziček z maso  $m_1$  je prek prožne vzmeti spet z vozičkom  $m_2$  (slika 3.3a). V začetku vozička mirujeta, vzmet med njima je stisnjena. Ko vzmet sprožimo, da se raztrga, vozička odletita s hitrostima  $v_1$  in  $v_2$  v nasprotnih smereh (slika 3.3b). V kakšnem razmerju sta si hitrosti vozičkov? Trenje zanemarimo.

Naš sistem sestavlja vozička  $m_1$  in  $m_2$ . Resda nista točasti telesi, vendar če se gibljeta translatorno (kolesa izvzamemo), ju lahko obravnavamo kot takšni. Ker v začetku mirujeta, je njuna skupna gibalna količina nič:  $\mathbf{G} = 0$ . Na vozička delujejo zunanje sile: njuni teži in pravokotni sili podlage. Te se medsebojno uničujejo, zato je  $\mathbf{F} = 0$ . Torej je gibalna količina obeh vozičkov ves čas nič, četudi se vmes sprožijo notranje sile vzmeti. Po sprožitvi vozička odskočita s takšnima hitrostima  $v_1$  in  $v_2$ , da je vektorska vsota njunih gibalnih količin nič:

$$\mathbf{G} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = 0 \text{ ali } \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1 m_1 / m_2$$

En voziček odnese v eno smer tolikšno gibalno količino, kolikršno odnese drugi v nasprotno smer. Notranji sili sprožene vzmeti spremenita gibalno količino vsakega vozička, vendar tako, da je skupna gibalna količina vozičkov še zmeraj nič, kot je bila pred sprožitvijo. Celoten  $\mathbf{G}$  lahko spremeni le zunanje sile, tega pa v tem primeru ni.

Podobno kot zgoraj se dogaja pri streljanju z različnimi orožji. Izstrelki odnese neko gibalno količino (kolikršno, je odvisno od notranjih sil, to je od energije, sprošcene z eksplozijo); z enako veliko gibalno količino sune orožje samo (npr. puška, top) v nasprotno smer. Da ne sune s preveliko hitrostjo, je orožje masivno (njegova masa velika v primerjavi z maso izstrelka).

### Nadaljnji primeri:

S kolikršno hitrostjo se odrine čoln, s katerega skočimo na breg? Kako se giblje ladja zaradi tega, ker se po njenem krovu sprehaja potnik?

2. Granata se giblje enakomerno s stalno gibalno količino  $\mathbf{G}$  (slika 3.4). Naenkrat se razleti na različna kosa, ki odletita vsak v svojo smer. Kaj lahko rečemo o hitrosti kosov?

Hitrost in smer gibanja kosov sta sicer odvisni od načina razstrelitve granate (od sprošcene energije, od notranjih sil, ki se sprostita ob razstrelitvi) in sta zato v različnih primerih različni, vendar je njuna skupna gibalna količina vsakič enaka prvotni gibalni količini  $\mathbf{G}$  granate:

$$\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}$$

Eksplozija granate ne spremeni celotne gibalne količine.

3. Oklepni voz, ki miruje na vodoravnem tiru, izstrelji granato ( $m_1 = 200 \text{ kg}$ ) s hitrostjo  $v_1 = 1 \text{ km/s}$  pod kotom  $\varphi = 45^\circ$  glede na tir. S kolikršno hitrostjo ( $v_2$ ) se premakne voz po tiru, če je njegova masa  $m_2 = 20 \text{ t}$ ? (Slika 3.5)

Ker granata odleti poševno navzgor, bi se moral voz odriniti v nasprotno smer v tla. Tir se temu upre, pojavi se dodatna sila tal. Voz se lahko premakne le v vodoravni smeri. V tej smeri dobi gibalno količino  $m_2 v_2$ , ki je nasprotno enaka vodoravni projekciji odnešene gibalne količine (granate):  $m_1 v_1 \cos \varphi$ . Za navpično projekcijo  $m_1 v_1 \sin \varphi$  pa poskrbi povečana pravokotna sila tal.

V tem primeru se gibalna količina ohranja le v vodoravni smeri (v tej smeri namreč ni zunanjih sil), v navpični smeri pa se poveča; prvotno je bila nič, po izstrelitvi granate pa je  $m_1 v_1 \sin \varphi$ ; ta sprememba je enaka sunku povečane sile tal (gl. 2.5).

### Masno središče sistema

Enačba (3.4), ki podaja časovno sprememjanje celotne gibalne količine sistema v odvisnosti od zunanjih sil, je po obliki podobna enačbi (2.3) za spremembo gibalne količine točkastega telesa. Lahko si izberemo neko točko, t. i. **masno središče sistema ( $C$ )**, ki predstavlja celoten sistem točkastih teles. Mislimo si, da **masno središče  $C$  zajema maso celotnega sistema in se giblje s celotno gibalno količino  $G$  sistema, kot da bi zunanje sile delovale neposredno nanj.**

Masno središče ni nobeno točkasto telo, je umišljena (matematična) točka, ki jo vpeljemo zgolj zato, da z njenim pomočjo enostavnejše zasledujemo gibanje celotnega sistema.

Trenutno lego masnega središča podaja krajevni vektor  $\mathbf{r}_C$ , njegovo hitrost pa vektor  $\mathbf{v}_C = d\mathbf{r}_C/dt$  (slika 3.6). Seveda je lega odvisna od prostorske razporeditve posameznih točkastih teles, ki sestavljajo sistem. Ugotovimo jo s pomočjo definicije, da se masno središče giblje z gibalno količino  $\mathbf{G}$  sistema, kot da bi bila v njemu zbrana vsa masa  $m$  sistema. Sledi:

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^N \mathbf{G}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = m \mathbf{v}_C \quad (3.6)$$

ali

$$\mathbf{v}_C = (1/m) \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \quad (3.6a)$$

Hitrost masnega središča je povprečje hitrosti posameznih točkastih teles sistema; utež povprečenja je masa telesa. Masivnejša telesa več prispevajo k hitrosti masnega središča kot laža.

Ker je  $\mathbf{v}_C = d\mathbf{r}_C/dt$  in  $\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt$ , napišemo naprej:

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = m \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} \text{ ali} \\ \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = \frac{d}{dt} (m \mathbf{r}_C) \text{ ter (ne upoštevaje integracijske konstante)}$$

$$m \mathbf{r}_C = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \text{ ali}$$

$$\mathbf{r}_C = (1/m) \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \quad (3.7)$$

Projekcije krajevnega vektorja masnega središča na posamezne koordinatne osi so dane z enačbami:

$$x_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i x_i \quad (3.7a)$$

$$y_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i y_i \quad (3.7b)$$

$$z_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i z_i \quad (3.7c)$$

Podobno kot hitrost  $v_C$  je tudi krajevni vektor  $r_C$  masnega središča povprečje krajevnih vektorjev  $r_i$  posameznih točkastih teles, ki sestavljajo sistem, pri čemer vsako telo prispeva k povprečju sorazmerno z maso. Masno središče  $C$  sistema je zato v bližini masivnih teles; telesa z majhno maso malo odločajo o legi masnega središča celotnega sistema.

#### Primera:

1. Točkasti telesi  $m_1 = 2 \text{ kg}$  in  $m_2 = 1 \text{ kg}$  sta razmaznjeni za  $d = 60 \text{ cm}$ . Kje je njuno masno središče (slika 3.7)? Koordinatni sistem zasukamo tako, da je npr. telo  $m_1$  v koordinatnem izhodišču ( $r_1 = 0$ ), telo  $m_2$  pa na osi  $x$  ( $y_2 = z_2 = 0$ ,  $x_2 = d$ ). Potem velja:  $y_C = z_C = 0$  in  $x_C = (m_1 x_1 + m_2 x_2) / (m_1 + m_2) = dm_2 / m = d/3 = 20 \text{ cm}$ .

2. Točkasta telesa  $m_1 = 10 \text{ g}$ ,  $m_2 = 20 \text{ g}$ ,  $m_3 = 30 \text{ g}$  in  $m_4 = 40 \text{ g}$  so razvrščena po oglisčih pravokotnika s stranicama  $a = 60 \text{ cm}$  in  $b = 40 \text{ cm}$ , kot kaže slika (3.8). Določi njihovo masno središče!

Ker so vsa telesa v isti ravnini, usmerimo koordinatni sistem tako, da sta osi  $x$  in  $y$  v tej ravnini, os  $z$  pa pravokotna nanjo. Tedaj je  $z_C = 0$ ; računamo le  $y_C$  in  $x_C$ :

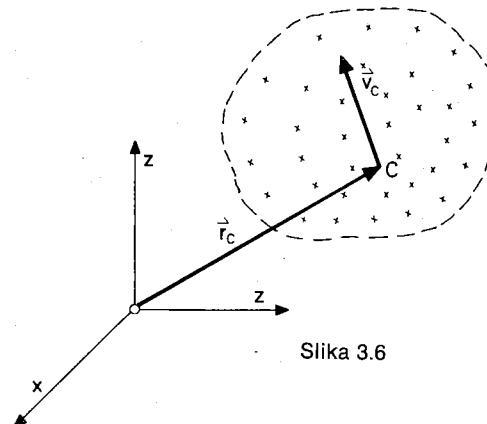
$$\begin{aligned} x_C &= (m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4) / m = a(m_2 + m_3) / m = \\ &= 30 \text{ cm} \\ y_C &= (m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4) / m = b(m_3 + m_4) / m = \\ &= 28 \text{ cm} \end{aligned}$$

Po definiciji se masno središče sistema giblje tako, kot da bi imelo celotno gibalno količino in celotno maso sistema in kot da bi zunanje sile delovale neposredno nanj. Enačbo (3.4) interpretiramo kot posprošen Newtonov zakon dinamike za gibanje masnega središča:

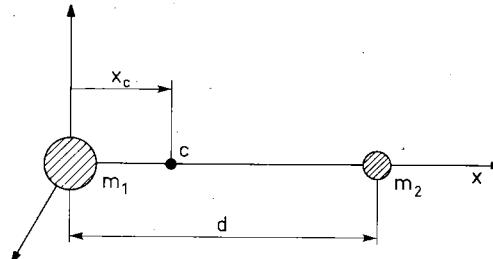
$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{G}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v}_C)}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = m\mathbf{a}_C \quad (3.7')$$

kjer je  $\mathbf{a}_C = d\mathbf{v}_C/dt$  pospešek masnega središča.

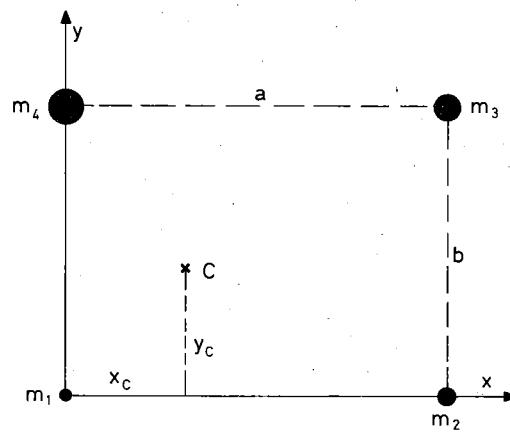
Vidimo, da je **pospešek masnega središča odvisen od zunanjih sil**. Masno središče sistema se giblje tako, kot predpisujejo zunanje sile. Notranje sile nanj ne vplivajo. Četudi se spreminja in se npr. močno povečajo (ob eksploziji sistema), se to ne pozna na gibanju masnega središča sistema. Notranje sile lahko spreminjajo hitrost oziroma gibalno količino posameznih



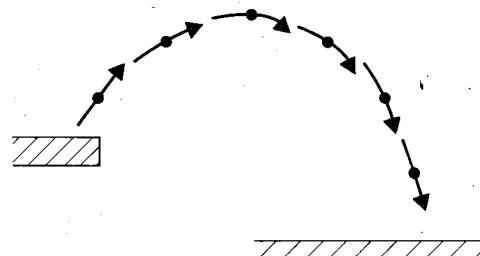
Slika 3.6



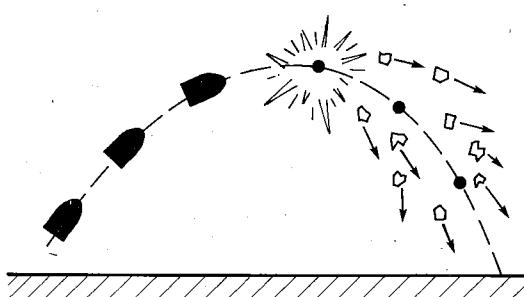
Slika 3.7



Slika 3.8



Slika 3.9



Slika 3.10

teles sistema, ne morejo pa spremenjati hitrosti včnijihovega masnega središča.

Ko skakalec skoči s skakalne deske v vodo, se njegovo masno središče (nekje blizu želodca) giblje pod vplivom zunanje sile – teže po paraboli poševnega meta (upor zraka npr. zanemarimo). Med skokom se skakalec skrči (z delovanjem notranjih sil – sil mišic) in zavrti okrog svojega središča, vendar se njegovo središče zaradi tega ne giblje nič drugače (slika 3.9). To sicer velja le, če zares lahko zanemarimo upor zraka. Ta se namreč spremeni, ko se skakalec skrči, zato se tudi masno središče giblje drugače.

Topovska granata se giblje po paraboli, ki je značilna za poševni met pod vplivom teže. Ko granata med letom eksplodira in se razleti na koščke, se masno središče razletelih koščkov še naprej giblje po prvotni paraboli (slika 3.10). Razstrelitev granate namreč povzročijo notranje sile, te pa ne morejo vplivati na hitrost masnega središča granate. Ali se po eksploziji granate spremeni tudi gibanje masnega središča, če upoštevamo upor zraka? Zakaj?

## Reakcijska sila

Ko odkocimo s čolna, se čoln odrine v nasprotno smer, njegova hitrost v nasprotno smer se poveča. Z vozečega vozička odvržemo predmet v smeri nazaj; hitrost vozička v smeri naprej se zaradi tega poveča. Če stalno odmetujemo predmete nazaj, se hitrost vozička stalno povečuje. Voziček se giblje pospešeno v nasprotni smeri, kot odmetujemo predmete. Odvrženi predmeti se »odrivajo« od vozička in ga tako pospešujejo v nasprotno smer. Pravimo, da se voziček pospešuje, ker ga odvrženi predmeti odrivajo z reakcijsko silo.

Raketa izmetuje izpušne pline. Ti z reakcijsko silo porivajo raketo naprej, nasproti smeri iztekanja. V nekem trenutku ima raketa maso  $m$  in se giblje s hitrostjo  $v$ . V naslednjem kratkem časovnem intervalu  $dt$  raketa odvrže pline z maso  $dm$  in z relativno hitrostjo  $u$ , zaradi česar se hitrost rakete poveča za  $dv$ . Gibalna količina izpušnih plinov v smeri naprej se zmanjša z  $vdm$  na  $(v - u)dm$ , to je za  $udm$ . Za toliko se poveča gibalna količina rakete v smeri naprej:  $mdv$ . Sledi:

$$udm = mdv$$

Enačbo delimo z  $dt$ , da dobimo spremembo v časovni enoti:

$$u(dm/dt) = mdv/dt$$

Količnik  $dm/dt$  se imenuje **masni tok izpušnih plinov** ( $\Phi_m$ ):

$$\Phi_m = dm/dt \quad (3.8)$$

Pove maso snovi, ki jo raketa odvrže v časovni enoti (merska enota je kg/s).

Pospešek  $a = dv/dt$  rakete zaradi reakcijske sile izpušnih plinov potem takem računamo z enačbo:

$$ma = u\Phi_m$$

(3.9)

Produkt relativne hitrosti  $u$  iztekanja in masnega toka  $\Phi_m$  iztekajočih plinov ima dimenzijsko sile; imenuje se **reakcijska sila** iztekajočih plinov. Ta je tem večja, s čim večjo hitrostjo plini iztekajo iz rakete in čim večji je njihov masni tok.

### Primer:

Plini iztekajo iz rakete z relativno hitrostjo  $u = 1500 \text{ m/s}$ , masni tok je  $\Phi_m = 150 \text{ kg/s}$ . Kolikšen pospešek vsiljuje reakcijska sila raketni z maso  $m = 10 \text{ t}$ ?

$$a = u\Phi_m/m = 1500 \text{ ms}^{-1} \cdot 150 \text{ kgs}^{-1}/10000 \text{ kg} = 22,5 \text{ m/s}^2$$

Balon s stisnjениm zrakom pritrdimo na voziček. Balon odpromo, da začne zrak iztekat. Reakcijska sila izteka-jočega zraka potiska voziček v nasprotno smer. Voda, iztekajoča iz pipe, odriva pipo z reakcijsko silo. Ta je posebno opazna pri gasilski cevi ali v kopališči pri cevi za tuširanje. Če pipa na hitro odpromo, da voda brzgne iz cevi, se cev sunkovito premakne v nasprotno smer, kot izteka voda. Reakcijska sila iztekače vode poganja vrteči se škropilnik za namakanje travnika.

Raketa nosi s seboj gorivo, ki izgoreva v posebnih komorah. Nastali vroči plini z veliko hitrostjo izstopajo skozi izpušne šobe in odrivajo raketo z reakcijsko silo, tako da se raketa lahko pospešuje tudi skozi brezračni prostor.

### Primer:

Raketo z zemeljskega površja izstrelimo v navpični smeri. Kako se mora masa rakete spremeniti s časom, da se raketa dviga s stalno hitrostjo  $v_0$ ? Začetna masa rakete skupaj z gorivom je  $m_0$ , izpušni plini iztekajo iz rakete s stalno relativno hitrostjo  $u$ . Upor zraka zanemarimo.

Na raketo delujeta sili: teža rakete  $m(t)g$  navzdol ter reakcijska sila  $u\Phi_m(t)$  navzgor, pri čemer je  $\Phi_m = -dm/dt$ . Težni pospešek se z višino zmanjšuje (gl. 2.11):  $g = g_0 R^2/r^2$ ,  $g_0$  je težni pospešek na površju Zemlje (=  $9,81 \text{ m/s}^2$ ),  $R$  je polmer Zemlje (=  $6400 \text{ km}$ ),  $r$  je oddaljenost rakete od središča Zemlje =  $R + v_0 t$ .

Raketa se dviga s stalno hitrostjo  $v_0$ , če je potisna reakcijska sila ves čas enaka teži:

$$u\Phi_m = mg$$

$$u \frac{dm}{dt} = -mg_0 R^2 (R + v_0 t)^{-2} \text{ ali}$$

$$u m^{-1} dm = -g_0 R^2 (R + v_0 t)^{-2} dt$$

(predznak minus zato, ker se m zmanjšuje s časom in pozitivnemu dt ustreza negativen dm)

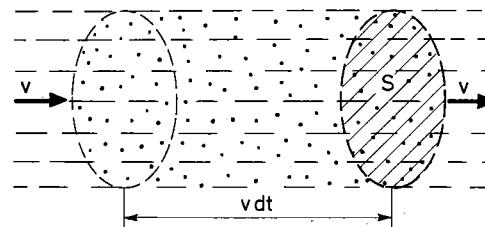
Enačbo integriramo: na lev strani od  $m_0$  do  $m$ , na desni pa od 0 do  $t$ . Dobimo:

$$u \ln(m_0/m) (g_0 R^2/v_0) [R^{-1} - (R + v_0 t)^{-1}] = g_0 R t / (R + v_0 t)$$

ter

$$m = m_0 \exp \left[ -\frac{g_0 R t}{u (R + v_0 t)} \right]$$

Ker poznamo maso rakete kot funkcijo časa, lahko izračunamo, kako se mora masni tok izpušnih plinov  $\Phi_m = -dm/dt$  spremenjati s časom, da se bo raketa dvigala enakomerno s stalno hitrostjo  $v_0$ .



Slika 3.11

## Sila curka

S pojmom curek razumemo množico (sistemu) delcev, ki se gibljejo vzporedno s približno enako hitrostjo, npr. vodni curek, zračni tok, curek elektronov v katodni cevi, curek kroglic iz strojnice itd. Podamo hitrost curka (to je hitrost delcev v curku)  $v$ , njegov prečni presek  $S$  in masni tok  $\Phi_m$ . Masni tok je kvocient mase snovi ( $dm$ ), ki v časovnem intervalu  $dt$  steče skozi prečni presek curka:

$$\Phi_m = dm/dt$$

Skozi presez  $S$  (gl. slika 3.11) prispe v časovnem intervalu  $dt$  vsa snov, ki je v volumenskem elementu z osnovno ploskvijo  $S$  in dolžino  $vdt$  vzdolž curka do prereza  $S$ , to je:  $dm = \rho dV = \rho S v dt$ , pri čemer je  $\rho$  gostota snovi v curku, to je masa snovi v enoti prostornine curka. Sledi:

$$\boxed{\Phi_m = \rho S v} \quad (3.10)$$

Če poznamo število ( $n$ ) delcev (npr. kroglic), ki v enoti časa pretečejo skozi prečni presez curka, je seveda:

$$\Phi_m = n \mu \quad (3.10a)$$

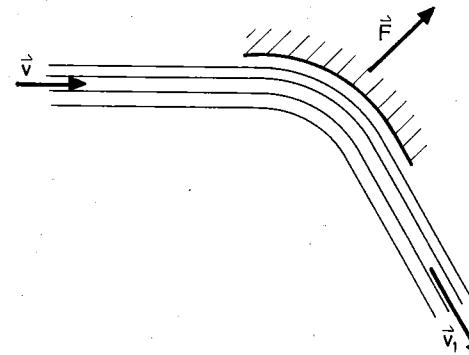
Kjer je  $\mu$  masa enega delca v curku.

Curek predstavlja gibajočo se snov, to je tok gibalne količine. Ta se ne spreminja, če je vsota vseh sil, ki učinkujejo na delce curka, enaka nič; tedaj curek teče enakomerno – premočrno s stalno hitrostjo. Brž ko pa curek zadene na oviro, se gibalna količina spremeni. **Sprememba gibalne količine v enoti časa je enaka sili** (gl. 2.3), s katero ovira učinkuje na curek, oziroma je nasprotno enaka sili, s katero curek odriva oviro.

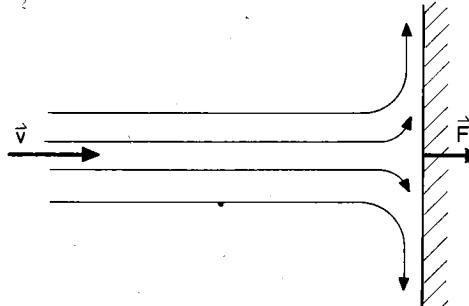
V splošnem ovira spremeni tako velikost kot smer hitrosti delcev v curku. Recimo, da delci vpadajo na oviro s hitrostjo  $v$ , zapuščajo pa jo s hitrostjo  $v_1$  (slika 3.12). V časovnem intervalu  $dt$  prispe do ovire  $dm = \Phi_m dt$  snovi, ki prinese gibalno količino  $v dm$ . Zaradi ovire se ta gibalna količina spremeni za  $dG = dm(v_1 - v)$ , kar je sprememba gibalne količine curka v časovnem intervalu  $dt$ . Kvocient spremembe gibalne količine in časovnega intervala, v katerem se sprememba zgodi, je enak sili, ki to spremembo povzroči, to je sili, s katero ovira zadržuje curek:  $dG/dt = (dm/dt)(v_1 - v) = \Phi_m(v_1 - v)$ .

**Sila curka** je sila, s katero curek odriva oviro; je nasprotno enaka sili, s katero ovira moti njegovo gibanje, to je:

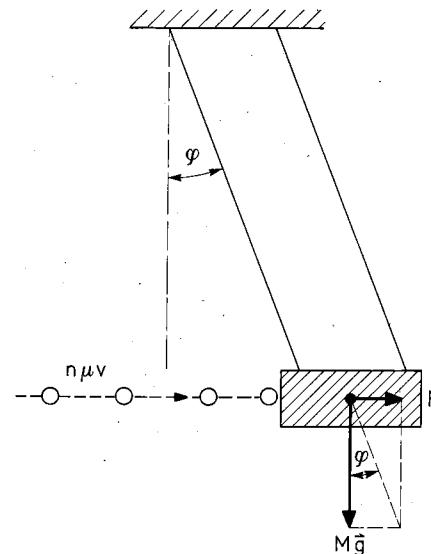
$$\boxed{\text{Sila curka } \mathbf{F} = \Phi_m(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1)} \quad (3.11)$$



Slika 3.12



Slika 3.13



Slika 3.14

**Sila curka je produkt masnega toka in spremembe hitrosti curka.**

Zgodi se, da se curek ob oviri ustavi ( $v_1 = 0$ ) ali pa se ob njej razlike enakomerno v vse smeri (slika 3.13). Tedaj ima sila curka vpadno smer (odriva oviro v smeri curka) in je velika:

$$F = \Phi_m V \quad (3.11a)$$

**Primera:**

1. Voda v potoku teče s hitrostjo 1,5 m/s, prečni presek je okrog 10 dm<sup>2</sup>. Potok nenadoma zajezimo s pravokotno pregrado, tako da voda odteka v pravokotni smeri v sosednja bazena na obeh straneh potoka. S kolikšno silo moramo zadrževati pregrado, da je potok ne odnese?

$$\begin{aligned} F &= \Phi_m V = \rho S v^2 = 10^3 \text{kgm}^{-3} \cdot 0,1 \text{m}^2 \cdot 2,25 \text{m}^2 \text{s}^{-2} = \\ &= 225 \text{ kgms}^{-2} = 225 \text{ N} \end{aligned}$$

2. Lesena klada z maso  $M = 2 \text{ kg}$  visi na dolgih nitkah (slika 3.14). Vanjo streljamo s strojnico v vodoravni smeri; v sekundi izstrelimo 40 metkov, masa vsakega metka je 0,5 g. Metki se zarivajo v klado in jo odrivajo, zaradi česar se klada odkloni za kót 15°. Kolikšna je povprečna hitrost izstreljenih metkov?

Na visečo klado delujejo tele sile: teža  $Mg$ , sila curka metkov  $F$  in sila v vrvičah. Klada se umiri pri takšnem kotu  $\varphi$ , da ima rezultanta med težo in silo curka smer vrvic (in je nasprotno enaka sili v vrvičah), tako da velja:  $\operatorname{tg} \varphi = F/Mg$  ali  $F = Mg \operatorname{tg} \varphi$ . Sila curka izstreljenih metkov znaša (gl. 3.11a in 3.10a):  $F = \Phi_m V = \eta \mu V$ . Sledi:

$$V = (Mg/\eta \mu) \operatorname{tg} \varphi = 260 \text{ m/s} = 950 \text{ km/h}$$

Silo vodnega (parnega) curka izkoriščamo pri vodnih (parnih) turbinah. Ovira so lopatice na obodu rotorja turbine. Vpadni curek odriva lopatice in s tem vrvi rotor. Torej s pomočjo sile curka spremenimo kinetično energijo curka v rotacijsko kinetično energijo rotorja turbine.

Rotor turbine se vrvi, zato lopatice bežijo pred curkom; relativna hitrost med curkom in lopatiko je manjša, kot če lopatice mirujejo, manjša je tudi sila, s katero curek odriva lopatice. Za primer turbine vzemimo, da so lopatice zakrivljene, tako da odbijajo curek z enako relativno hitrostjo nazaj (slika 3.15). Če se lopatice gibljejo s hitrostjo  $v_o$  v smeri curka, curek zadeva obnje z relativno hitrostjo  $v - v_o$ ; z enako relativno hitrostjo se odbija nazaj, kar pomeni, da se curek po odboju od lopatic giblje v levo s hitrostjo  $2v_o - v$ , hitrost curka se torej spremeni za  $2(v - v_o)$ . V tem primeru curek odriva lopatice s silo  $F = \Phi_m \cdot 2(v - v_o)$ . Masni tok  $\Phi_m$  pove maso snovi, ki v enoti časa priteka do lopatic turbine. Če so lopatice razvrščene po obodu rotorja na gosto (ko se ena odmakne, je že druga v curku), je masni tok  $\Phi_m$  neodvisno od hitrosti  $v_o$  lopatic enak  $\rho S v$ . Pri posamičnih lopaticah pa je treba upoštevati relativno hitrost:  $\Phi_m = \rho S(v - v_o)$ .

Želimo, da bi rotor turbine čim hitreje prejemal kinetično energijo, da bi torej sila curka delala s čim večjo

močjo. Iz srednje šole se spomnimo, da je moč enaka produktu sile in hitrosti (gl. str. 87). Vpadni curek potemtakem oddaja lopaticam moč:

$$P = F v_o = \Phi_m \cdot 2(v - v_o) v_o$$

Kako hitro naj se gibljejo lopatice rotorja, da bodo od curka prejemale največjo možno moč? Če se gibljejo zelo počasi, je moč  $P$  majhna, ker je  $v_o$  majhen. Pri hitrem gibanju pa je  $P$  zopet majhen, ker je  $F$  majhen (gl. slika 3.16). Največjo možno moč dobimo pri vmesni hitrosti  $v_o$  lopatic, za katero velja:

$$dP/dv_o = 0$$

Za turbino z gosto razporejenimi lopaticami velja:  $P = 2\rho S v_o (v - v_o) v_o$  in  $dP/dv_o = 2\rho S v_o (v - 2v_o) = 0$  ter  $v_o = v/2$ .

2. **Turbina prejema največjo možno moč, če se lopatice gibljejo s polovično hitrostjo curka.** Tedaj se curek po odboju od lopatic ustavi in torej preda lopaticam vso svojo kinetično energijo. (Za turbino s posamičnimi lopaticami pa dobimo največjo možno moč pri  $v_o = v/3$ ).

**Pritisak padajočega peska na tla.** Pesek pada z višine  $h$  na vodoravna tla, kjer obmiruje (slika 3.17). Zanima nas sila  $N$ , s katero padajoči pesek pritiska ob tla, ki ga ustavlja.

Delci peska padajo na tla s hitrostjo  $v = \sqrt{2gh}$ , masni tok curka (gl. 3.10) je:  $\Phi_m = \rho S v$ , kjer je  $S$  presek curka,  $\rho$  pa povprečna gostota peska v curku. V časovnem intervalu  $dt$  pade na tla pesek z maso  $dm = \Phi_m dt = \rho S v dt$ , ki prinese gibalno količino  $dG = v dm = \rho S v^2 dt$ . Sila  $N$  je enaka spremembi gibalne količine v časovni enoti:

$$N = dG/dt = \rho S v^2 = \rho S \cdot 2gh = mg$$

pri čemer je  $m = 2\rho Sh$  masa celotnega padajočega dela peska.\* Ko se pesek ustavi ob tleh, pritisne na tla s silo, ki je enaka teži celotnega padajočega peska (višina  $h$  nad tlemi). Če bi pesek nad tlemi miroval kot pokončen steber, bi pritiskal na tla prav tako s težo  $mg$ .

Zgoraj smo računali silo, s katero tla ustavljajo padajoči curek. Tej sili moramo seveda dodati še težo mirujočega (že ustavljenega) peska, da dobimo celoten pritisk peska na tla.

Ovira v splošnem spremeni smer curka in je treba računati silo curka vektorsko (3.11). Sila curka  $F$  ima poleg komponente v vpadi smeri curka še komponento v prečni smeri, s katero curek odriva oviro prečno na vpadi smer. Ta je seveda večja, če ovira močneje zakrivi tok curka.

**Primera:**

1. Vodni curek priteka s hitrostjo  $v$  na zakriviljeno lopatiko, ki zasuka njegovo smer za kót  $\theta$  (slika 3.18). S kolikšno silo moramo potiskati lopatiko v vzdolžni

\*  $m = \int_0^h \rho(z) S dz = \rho v \int_0^h dz/v(z) = (\rho v \sqrt{2g}) \int_0^h (h-z)^{-1/2} dz = \rho v \sqrt{2h/g} = 2\rho h S$

smeri in s kolikšno v prečni, da se zaradi curka ne premakne?

Na območju lopatice je v nekem trenutku dana množina vode. V naslednjem kratkem času  $dt$  priteče na lopatico  $dm = \Phi_m dt = \rho S v dt$  vode, ki prinese v smeri  $x$  (to je v vpadni smeri) gibalno količino  $v dm$ . Obenem odteče z lopatice enaka množina vode, ki odnese gibalno količino  $v dm$  v smeri kota  $\theta$ . V vpadni smeri ( $x$ ) se torej gibalna količina vodnega curka zmanjša za  $dG_x = v(1 - \cos\theta)dm$ ; to zmanjšanje povzroči sila  $F_x$ . Velja:

$$F_x = dG_x/dt = \rho S v^2 (1 - \cos\theta)$$

Prečna sila  $F_y$  poveča gibalno količino curka v prečni smeri  $y$  od 0 na  $dG_y = v dm \sin\theta$ . Sledi:

$$F_y = dG_y/dt = \rho S v^2 \sin\theta$$

**2. Snežni plug** rije po vodoravni cesti s stalno hitrostjo  $v = 18 \text{ km/h}$  in odmetava sneg; vsako minuto odvrže 60 ton snega. Sneg izstopa iz plužne brane z relativno hitrostjo  $u = 3 \text{ m/s}$  pod pravim kotom glede na smer gibanja pluga. S kolikšno silo ( $F_x$ ) mora plug potiskati brano naprej in kolikšna sila ( $F_y$ ) deluje na plug od strani?

Kar se sil tiče, so razmere enake, kot če plug miruje in sneg vstopa v brano z nasprotno smeri s hitrostjo  $v$ . Primer je podoben prvemu (za  $\theta = 90^\circ$ ). Dobimo:

$$F_x = \Phi_m v = \frac{60 \text{ t}}{60 \text{ s}} \cdot 5 \text{ ms}^{-1} = 5000 \text{ N} = 5 \text{ kN}$$

$$F_y = \Phi_m u = 3 \text{ kN}$$

## Telo

Telo je sistem z zelo veliko točkastimi telesci, ki se tiščijo drugo drugega. Med posameznimi telesci delujejo zelo močne notranje sile; te jih povezujejo v celoto in ovirajo njihovo relativno premikanje, tako da lahko govorimo o velikosti in obliki telesa. Čim močnejše so notranje sile, tem bolj trdno je telo, tem manj se med gibanjem spreminja njegova oblika (pod vplivom zunanjih sil). Telo je **togo**, če lahko zanemarimo spreminjaњe njegove oblike. Pri togem telesu so notranje sile velike v primerjavi z zunanjimi in lahko vpliv zunanjih sil na obliko ali velikost telesa zanemarimo.

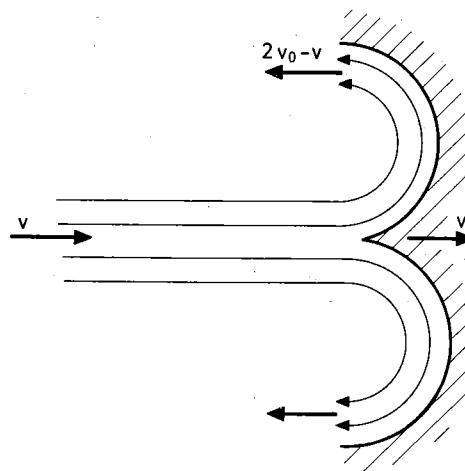
Enačbe (3.3 – 3.7), ki smo jih izpeljali za sistem točkastih teles, lahko uporabimo tudi za telo. Vendar moramo upoštevati, da telo vsebuje zelo veliko točkastih telesc, ki so nagnetena tako na gosto, da ne moremo ločiti eno od drugega. Posameznih telesc je preveč, da bi jih lahko preštevali. Telesca se tiščijo drugo drugega. Pravimo, da je **snov** v telesu **zvezno porazdeljena**.

Najprej si oglejmo, kako se opiše porazdelitev snovi v telesu.

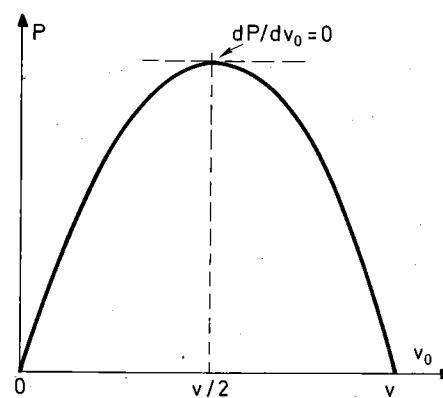
Celotno prostornino ( $V$ ) telesa razdelimo na majhne prostorninske elemente  $dV$ ; vsota oziroma integral vseh teh je volumen telesa:

$$V = \int dV$$

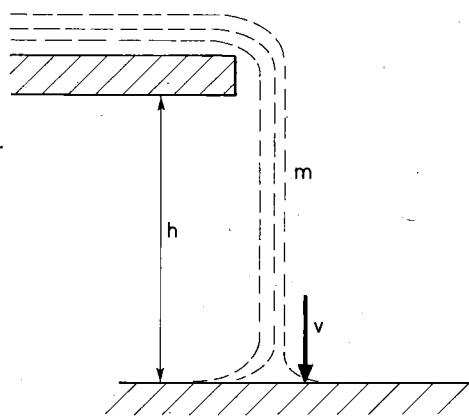
Oblika posameznih prostorninskih elementov  $dV$  je odvisna od vrste oziroma oblike telesa. V splošnem



Slika 3.15



Slika 3.16



Slika 3.17

izberemo  $dV$  v obliki kockice s stranicami  $dx$ ,  $dy$  in  $dz$ , tako da je  $dV = dx dy dz$ . V posebnih primerih, če simetrija telesa dopušča, pa lahko kot  $dV$  vzamemo npr. tanko kroglasto lupino (če je telo kroglaste oblike), pri čemer je  $dV = 4\pi r^2 dr$  (telo razdelimo na tanke koncentrične kroglaste lupine, ena od njih ima polmer  $r$  in debelino  $dr$ ) ali tanko valjasto plast (osno simetrično telo razdelimo na tanke koaksialne valjaste lupine, ena od njih ima višino  $h$ , polmer  $r$  in debelino  $dr$ ):  $dV = 2\pi r h dr$ . Vsakič izberemo prostorninski element  $dV$  takšne oblike, da je izračun prostornine telesa enostaven.

#### Primera:

**1. Prostornina krogla.** Kroglo s polmerom  $R$  v mislih olupimo na tanke koncentrične kroglaste lupine. Ena od njih ima polmer  $r$  in debelino  $dr$ , njena prostornina je  $dV = 4\pi r^2 dr$ . Celotno kroglo objamemo, če gre  $r$  od 0 do  $R$ :

$$V = \int dV = \int_0^R 4\pi r^2 dr = 4\pi R^3 / 3$$

Za vajo poišči izraz za prostornino votle krogla. Zunanji polmer je  $R_2$  notranji pa  $R_1$ .

**2. Volumen piramidastih teles.** Dani sta osnovna ploskev  $S$  in višina  $h$ . Stranice, ki povezujejo osnovno ploskev z vrhom telesa, so ravne. Pri stožcu je  $S = \pi R^2$  ( $R$  je polmer stožca), pri pravilni kvadratni piramidi je  $S = a^2$  (a je stranica) itd. Telo je ali pokončno (višina  $h$  je pravokotna na osnovno ploskev  $S$ ) ali poševno. Dokaži, da je volumen takšnih teles vedno dan z enačbo:  $V = Sh/3$ .

Na sliki (3.19) je stranski presek piramidastega telesa. Slika a predstavlja pokončno telo: vodoravne plasti so naložene ena nad drugo, da se njihova središča pokrivajo. Če vsako naslednjo višjo plast nekoliko premaknemo v desno (slika b), dobimo poševno telo. Jasno je, da se ob takšnih premikih volumen telesa ne spremeni, torej ima poševna piramida enako prostornino kot pokončna (pri enaki osnovni ploskvi in višini).

Tanka plast na globini  $z$  pod vrhom piramide ima debelino  $dz$  in ploskev  $S(z)$ . Zadnja je premo sorazmerna s kvadratom premera oziroma stranice plasti, ta pa je premo sorazmerna s koordinato  $z$  (ker je stranski rob telesa raven), zato velja:  $S(z) = (z/h)^2 S$  ter  $dV = S(z)dz = (S/h^2)z^2 dz$ . Prostornina celotnega telesa je:

$$V = \int dV = (S/h^2) \int_0^h z^2 dz = (S/h^2)h^3/3 = Sh/3$$

kar smo morali dokazati. Rezultat je neodvisen od oblike osnovne ploskve  $S$ ; velja tako za stožec kot za različne piramide.

Maso snovi v prostorninskem elementu  $dV$  označimo z  $dm$ . Kvocient mase in prostornine (to je masa v enoti prostornine snovi) se imenuje **gostota snovi** ( $\rho$ ):

$$\boxed{\rho = dm/dV} \quad (\text{merska enota: } \text{kg/m}^3 \text{ ali } \text{g/cm}^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3) \quad (3.12)$$

Maso  $m$  celotne snovi izrazimo z:  
 $m = \int dm = \int \rho dV$

**V homogeni snovi** se gostota ne spreminja s krajem;  $\rho$  je enak za vsak  $dV$ , zato lahko pišemo:

$$m = \rho \int dV = \rho V \text{ ali } \rho = m/V$$

**Gostota homogene snovi je kvocient mase in prostornine** celotne snovi. V tabeli na koncu knjige so podatki za gostoto nekaterih pomembnih snovi. Kovine so najgostejše snovi, njihova gostota je do okrog  $20 \text{ g/cm}^3$ . Kapljevine imajo  $\rho$  okrog  $1 \text{ g/cm}^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3$ , plini pa so približno tisočkrat redkejši – okrog  $1-5 \text{ kg/m}^3$ .

Nekatere trdne snovi so porozne, vsebujejo mnogo zračnih mehurčkov ali votlinic, ki so včasih med seboj povezane z drobnimi cevčicami. Za takšne snovi navedemo **povprečno gostoto** ( $\bar{\rho}$ ), ta je manjša od gostote  $\rho$  same snovi. Recimo, da v celotni prostornini  $V$  porozne snovi zavzema zrak prostornino  $V_z$ . V okviru nekajodstotne nenatančnosti, s kakršno običajno delamo v praksi, lahko zanemarimo maso zraka v porozni snovi v primerjavi z maso same snovi in zapišemo:

$$\begin{aligned} m &= \rho(V - V_z) + \rho_z V_z \approx \rho(V - V_z) = \bar{\rho}V \text{ ali} \\ \bar{\rho} &= \rho(V - V_z)/V = \rho(1 - V_z/V) \end{aligned} \quad (3.13)$$

#### Primer:

Povprečna gostota poroznega kosa železa je  $\bar{\rho} = 7,0 \text{ g/cm}^3$ . Koliko odstotkov prostornine takšnega poroznega železa zavzema zrak? Gostota polnega železa je  $\rho = 7,8 \text{ g/cm}^3$ .

$$V_z/V = 1 - \bar{\rho}/\rho = 1 - 7,0/7,8 = 0,10 = 10\%$$

Nekatera telesa so sestavljena iz različnih snovi (npr. litine). Sestava takšnih zmesi povemo ali z **volumenskimi odstotki** (koliko odstotkov celotne prostornine zavzema posamezna snov v telesu) ali z **utežnimi oziroma masnimi odstotki** (koliko odstotkov celotne mase telesa odpade na posamezno snov).

V prvem primeru je povprečna gostota telesa dana z enačbo:

$$\bar{\rho} = p_1 \rho_1 + p_2 \rho_2 + \dots \quad (3.14a)$$

kjer je  $p_1$  odstotek celotne prostornine, ki odpade na snov z gostoto  $\rho_1$  itd. (gl. prejšnji primer).

Kadar je sestava telesa podana z utežnimi odstotki:  $m_1 = p_1 m$ ,  $m_2 = p_2 m$  itd., računamo povprečno gostoto takole:

$$1/\bar{\rho} = p_1/\rho_1 + p_2/\rho_2 + \dots \quad (3.14b)$$

Dokaz:  $V = V_1 + V_2 + \dots = m_1/\rho_1 + m_2/\rho_2 + \dots = m(p_1/\rho_1 + p_2/\rho_2 + \dots) = m/\bar{\rho}$

#### Primer:

Litina bron vsebuje 90% bakra in 10% cinka (odstotki se nanašajo na volumen). Gostota bakra je  $\rho_{Cu} = 8,9 \text{ g/cm}^3$ , cinka pa  $\rho_{Zn} = 7,2 \text{ g/cm}^3$ . Kolikšna je povprečna gostota brona?

$$\begin{aligned}\bar{\rho} &= \rho_1 \rho_1 + \rho_2 \rho_2 = 0,90 \cdot 8,9 \text{ g/cm}^3 + 0,10 \cdot 7,2 \text{ g/cm}^3 \\ \bar{\rho} &= 8,7 \text{ g/cm}^3\end{aligned}$$

Masno središče telesa računamo s podobno enačbo, kot velja za sistem točkastih teles (3.7), le da nadomeščimo diskretna točkasta telesca  $m_i$  z masnimi elementi  $dm$ , seštevanje pa z integriranjem:

$$\mathbf{r}_C = \left( \frac{1}{m} \right) \int \mathbf{r} dm \quad (3.15)$$

Kjer je  $\mathbf{r}$  krajevni vektor masnega elementa  $dm$  (slika 3.20). Komponente krajevnega vektorja  $\mathbf{r}_C$  vzdolž posameznih koordinatnih osi so:

$$x_C = \left( \frac{1}{m} \right) \int x dm \quad (3.15a)$$

$$y_C = \left( \frac{1}{m} \right) \int y dm \quad (3.15b)$$

$$z_C = \left( \frac{1}{m} \right) \int z dm \quad (3.15c)$$

Pri homogenih telesih lahko zapišemo:  $m = \rho V$ , poleg tega lahko  $\rho$  izpostavimo iz integrala, tako da se krajša, in dobimo:

$$x_C = \left( \frac{1}{V} \right) \int x dV \quad (3.16a)$$

$$y_C = \left( \frac{1}{V} \right) \int y dV \quad (3.16b)$$

$$z_C = \left( \frac{1}{V} \right) \int z dV \quad (3.16c)$$

Če je telo ploščat lik (narejeno iz enakomerno debele plošče), računamo le koordinati  $x_C$  in  $y_C$  masnega središča, tretja koordinata  $z_C$  je enaka  $h/2$  ( $h$  = debelina plošče). Pišemo:  $dV = hdS$  in  $V = hS$ , debelina plošče  $h$  se krajša in ostane integracija po površini lika:

$$x_C = \left( \frac{1}{S} \right) \int x dS \quad (3.17a)$$

$$y_C = \left( \frac{1}{S} \right) \int y dS \quad (\text{Slika 3.21}) \quad (3.17b)$$

### Primeri:

1. Izračunaj koordinate masnega središča pokončnega homogenega **piramidastega telesa** z višino  $h$ .

Piramidasto telo v mislih razrežemo na tanke vodoravne plasti (gl. slika 3.19). Masno središče pokončne piramide (ali stožca) je na simetrijski osi (višini), zato računamo le koordinato  $z_C$  ( $x_C = y_C = 0$ ). Koordinatno izhodišče je npr. na vrhu piramide, os  $z$  kaže navzdol. Velja:

$$z_C = \left( \frac{1}{V} \right) \int z dV$$

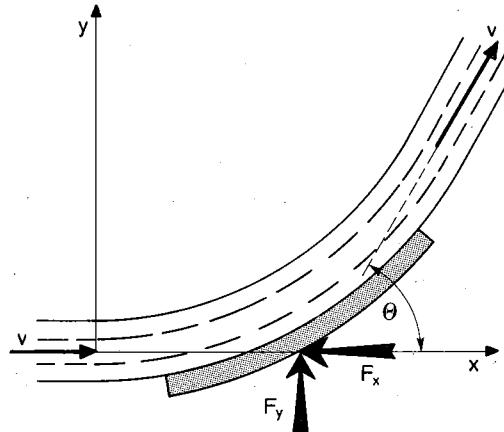
kjer je  $dV = S(z)dz = S(z/h)^2 dz$  in  $V = Sh/3$  (gl. 2. primer na strani 60). Sledi:

$$z_C = \left( \frac{3}{h^3} \right) \int_0^h z^3 dz = 3h/4$$

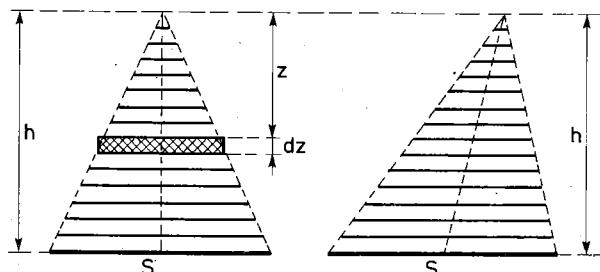
Masno središče pokončne piramide ali stožca je  $3/4$  višine pod vrhom oziroma  $h/4$  nad osnovno ploskvijo.

2. Poišči masno središče **polne polkrogla** s polmerom  $R$ .

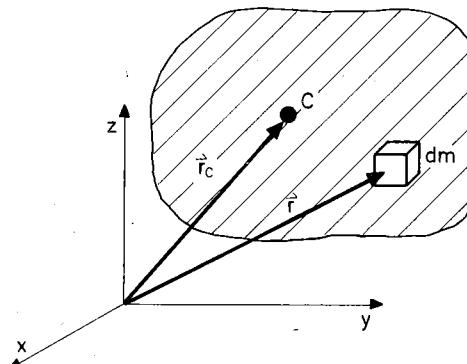
Polkroglo postavimo ploskoma na vodoravno ravnino  $x-y$ ; os  $z$  kaže navzgor v smeri simetrijske osi (slika



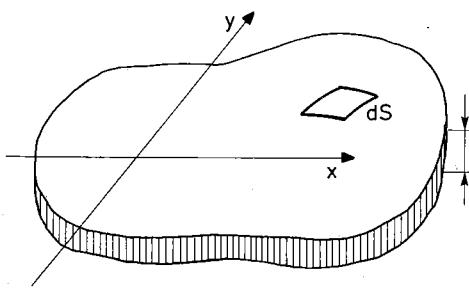
Slika 3.18



Slika 3.19



Slika 3.20



Slika 3.21

3.22). Polkroglo v mislih razrežemo na tanke vodoravne okrogle ploščice. Ploščica na višini  $z$  ima polmer  $r = \sqrt{R^2 - z^2}$  in debelino  $dz$ , njen volumen je  $dV = \pi r^2 dz = \pi(R^2 - z^2)dz$ .

$$x_C = y_C = 0$$

$$z_C = (1/V) \int z dV = (3/2\pi R^3) \int_0^R \pi z (R^2 - z^2) dz = 3R/8$$

3. Določi masno središče ploščatega telesa – četrtrine krožne ploščice (slika 3.23).

Ploščico razrežemo na tanke vzporedne trakove.

$$x_C = y_C = (1/S) \int y dS$$

$$dS = x dy, S = \pi R^2 / 4$$

$$x_C = (4/\pi R^2) \int_0^R xy dy$$

Ker je  $x^2 + y^2 = R^2$ , dobimo po odvajjanju  $x dx + y dy = 0$  ali  $y dy = -x dx$  ter

$$x_C = (4/\pi R^2) \int_0^R x^2 dx = 4R/3\pi$$

Polkrožna ploščica je sestavljena iz dveh četrtrinskih ploščic; njeno masno središče je zato na simetrijski osi, na oddaljenosti  $4R/3\pi$  od ravnega dela – premera.

Poisci masno središče krožne ploščice, iz katere je izrezan kvadrant.

4. Masno središče sestavljenih tel poiščemo tako, da najprej vsak del telesa zberemo v njegovem masnem središču kot točkasto telo in nato (z enačbo 3.7) izračunamo masno središče posameznih točkastih tel. Kot primer vzemimo pokončen valjast stolp s stožčasto streho (slika 3.24).

Valjasti del stolpa ima maso  $m_1 = \rho \pi R^2 h$ , njegovo masno središče je na višini  $z_1 = h/2$  nad tlemi. Stožčasta streha ima maso  $m_2 = \rho \pi R^2 v/3$ , njeno masno središče je na višini  $z_2 = h + v/4$  nad tlemi. Računamo masno središče dveh točkastih tel  $m_1$  in  $m_2$  (gl. 3.7c):

$$z_C = (z_1 m_1 + z_2 m_2) / (m_1 + m_2) =$$

$$= (6h^2 + 4hv + v^2) / (12h + 4v)$$

5. Masno središče telesa z votlinami. Telo z votlinami bi zahtevalo zamuden račun masnega središča. Temu se izognemo, če si mislimo, da imamo polno telo, na mestu votline pa telo z negativno maso. Kot primer izračunajmo masno središče pokončnega valja, iz katerega je izrezana polkrogla (slika 3.25).

Poln valj ima maso  $m_1 = \rho \pi R^2 h$  in masno središče na višini  $z_1 = h/2$ , negativna polkrogla ima masno središče na višini  $z_2 = 3R/8$  in negativno maso  $m_2 = -\rho \cdot 2\pi R^3/3$ . Masno središče obeh (to je masno središče valja z votlo polkroglo) je na višini:

$$z_C = (z_1 m_1 + z_2 m_2) / (m_1 + m_2) =$$

$$= (h^2/2 - R^2/4)/(h - 2R/3)$$

Seveda je  $z_C$  večji od  $h/2$ .

Za vajo tega računanja ponovno izračunaj masno središče polkrogla (2. primer), vendar tokrat tako, da vzameš polno kroglo in spodnjo polkroglo z negativno maso.

## Porazdelitev sil

Silo predstavimo z vektorjem; ta ima točkasto prijemašče. Vendar nobena sila v resnici ne »prijemlje« v točki. Medsebojno učinkovanje teles namreč poteka prek kakšne stične ploskve ali je celo razpredeno po širši prostornini. Če npr. z roko pritisnemo na mizo, je sila roke porazdeljena po skupni ploskvi roke in mize. Podobno je, če s kladivom udarimo po glavici žebbla. Sila v napeti vrvici je razporejena po prečnem prerezu vrvice. Torej nimamo opravka s točkastimi (diskretnimi) silami, ampak so **sile zvezno porazdeljene** ali po ploskvi ali po prostornini. Povedati moramo, kako so sile porazdeljene po dani ploskvi ali prostornini.

Recimo, da je sila  $\mathbf{F}$  razporejena po ploskvi  $S$  na površini telesa. V splošnem je razporejena neenakomerno, na enem delu ploskve je npr. več sile kot na drugem, pa tudi smer sile se vzdolž ploskve spreminja. Zato razdelimo celotno ploskev  $S$  na majhne ploskovne elemente  $dS$ ; vsak od njih je dovolj majhen, da je sila na njemu razporejena kolikor toliko enakomerno. Na ploskvico  $dS$  npr. odpade sila  $d\mathbf{F}$ . Celotna sila  $\mathbf{F}$  je rezultanta (vektorska vsota ozziroma integral) posameznih delnih sil  $d\mathbf{F}$ , deluječih na posameznih ploskovnih elementih  $dS$ :

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F}$$

Delna sila  $d\mathbf{F}$ , ki odpade na ploskvico  $dS$ , ima v splošnem poševno smer (slika 3.26). Razstavimo jo na komponento  $d\mathbf{F}_\perp$ , ki je pravokotna na ploskvico, in na komponento  $d\mathbf{F}_{\parallel}$  v ravnini ploskvice. Prva se imenuje **natezna sila** (če je usmerjena ven iz ploskvice) ozziroma **tlačna sila** (če kaže v plosklico – v notranjost telesa). Druga je **strižna sila**. Zgodi se, da je celotna sila  $d\mathbf{F}$  že pravokotna na ploskvico, da je torej natezna ali tlačna sila ( $d\mathbf{F}_{\parallel} = 0$  in  $d\mathbf{F}_\perp = d\mathbf{F}$ ). Ali pa  $d\mathbf{F}$  leži v ploskvi in učinkuje kot strižna sila ( $d\mathbf{F}_\perp = 0$  in  $d\mathbf{F}_{\parallel} = d\mathbf{F}$ ).

Zanima nas kvocient sil  $d\mathbf{F}$  in ploskvico  $dS$ , na kateri učinkuje:  $d\mathbf{F}/dS$ ; imenuje se ali **tlak p** ali **natezna napetost ( $\sigma$ )** ali **strižna napetost ( $\tau$ )**:

$\frac{d\mathbf{F}}{dS} =$	<b>tlak p</b> če je $d\mathbf{F}$ pravokoten na ploskvico in usmerjen vanjo  <b>natezna napetost</b> če je $d\mathbf{F}$ usmerjen pravokotno iz ploskvice  <b>strižna napetost</b> če $d\mathbf{F}$ leži v ploskvi
----------------------------	--

(3.18)

Merska enota tlaka ozziroma napetosti sile je količnik enote sile in enote površine, to je  $N/m^2$ ; imenuje se **pascal (Pa)**:

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

Ker je Pa zelo majhna enota, se večinoma uporabljajo večje enote:  $\text{kPa} = 10^3 \text{ N/m}^2$ ,  $\text{MPa} = 10^6 \text{ N/m}^2$  ter posebna enota:  $\text{bar} = 10^5 \text{ N/m}^2 = 100 \text{ kPa} = 1000 \text{ mbar}$  (milibar),  $\text{mbar} = 100 \text{ N/m}^2$ . Tu in tam se pojavlja še stará enota  $\text{kp/cm}^2$  (at = atmosfera) =  $9,8 \text{ N/cm}^2 = 98 000 \text{ N/m}^2 = 98 \text{ kPa} = 0,98 \text{ bar}$ .

Recimo, da je sila  $F$  tlačna sila, da je povsod pravokotna na ploskev. Če vemo, kako se tlak te sile:  $\mathbf{p} = d\mathbf{F}/dS$  spreminja po ploskvi, izračunamo celotno silo  $\mathbf{F}$  z integralom:

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F} = \int p d\mathbf{S}$$

**Primer:**

Parni curek pritiska pravokotno na valjast bat; tlak tlačne sile se spreminja v odvisnosti od radija  $r$  iz sredine bata po enačbi:  $p = p_0(1 - r^2/R^2)$ , kjer je  $p_0 = 2$  bar,  $R$  (polmer bata) = 5 cm. S kolikšno silo  $F$  curek odriva bat?

Ker so sile  $d\mathbf{F}$  na posameznih ploskovnih elementih  $d\mathbf{S}$  bata vzporedne, lahko vektorski znak opustimo in sile skalarno seštejemo:

$$F = \int dF = \int pdS$$

Ploskvice  $dS$  izberemo v obliki koncentričnih kolobarjev:  $dS = 2\pi r dr$ .

$$F = 2\pi p_0 \int_0^R (1 - r^2/R^2) r dr = \pi R^2 p_0 / 4 = 390 \text{ N}$$

Nekatere sile učinkujejo ne le na površju, ampak tudi na vsak delček v notranjosti telesa. Povedati moramo, kako je takšna sila razporejena po prostornini telesa.

Celotno prostornino  $V$  telesa razdelimo na prostorninske elemente  $dV$ . Silo, ki odpade na en tak element  $dV$ , označimo z  $d\mathbf{F}$ . Kvocient sile  $d\mathbf{F}$  in prostorninskega elementa  $dV$ , v katerem učinkuje, se imenuje **gostota sile** ( $f$ ):

$$f = dF/dV \quad (\text{merska enota: N/m}^3) \quad (3.19)$$

Z gostoto sile povemo, koliko sile odpade na enoto prostornine telesa. Če vemo, kako se gostota sile  $f$  spreminja s krajem po notranjosti telesa, dobimo ustrezno silo  $\mathbf{F}$ , ki učinkuje na celotno telo, z integralom:

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F} = \int f dV$$

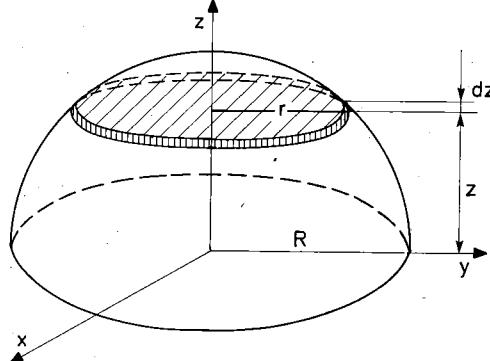
Sila te vrste je npr. **teža telesa** ( $\mathbf{F} = mg$ ). **Gostota teže** se imenuje **specifična teža**, to je teža na enoto prostornine telesa (običajno jo označimo z grško črko  $\gamma$ ):

$$\gamma = dF/dV = d(mg)/dV = g \cdot dm/dV = \rho g \quad (3.20)$$

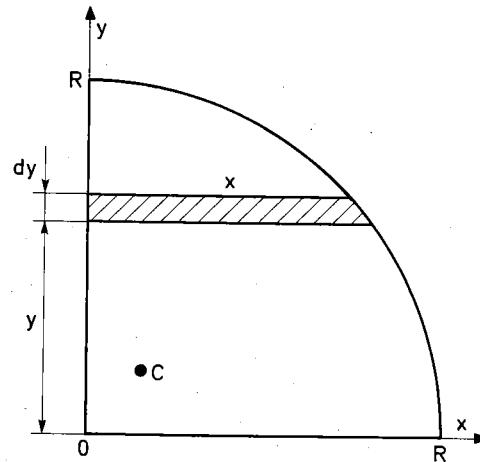
Vidimo, da je specifična teža premo sorazmerna z gostoto snovi; sorazmernostni faktor med njima je težni pospešek  $g$ . Včasih so specifično težo izražali z mersko enoto  $\text{kp}/\text{m}^3$ . To je bilo udobno, kajti kolikor  $\text{kg}/\text{m}^3$  znaša gostota snovi, toliko  $\text{kp}/\text{m}^3$  je njena specifična teža. Voda ima npr. gostoto  $1 \text{ kg}/\text{dm}^3$ , njena specifična teža je  $1 \text{ kp}/\text{dm}^3$ . Ta enota je po novem prepovedana in moramo specifično težo navajati v merskih enotah  $\text{N}/\text{m}^3$  (voda ima specifično težo  $9,8 \text{ N}/\text{dm}^3$ ).

**Gibanje točkastih teles**

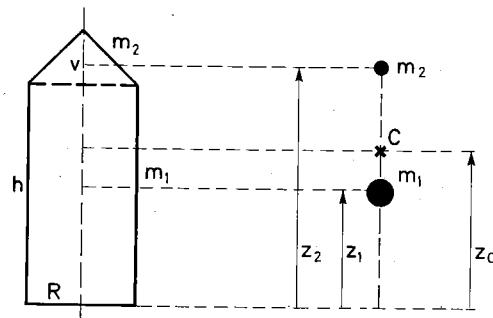
Sistem  $N$  točkastih teles se v splošnem giblje tako, da se vsako telesce giblje po svoje. Kako se tak sistem giblje, ugotovimo, če rešimo  $N$  vektorskih enačb (3.1).



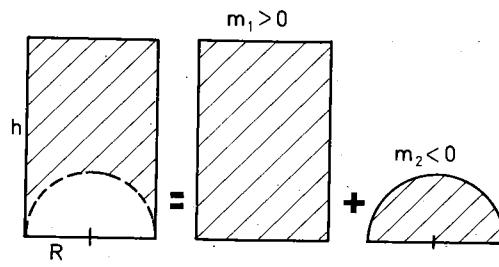
Slika 3.22



Slika 3.23



Slika 3.24



Slika 3.25

Ker vsaka vektorska enačba pravzaprav pomeni 3 enačbe za 3 projekcije krajevnega vektorja točkastega telesa, moramo v splošnem rešiti  $3N$  enačb. Trenutno leto sistema v prostoru podamo s  $3N$  koordinatami posameznih teles sistema (3 koordinate za vsako teleso). Zato pravimo, da ima sistem  $N$  točkastih teles  **$3N$  prostostnih stopenj**. To število je navadno zelo veliko, saj je sistem sestavljen iz veliko točkastih teles.

Pri tem telesu so razmere enostavnejše. Zaradi močnih notranjih sil se posamezni deli togega telesa ne morejo premikati relativno drug glede na drugega, oblika in velikost telesa se zato med gibanjem ne spreminja. Togo telo se giblje kot celota.

Koliko prostostnih stopenj ima togo telo?

Najprej si mislimo, da je telo sestavljeno iz enega samega točkastega telesa. To se lahko giblje v vse smeri v prostoru, njegova trenutna lega v prostoru je podana s tremi koordinatami ( $x, y, z$ ), zato ima 3 prostostne stopnje. Nadalje si mislimo, da telo sestavlja dve točkasti telesci, razmaknjeni za stalno razdaljo. Če vzamemo, da se eno od njih poljubno giblje skozi prostor (čemur ustrezajo 3 prostostne stopnje), se drugo lahko giblje le po dani kroglasti ploskvi okrog prvega. Ploskovnemu gibanju drugega telesa pa ustrezata dve prostostni stopnji, kar dà skupaj 5 prostostnih stopenj za takšno telo. Na koncu vzemimo togo telo, sestavljeno iz treh točkastih teles (med seboj togo povezanih). Za prvi dve smo že ugotovili, da se lahko giblja s 5 prostostnimi stopnjami. Tretje telesce pa lahko edinole kroži okrog osi skozi prve dve, s čimer je povezana ena sama prostostna stopnja – skupno torej 6 prostostnih stopenj.

Tri točkasta telesa (če ne leže na isti premici) povsem določajo gibanje celotnega togega telesa, ne glede na to, iz koliko teles je sestavljeno. Torej ima **togo telo** v splošnem **6 prostostnih stopenj**. Tri od njih izkoristimo za gibanje masnega središča telesa, z ostalimi tremi pa opisemo vrtenje telesa okrog treh, med seboj pravokotnih osi, ki se sekajo v masnem središču.

Gibanje masnega središča že poznamo. Njegov pospešek določajo zunanje sile, ki učinkujejo na telo; odvisen pa je še od celotne mase telesa:

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{F}/m$$

Preostane, da ugotovimo, kako se telo vrti okrog osi skozi masno središče.

### Vrtenje togega telesa okrog stalne osi

Telo je vpeto na vrtilno os, okrog katere se lahko vrti. Večinoma je vrteče se telo osno simetrično in je simeetrijska os vrtilna os, vendar to ni nujno. Vrtilna os je leži fiksirana v prostoru, tako da se med vrtenjem telesa ne spreminja (slika 3.27).

Telo v mislih razdelimo na masne elemente  $dm$ . Ti med vrtenjem telesa krožijo v ravninah, pravokotno na vrtilno os. Masni element  $dm$  na oddaljenosti  $r$  od osi se npr. giblje po krogu s polmerom  $r$  z obodno hitrostjo  $v = r\omega$ , pri čemer je  $\omega$  kotna hitrost vrtenja telesa. Ker je telo togo, kroži vsak masni element z enako kotno hitrostjo; njihova obodna hitrost pa je premo sorazmerna z oddaljenostjo  $r$  od vrtilne osi.

Poglejmo, kako zunanje sile vplivajo na vrtenje togega telesa.

Na masni element  $dm$  deluje zunanja sila  $d\mathbf{F}$  in notranja sila  $d\mathbf{F}_n$ . Sila ne spreminja kotne hitrosti vrtenja telesa, če je vzporedna z vrtilno osjo; najmočneje pa jo spreminja, če leži v ravnini, ki je pravokotna na vrtilno os. Recimo, da  $d\mathbf{F}$  in  $d\mathbf{F}_n$  že ležita v tej ravnini. Na sliki (3.28) je prerez telesa pravokotno na os; ta je pravokotna na ravnino lista. Označena je le zunanja sila  $d\mathbf{F}$ . Masni element  $dm$  kroži v ravnini lista neenakomerno, ker sili  $d\mathbf{F}$  in  $d\mathbf{F}_n$  s svojima tangentnima komponentama  $d\mathbf{F}'$  in  $d\mathbf{F}'_n$  povzročata tangentni pospešek  $a_t$ . Tega izračunamo z Newtonovim zakonom dinamike (2.1). Ker poznamo smeri vektorjev, napišemo enačbo dinamike v skalarni obliki:

$$d\mathbf{F}' + d\mathbf{F}'_n = dm \cdot a_t = dm \cdot r\alpha = d\mathbf{F} \sin \delta + d\mathbf{F}_n \sin \delta_n$$

pri čemer je kotni pospešek  $\alpha = a/r$  (gl. 1.49),  $\delta$  oz.  $\delta_n$  pa kota med smerjo vektorja  $r$  in sile  $d\mathbf{F}$  oz.  $d\mathbf{F}_n$ . Velja:  $\sin \delta = r'/r$  oz.  $\sin \delta_n = r'_n/r$  (gl. slika 3.28), kjer je  $r'$  (oz.  $r'_n$ ) **ročica sile  $d\mathbf{F}$**  (oz.  $d\mathbf{F}_n$ ), to je **pravokotna oddaljenost vrtišča od smeri sile** (merjeno v ravnini, pravokotno na vrtilno os). Dobimo:

$$r'd\mathbf{F} + r'_n d\mathbf{F}_n = \alpha \cdot r^2 dm \quad (3.21)$$

Na lev strani enačbe je **navor sile  $d\mathbf{F}$**  (oz.  $d\mathbf{F}_n$ ), ki ga označimo z  $dM$ :

$$dM = r'd\mathbf{F} = rd\mathbf{F} \sin \delta$$

to je **produkt sile in njene ročice**. V vektorski obliki ga napišemo kot:

$$d\mathbf{M} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} \quad (d\mathbf{M}_n = \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_n) \quad (3.22)$$

Njegova smer je pravokotna tako na radij  $r$  kot na silo  $d\mathbf{F}$ . V našem primeru sta vektorja  $r$  in  $d\mathbf{F}$  v ravnini, pravokotno na vrtilno os, torej ima navor  $d\mathbf{M}$  (oz.  $d\mathbf{M}_n$ ) smer vrtilne osi. V tej smeri tudi kaže vektor kotnega pospeška  $\alpha$  (gl. str. 23).

Izraz  $r^2 dm$  na desni strani enačbe (3.21) je **vztrajnostni moment**  $dJ$  masnega elementa  $dm$ :

$$dJ = r^2 dm \quad (3.23)$$

(to je produkt mase in kvadrata pravokotne oddaljenosti od vrtilne osi).

Enačbo dinamike za vrtenje masnega elementa okrog stalne osi potem takem napišeno v obliki:

$$d\mathbf{M} + d\mathbf{M}_n = \alpha dJ$$

Podobno enačbo napišemo za vsak masni element telesa. Dobljene enačbe seštejemo oz. integriramo. Ker notranje sile vedno nastopajo v parih nasprotno enakih sil, se navori vseh notranjih sil medsebojno izničijo:

$$\int d\mathbf{M}_n = \int \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_n = 0 \quad (3.24)$$

in ostanejo le navori vseh zunanjih sil, ki edino lahko pospešujejo vrtenje togega telesa:

$$\int d\mathbf{M} = \int \alpha dJ \quad (3.25)$$

Integral na levi strani je rezultanta  $\mathbf{M}$  navorov vseh zunanjih sil, ki učinkujejo na telo:

$$\mathbf{M} = \int d\mathbf{M}$$

Vsek delček togega telesa se vrati okrog osi z enako kotno hitrostjo in z enakim kotnim pospeškom, zato lahko  $\alpha$  v enačbi (3.25) izpostavimo iz integrala. Preostali integral  $\int dJ$  je vztrajnostni moment  $J$  celotnega telesa:

$$J = \int r^2 dm$$

**vztrajnostni moment  
toga telesa  
glede na izbrano os**

Enačbo dinamike za vrtenje telesa okrog stalne osi lahko za togo telo napišemo v obliki:

$$\mathbf{M} = J\boldsymbol{\alpha}$$

(3.27)

Vektorja  $\mathbf{M}$  in  $\boldsymbol{\alpha}$  imata smer rotacijske osi. Če zunanje sile, ki učinkujejo na posamezne dele telesa, niso v ravneh, pravokotno na vrtilno os, če torej navori teh sil niso v smeri vrtilnih osi, upoštevamo le projekcije navorov na smer vrtilne osi.

**Telo se vrati tem bolj pospešeno** (s tem večjim kotnim pospeškom), **čim večja je rezultanta navorov vseh zunanjih sil**, ki učinkujejo na telo, ter **čim manjši je vztrajnostni moment telesa**.

## Vztrajnostni moment telesa

Velik vztrajnostni moment pomeni, da dobi telo pri danem navoru zunanjih sil majhen kotni pospešek, da se kotna hitrost počasi spreminja. Torej je vztrajnostni moment  $J$  telesa merilo za vztrajnost telesa proti spremembji kotne hitrosti vrtenja. Kákršno vlogo ima masa pri premem gibanju, ima vztrajnostni moment pri vrtenju.

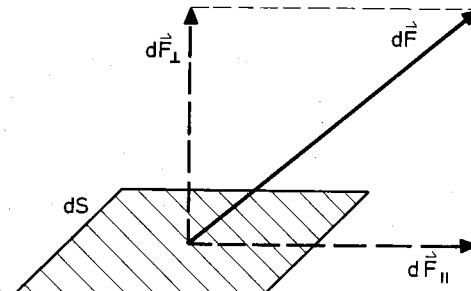
Vztrajnostni moment  $J$  je odvisen od mase snovi in od njene razporeditve glede na vrtilno os. Če želimo velik vztrajnostni moment, mora biti telo masivno in snov mora biti čim bolj oddaljena od vrtilne osi.

Vztrajnostni moment toga telesa računamo z enačbo:

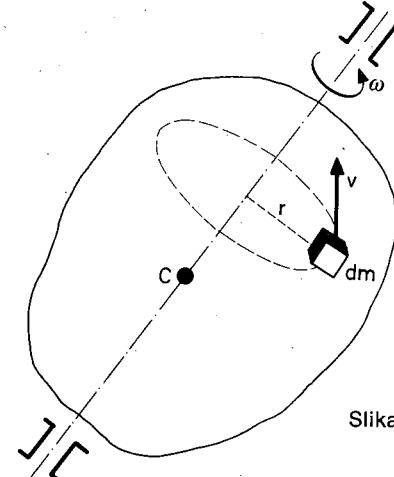
$$J = \int r^2 dm \quad (\text{merska enota: } \text{kgm}^2)$$

kjer je  $r$  pravokotna oddaljenost elementa  $dm$  od vrtilne osi. Če se spremeni vrtilna os, se pri istem telesu spremeni tudi vztrajnostni moment (ker se spremeni razporeditev snovi glede na os). Zato moramo vedno vedeti, na katero vrtilno os se nek vztrajnostni moment nanaša.

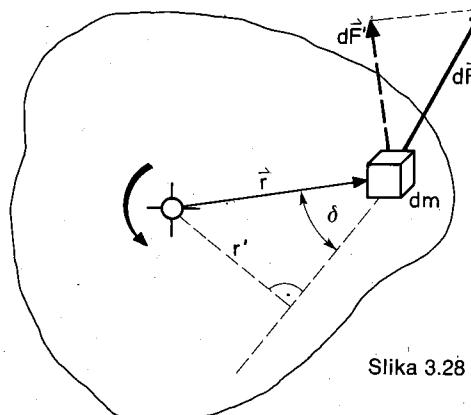
Računajoč vztrajnostni moment telesa, razdelimo telo (v mislih, seveda) na tanke, koaksialne valjaste plasti, tako da je vsak delček posamezne plasti približno enako ( $r$ ) oddaljen od osi. Vztrajnostni moment ene takšne plasti je  $dJ = r^2 dm = r^2 \rho dV$ , kjer je  $dV$  volumen plasti.



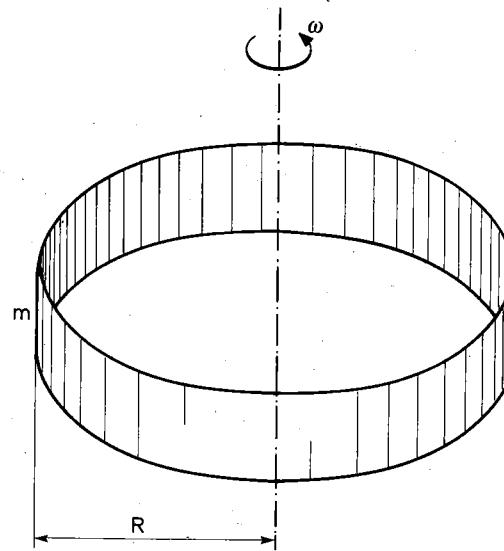
Slika 3.26



Slika 3.27



Slika 3.28



Slika 3.29

**Primeri:**

**1.** Izračunaj vztrajnostni moment obroča z maso  $m$  in polmerom  $R$  glede na simetrijsko os obroča (slika 3.29).

Vsa snov tankega obroča je za  $R$  oddaljena od osi ( $r = R$ ), zato dobimo:

$$J = \int r^2 dm = R^2 \int dm = mR^2$$

Višina obroča ni pomembna (skrita je v masi  $m$ ); obroč je lahko ozek ali pa je širok valjast plič.

**2. Tenká palica** z maso  $m$  in dolžino  $b$  je pravokotna na vrtilno os (slika 3.30). V mislih jo razrežemo na tanke prečne rezine. Ena takšna rezina z maso  $dm = \rho dV = \rho S dx$  ( $S$  je presek palice) na oddaljenosti  $x$  od središča palice ima vztrajnostni moment  $dJ = x^2 dm = \rho S x^2 dx$ . Vztrajnostni moment celotne palice je:

$$J = \int dJ = \rho S \int_{-b/2}^{+b/2} x^2 dx = \rho S \cdot b^3 / 12 = mb^2 / 12 \quad (3.28)$$

**3. Pol valj** z maso  $m$  in polmerom  $R$ . Valj olupimo na tanke koaksialne valjaste plasti (slika 3.31). Plast s polmerom  $r$ , debelino  $dr$  in višino  $h$  ima vztrajnostni moment:

$$dJ = r^2 dm = r^2 \rho dV = r^2 \rho \cdot 2\pi rh dr = 2\pi \rho h r^3 dr$$

$$J = \int dJ = 2\pi \rho h \int_0^R r^3 dr = \rho \pi h R^4 / 2$$

Vpeljemo še maso valja  $m = \rho V = \rho \pi R^2 h$  in dobimo končni rezultat:

$$J = mR^2 / 2 \quad (3.29)$$

**4. Tanka kroglasta lupina** (masa  $m$ , polmer  $R$ , debelina  $h$ ). Lupino razdelimo na tanke kolobarjaste trakove, katerih središča so na osi (slika 3.32). En tak kolobar ima polmer  $r = R \sin \theta$ , širino  $R d\theta$  in maso  $dm = \rho dV = \rho \cdot 2\pi r h R d\theta$ ; njegov vztrajnostni moment je:  $dJ = r^2 dm = 2\pi \rho h R^4 \sin^3 \theta d\theta$ .

$$J = \int dJ = 2\pi \rho h R^4 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 2\pi \rho h R^4 \cdot 4/3$$

$$J = 2mR^2 / 3 \quad (m = 4\pi R^2 h \rho)$$

**5. Polna krogla** z maso  $m$  in polmerom  $R$ . Lahko si mislimo, da je krogla sestavljena iz tankih koncentričnih kroglastih plasti. Ena takšna plast s polmerom  $r$  in debelino  $dr$  ima vztrajnostni moment (glej 3.30 za  $R \rightarrow r$ ,  $h \rightarrow dr$  in  $m \rightarrow dm$ ):

$$dJ = (2/3)r^2 dm = (2/3)r^2 \rho \cdot 4\pi r^2 dr = (8\pi \rho / 3)r^4 dr$$

$$J = \int dJ = (8\pi \rho / 3) \int_0^R r^4 dr = 8\pi \rho R^5 / 15$$

Ker je  $m$  (masa celotne krogle) =  $\rho \cdot 4\pi R^3 / 3$ , dobimo končni rezultat:

$$J = 2mR^2 / 5 \quad (3.31)$$

Enak rezultat dobimo tudi drugače, če si kroglo mislimo olupljeno na koaksialne valjaste plasti (podobno kot pri 3. primeru). Plast s polmerom  $r$ ,

debelino  $dr$  in višino  $h = \sqrt{R^2 - r^2}$  imama maso  $dm = \rho dV = \rho \cdot 2\pi r \cdot 2h dr$  in vztrajnostni moment  $dJ = r^2 dm = 4\pi \rho r^3 \sqrt{R^2 - r^2} dr$ .

$$J = \int dJ = 4\pi \rho \int_0^R r^3 \sqrt{R^2 - r^2} dr$$

$$= 4\pi \rho \cdot 2R^5 / 15 = 2mR^2 / 5$$

Izračun vztrajnostnega momenta je kolikor toliko preprost le, če ima telo simetrijske lastnosti, npr. če je osno simetrično. V splošnem pa se zaplete in je bolje vztrajnostni moment izmeriti, npr. tako da izmerimo kotni pospešek  $\alpha$ , s katerim se telo vrvi pri znanem navoru zunanjih sil:  $J = I\alpha$ .

**Vztrajnostni radij**

Vztrajnostni moment  $J$  poljubnega telesa želimo napisati v enostavni obliki, kot velja za tanek obroč:

$$J = mk^2 \quad (3.32)$$

kjer je  $m$  masa telesa, parameter  $k$  pa se imenuje **vztrajnostni radij**; to je tista oddaljenost od vrtilne osi, na kateri moramo zbrati vso snov telesa, da dobimo enak vztrajnostni moment  $J$ , kot ga telo dejansko ima. Vztrajnostni radij obroča je kar enak njegovemu polmeru ( $k = R$ ), za valj velja (gl. 3.29):  $k = R/\sqrt{2}$ , za kroglo (gl. 3.31) pa  $k = 0,63R$  itd.

**Vztrajnostni elipsoid – glavne osi telesa**

Z računom ali pa z meritvijo določimo vztrajnostni moment telesa glede na poljubno usmerjeno vrtilno os. Odvisnost vztrajnostnega momenta od smeri vrtilne osi navadno prikažemo tako, da v prostorskem koordinatnem sistemu narišemo v smeri vrtilne osi vektor, katerega dolžina je enaka obratni vrednosti korena vztrajnostnega momenta za os v tej smeri (to je  $1/\sqrt{J}$ ). Pokazali bomo, da konice teh vektorjev leže na ploskvi elipsoida, ki mu pravimo vztrajnostni elipsoid.

Smer izbrane vrtilne osi predstavimo z enotnim vektorjem  $\Omega = \cos\alpha \mathbf{e}_x + \cos\beta \mathbf{e}_y + \cos\gamma \mathbf{e}_z$  (gl. str. 7), kjer so koti  $\alpha$ ,  $\beta$  in  $\gamma$  naklonski koti vrtilne osi na koordinatne osi  $x$ ,  $y$  in  $z$  (slika 3.33). Koordinatno izhodišče je v masnem središču telesa.

Vztrajnostni moment telesa  $J$  glede na izbrano vrtilno os je dan z enačbo (3.26):

$$J = \int r^2 dm$$

kjer je  $dm$  masni element na konici krajevnega vektorja  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ ,  $r$  pa njegova oddaljenost od vrtilne osi. S slike (3.33) razberemo tele povezave:

$$r^2 = \rho^2 \sin^2 \theta = \rho^2 - \rho^2 \cos^2 \theta = \rho^2 - (\rho \cdot \Omega)^2 = \rho^2 - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2$$

Ker je  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$  in  $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , lahko zapišemo naprej:

$$r^2 = (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (z^2 + x^2) \cos^2 \beta + (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma - 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2zx \cos \gamma \cos \alpha$$

Dobljeni izraz za  $r^2$  vstavimo v enačbo (3.26) in dobimo izraz za vztrajnostni moment telesa glede na vrtilno os v smeri  $\Omega$ :

$$J = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{zx} \cos \gamma \cos \alpha \quad (3.33)$$

kjer so  $J_x$ ,  $J_y$  in  $J_z$  vztrajnostni momenti telesa na posamezne koordinatne osi:

$$\begin{aligned} J_x &= \int (y^2 + z^2) dm, \quad J_y = \int (z^2 + x^2) dm \\ J_z &= \int (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \quad (3.34)$$

$J_{xy}$ ,  $J_{yz}$  in  $J_{zx}$  pa t. i. **centrifugalni vztrajnostni momenti**:

$$J_{xy} = \int xy dm, \quad J_{yz} = \int yz dm, \quad J_{zx} = \int zx dm \quad (3.35)$$

V smeri enotnega vektorja  $\Omega$  narišemo vektor z dolžino  $1/\sqrt{J}$ ; njegove projekcije na posamezne koordinatne osi označimo z  $X$ ,  $Y$  in  $Z$ . Velja:

$$\cos \alpha = X\sqrt{J}, \quad \cos \beta = Y\sqrt{J}, \quad \cos \gamma = Z\sqrt{J}$$

Tako se enačba (3.33) prelevi v enačbo **vztrajnostnega elipsoida**:

$$J_x X^2 + J_y Y^2 + J_z Z^2 - 2J_{xy}XY - 2J_{yz}YZ - 2J_{zx}ZX = 1 \quad (3.36)$$

kar smo morali dokazati.

Vsek elipsoid ima vsaj tri, med seboj pravokotne glavne osi; v našem primeru se imenujejo **glavne vztrajnostne osi telesa**. Najdaljsa glavna os vztrajnostnega elipsoida določa smer vrtilne osi, glede na katero ima telo najmanjši vztrajnostni moment (in obratno).

Koordinatni sistem  $x - y - z$  zasukajmo tako, da se koordinatne osi ujemajo z glavnimi osmi vztrajnostnega elipsoida. Izkaže se, da se pri tem zasuku izničijo vsi centrifugalni vztrajnostni momenti ( $J_{xy}$ ,  $J_{yz}$  in  $J_{zx}$ ), tako da se enačba (3.36) vztrajnostnega elipsoida poenostavi v enačbo:

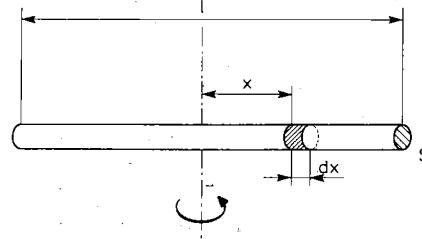
$$J_1 X^2 + J_2 Y^2 + J_3 Z^2 = 1 \quad (3.37)$$

pri čemer smo označili vztrajnostne momente telesa glede na glavne vztrajnostne osi z  $J_1$ ,  $J_2$  in  $J_3$ ; to so **glavni vztrajnostni momenti telesa**. V splošnem so različni; le če ima telo simetrijske lastnosti, so nekateri lahko enaki. Za homogeno kroglo npr. velja:  $J_1 = J_2 = J_3$ , za osnosimetrična telesa pa  $J_1 = J_2 \neq J_3$  (če je os z simetrijsko osjo).

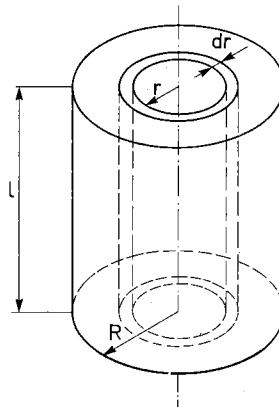
## Steinerjev stavek

Vztrajnostni moment telesa glede na os skozi težišče poznamo. Kadar potrebujemo vztrajnostni moment glede na drugo os, ki je vzporedna osi skozi težišče, uporabimo Steinerjev stavek. Na sliki (3.34) je prerez telesa skozi ravnino, pravokotno na vrtilno os  $O$  (ta je lahko tudi izven telesa). Težišče  $C$  telesa je za  $a$  oddaljeno od osi  $O$ .

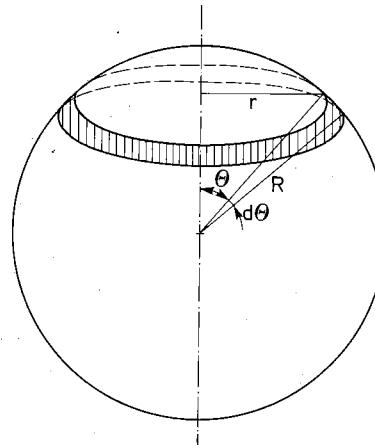
Vztrajnostni moment telesa glede na os  $O$  je po definiciji dan z enačbo:



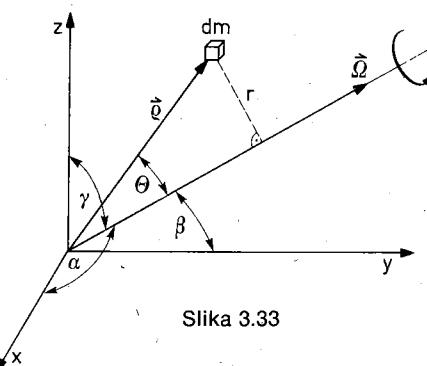
Slika 3.30



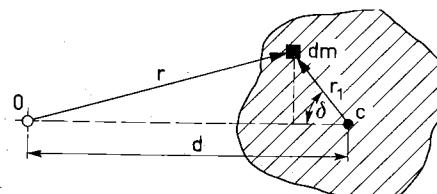
Slika 3.31



Slika 3.32



Slika 3.33



Slika 3.34

$$J = \int r^2 dm$$

kjer je  $r$  pravokotna oddaljenost masnega elementa  $dm$  od osi  $O$ .  $J$  želimo povezati z vztrajnostnim momentom telesa glede na vzporedno težiščno os ( $J_c$ ). V ta namen uporabimo kosinusni stavek:

$$r^2 = a^2 + r_1^2 - 2ar_1\cos\delta \quad (\text{gl. sliko 3.34})$$

Tu je  $r_1$  oddaljenost masnega elementa  $dm$  od težiščne osi. Sledi:

$$J = \int (a^2 + r_1^2 - 2ar_1\cos\delta) dm = a^2 m + \int r_1^2 dm - 2a \int r_1 \cos\delta dm$$

Drugi člen na desni strani zgornje enačbe je vztrajnostni moment  $J_c$  telesa glede na težiščno os:

$$J_c = \int r_1^2 dm$$

V zadnjem členu nastopa  $x$  – ta koordinata masnega elementa  $dm$ , ki jo merimo iz koordinatnega izhodišča v težišču  $C$ ;  $x = r_1 \cos\delta$ , zato ga lahko izrazimo s koordinato  $x_C$  težišča:

$$\int r_1 \cos\delta dm = \int x dm = x_C m = 0 \quad (\text{gl. 3.15a})$$

(Ker smo postavili koordinatno izhodišče v težišče telesa, je  $x_C = 0$ ). Končni rezultat je:

$$J = J_c + a^2 m \quad \text{Steinerjev stavek} \quad (3.38)$$

**Vztrajnostni moment telesa glede na poljubno os je vsota vztrajnostnega momenta glede na vzporedno težiščno os in vztrajnostnega momenta  $a^2 m$**  (kot če bi bila snov zbrana v težišču), kjer je  $a$  oddaljenost obeh vzporednih osi.

### Primeri:

1. Poišči vztrajnostni moment tanke, homogene palice (dolžina  $b$ , masa  $m$ ) glede na os skozi konec palice; os je pravokotna na palico.

$$J = J_c + a^2 m = mb^2/12 + (b/2)^2 m = mb^2/3 \quad (3.38a)$$

2. Kolikšen je vztrajnostni moment homogenega valja glede na os vzdolž plašča?

$$J = J_c + a^2 m = mR^2/2 + mR^2 = 3mR^2/2 \quad (3.38b)$$

3. Nihalo stenske ure je sestavljeno iz dolge palice (dolžina  $b$ , masa  $m_1$ ) in krogle (polmer  $R$ , masa  $m_2$ ), ki je pritrjena na koncu palice. Kolikšen je vztrajnostni moment tega nihala glede na os skozi zgornji konec palice?

Sestavljen je iz vztrajnostnega momenta palice in vztrajnostnega momenta krogle. Prvega že poznamo ( $= m_1 b^2/3$ , gl. 3.38a), drugega pa izračunamo s Steinerjevim stavkom:  $m_2(b+R)^2 + 2m_2 R^2/5$  (gl. 3.31).

$$J = J_{\text{palice}} + J_{\text{krogla}} = m_1 b^2/3 + m_2(b+R)^2 + 2m_2 R^2/5$$

4. Izračunaj vztrajnostni moment homogenega kvadra (masa  $m$ , stranice  $a, b$  in  $c$ ) glede na os skozi središče kvadra, vzporedno z robom  $c$ .

Kvader v mislih razrežemo na tanke ploščice (slika 3.35). Ena takšna ploščica ima maso  $dm = \rho dV = \rho ac dy$ ; ker je oddaljena od osi za  $y$ , je njen vztrajnostni moment (s pomočjo Steinerjevega stavka) enak:

$$dJ = (a^2/12)dm + y^2 dm = (y^2 + a^2/12) \rho ac dy$$

Celotni kvader zajamemo, če gre  $y$  od  $-b/2$  do  $+b/2$ :

$$J = \int dJ = \rho ac \int_{-b/2}^{+b/2} (y^2 + a^2/12) dy = \rho ac(a^2 + b^2)b/12 \\ J = m(a^2 + b^2)/12 \quad m = \rho abc \quad (3.38c)$$

Če postaneta  $a$  in  $c \ll b$ , se kvader stanjša v tanko palico z dolžino  $b$ ; njegov vztrajnostni moment je tedaj  $mb^2/12$ , kar že poznamo.

### Navor sile

Navor  $M$  sile  $F$  zapisemo v vektorski obliki z enačbo (3.22):

$$M = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (\text{merska enota: Nm}) \quad (3.39)$$

pri čemer je  $\mathbf{r}$  vektor oddaljenosti prijemališča sile od osi (slika 3.36). Smer navora  $M$  je določena s smerjo vektorskoga produkta vektorjev  $\mathbf{r}$  in  $\mathbf{F}$  (prvi vektor  $\mathbf{r}$  zasukamo tako, da se po najkrajši poti pokrije z drugim vektorjem  $\mathbf{F}$ ; kamor se pri tem zasuku premakne desni vijak, tja kaže vektor  $\mathbf{M}$ ). Vektor navora je torej pravokoten na ravnino, ki jo tvorita krajevni vektor  $\mathbf{r}$  prijemališča sile in sama sila  $\mathbf{F}$ ; ima smer osi, okrog katere se vrtti. Po velikosti je **produkt sile in njene ročice**, to je:

$$M = |\mathbf{M}| = r F \sin\delta = r' F \quad (3.40)$$

Kjer je  $\delta$  kót med smerjo sile in smerjo vektorja  $\mathbf{r}$  (ročica sile  $r' = r \sin\delta$  je pravokotna oddaljenost vrtišča od smeri sile, gl. stran 64).

Iz definicije sledi, da se navor sile ne spremeni, če silo pomikamo v njeni lastni smeri (saj se pri tem ročica sile ne spremeni); seveda pa je ne smemo premikati parallelno, približati vrtišču ali oddaljiti od njega.

Če učinkuje na telo več sil hkrati, npr.  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots$ , določimo navor vsake sile posebej (glede na dano vrtilno os), npr.  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1, \mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2, \dots$ , in nato poiščemo rezultanto vseh navorov:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \dots \quad (3.41)$$

Kako se telo vrти okrog neke vrtilne osi, je odvisno od rezultante navorov ( $\mathbf{M}$ ) vseh delujočih sil. Pomembna je projekcija navora vzdolž vrtilne osi. Sila najmočneje vpliva na vrtenje telesa (povzroči kotni pospešek), če je njen navor usmerjen vzdolž vrtilne osi (če sila leži v ravnini, pravokotno na vrtilno os).

Recimo, da sile  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots$  leže v isti ravnini (t. i. **kopljarne sile**), in sicer v ravnini pravokotno na vrtilno os. Na sliki (3.37) so sile v ravnini lista, vrtilna os pa je pravokotna nanjo. Ker imajo navori teh sil enako smer (smer vrtilne osi), jih lahko pišemo kot skalarje. S

predznakom + ali – popišemo usmerjenost navora vzdolž vrtilne osi. Če sila pospešuje vrtenje (če ima njen navor  $M$  smer kotne hitrosti  $\omega$ ), je njen navor pozitiven, drugače pa negativen. Celoten navor  $M$  vseh sil je potem dan z enačbo (gl. slika 3.37):

$$M = r'_1 F_1 - r'_2 F_2 + 0 + r'_4 F_4$$

Navor sile  $F_3$  je v našem primeru nič, ker je ročica te sile nič ( $r'_3 = 0$ ), saj gre podaljšek sile skozi vrtilno os.

### Navor rezultante sil

Rezultanta vseh zunanjih sil:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots$$

določa pospešek masnega središča telesa. Njeno lego (to je njeno prijemališče) poiščemo z zahtevo, da bodi njen navor  $M$  enak rezultanti navorov posameznih sil, ki jo sestavljajo:

$$M = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \dots \quad (3.42)$$

Tu je  $\mathbf{r}$  krajevni vektor prijemališča rezultante  $\mathbf{F}$ . Rezultanto  $\mathbf{F}$  postavimo na takšno oddaljenost od vrtilne osi, da je njen navor  $M$  enak rezultanti navorov vseh sil, ki jo sestavljajo. Tako lahko z rezultanto  $\mathbf{F}$  izračunamo ne le pospešek  $a_c$  masnega središča telesa, ampak tudi kotni pospešek vrtenja ( $\alpha = M/J = \mathbf{r} \times \mathbf{F}/J$ ).

V splošnem je lega rezultante  $\mathbf{F}$  (pri danih silah) odvisna od vrtilne osi, okrog katere se telo vrti. Če je ta druga, moramo rezultanto  $\mathbf{F}$  premakniti, da je njen navor spet enak rezultanti navorov posameznih sil. Tega pa ni treba napraviti, če so sile vzporedne. Lega rezultante vzporednih sil je neodvisna od vrtilne osi. To trditev bomo dokazali s primerom.

### Primera:

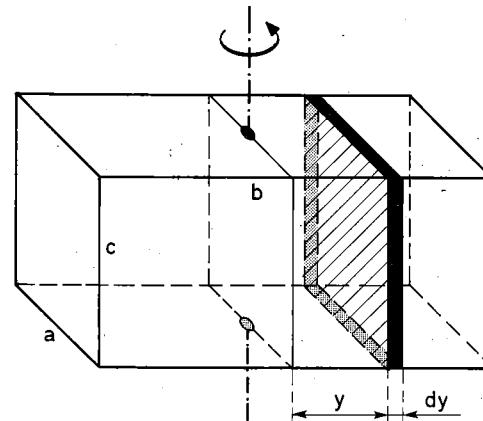
- Poisci rezultanto vzporednih sil  $F_1 = 20 \text{ N}$  in  $F_2 = 30 \text{ N}$ , ki sta razmaknjeni (paralelno) za  $a = 40 \text{ cm}$  (slika 3.38).

Ker sta sili vzporedni in ker se navori sil ne spremene, če sile pomaknemo v njihovih lastnih smereh, lahko sili  $F_1$  in  $F_2$  pomaknemo tako, da sta njuni prijemališči v isti črti z vrtiščem  $O$  (gl. slika 3.38). Sila  $F_1$  je od vrtišča oddaljena za  $b$ , sila  $F_2$  za  $b + a$ , rezultanta  $F = F_2 - F_1$  pa za  $x$ , ki ga iščemo. Velja (gl. enačbo 3.41):

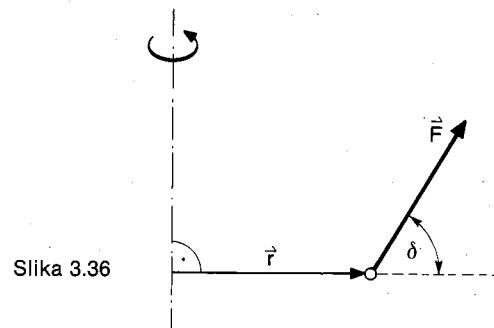
$$xF = F_2(b + a) - F_1b \quad \text{ali} \\ x = b + aF_2/(F_2 - F_1)$$

Vidimo, da je rezultanta  $F$  oddaljena od sile  $F_2$  za  $c = x - b - a = aF_1/(F_2 - F_1) = 80 \text{ cm}$ , od sile  $F_1$  pa za  $c + a = aF_2/(F_2 - F_1) = 120 \text{ cm}$ . Ker oddaljenost  $b$  vrtišča izpadne, je oddaljenost rezultante  $F$  od sile  $F_1$  oz.  $F_2$  neodvisna od legi vrtišča  $O$ .

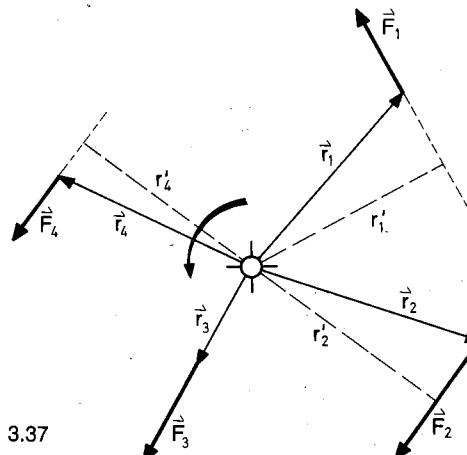
Ker je lega rezultante neodvisna od vrtilne osi, lahko postavimo os tudi na mesto rezultante. Navor rezultante glede na to os je torej nič. Prepričaj se, da sta navora sil  $F_1$  in  $F_2$  glede na to os nasprotno enaka (njuna rezultanta je nič).



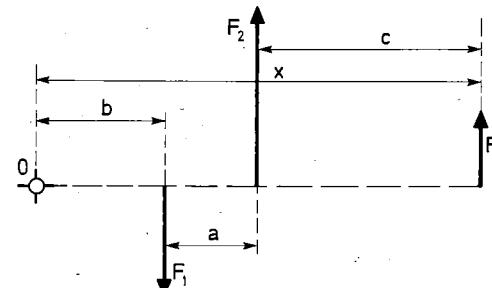
Slika 3.35



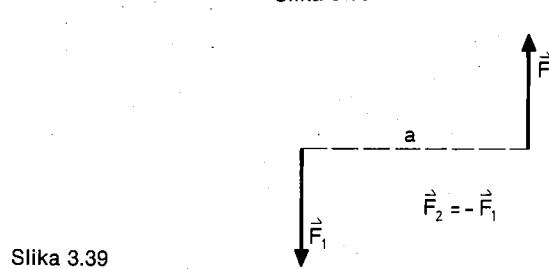
Slika 3.36



Slika 3.37



Slika 3.38



Slika 3.39

Zgoraj smo ugotovili, da je rezultanta zunaj sil, če sta sili nasprotno usmerjeni, in sicer je na strani močnejše sile ( $F_2$ ). Če pa sta vzporedni sili usmerjeni v isto smer, je njuna rezultanta med njima, in sicer bliže močnejši sili.

**2. Navor dvojice sil.** Dvojica sil je par nasprotne enakih sil (slika 3.39). Njuna rezultanta  $F$  je nič. Če na telo učinkuje dvojica sil, masno središče telesa ali miruje ali se giblje enakomerno (brez pospeška). Dvojica sil vpliva edinole na vrtenje telesa. Tu nima pomena iskati lege rezultante (1. primer za  $F_1 = F_2$ ), saj rezultante ni. Pač pa kljub temu obstaja rezultanta  $M$  navorov obeh sil. Ta je neodvisno od legi vrtišča enaka:

$$M = aF_1 \quad (3.43)$$

kjer je  $a$  paralelna razmaknjenost obeh sil. O tem se najlaže prepričamo, če si mislimo vrtišče v prijemašču sile  $F_1$ .

Če želimo, da se prosto telo vrti na mestu (ne da bi se njegovo masno središče premikalo), moramo na telo učinkovati z dvojico sil.

### Navor teže telesa – težišče

Zanima nas, kako se telo vrti pod vplivom lastne teže. Teža učinkuje v navpični smeri, zato je njen učinek na vrtenje največji, če je vrtilna os vodoravna. Na sliki (3.40) je navpični prerez telesa; vrtilna os je pravokotna na ravnino lista. Teža  $mg$  je zvezno porazdeljena po celotni prostornini telesa. Na masni element  $dm$  odpade diferencialna teža  $gdm$ ; teh je zelo (neskončno) mnogo. Posamezne diferencialne teže so vzporedne, zato je njihova rezultanta (to je celotna teža telesa) kar vsota oziroma integral:

$$\int gdm = g \int dm = gm = \text{teža telesa}$$

Diferencialne teže elementov, ki so desno od navpičnice skozi vrtišče  $O$ , vrtijo telo v smeri vrtenja urnega kazalca; one na drugi strani pa v nasprotni smeri. Iščemo rezultanto navorov posameznih diferencialnih tež.

Skozi vrtišče  $O$  potegnemo vodoravno koordinatno os  $x$ , tako da je vrtišče v koordinatnem izhodišču. Koordinata  $x$  masnega elementa  $dm$  je obenem ročica teže  $gdm$  tega elementa glede na vodoravno os skozi koordinatno izhodišče  $O$ . Navor  $dM$  teže tega elementa je zato:

$$dM = xgdm$$

Navori elementov na desni strani vrtišča ( $x > 0$ ) so pozitivni, na levi strani ( $x < 0$ ) pa negativni. Rezultanta teh navorov je navor celotne teže telesa:

$$M = \int dM = \int xgdm = g \int xdm$$

Rezultanto navorov pišemo kot navor rezultante:

$$M = I \cdot mg$$

Kjer je  $I$  ročica celotne teže:

$$I = (1/m) \int xdm = x_C \quad (\text{gl. 3.15a})$$

enaka koordinati  $x_C$  masnega središča telesa. Ne glede na lego vrtišča velja, da **teža vrti telo tako** (s takšnim navorom), **kot da bi bila zbrana v masnem središču telesa**. Zaradi tega se masno središče togega telesa imenuje tudi **težišče**. Seveda v resnici teža ne »prijemljje« v težišču (saj je porazdeljena po celotnem telesu in učinkuje na vsak delček telesa), pač pa se telo vrti tako, kot da bi celotna teža delovala iz njegovega težišča. Vidimo, da se telo ne giblje le translatorno skozi prostor pod vplivom zunanjih sil, kot da bi bila njegova masa zbrana v težišču, ampak se pod vplivom teže vrti tudi okrog stalne osi, kot da bi težišče vsebovalo celotno težo telesa.

Navor teže telesa glede na dano vrtišče  $O$  izračunamo tako, da vzamemo, kot da teža  $mg$  »prijemljje« v težišču telesa (slika 3.41), zato velja:

$$M = x_C mg \quad (3.44)$$

Če je težišče desno od vrtišča ( $x_C > 0$ ), se telo pod vplivom lastne teže zavrti v smeri vrtenja urnega kazalca. Telo se zaradi lastne teže ne zavrti, če je težišče pod vrtiščem ali nad njim, torej če sta težišče in vrtišče na isti navpičnici, t. i. **težiščnici** (slika 3.42). Ker je tedaj  $x_C = 0$ , je tudi  $M = 0$ .

### Mehansko ravovesje

Telo je v mehanskem ravovesju, če je pospešek njegovega težišča nič in če ni kotnega pospeška okrog poljubne osi skozi težišče:

$$\mathbf{a}_C = 0 \quad (3.45a)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_C = 0 \quad (3.45b)$$

To dosežemo, če je **rezultanta vseh zunanjih sil**, ki učinkujejo na telo, nič, in če je **rezultanta vseh navorov**, ki vrtijo telo okrog poljubne osi, enaka nič:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = 0 \quad \text{Potreben in zadosten pogoj za mehansko ravovesje}$$

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i = 0 \quad \text{toga telesa} \quad (3.46b)$$

Težišče telesa, ki je v mehanskem ravovesju, miruje ali se giblje enakomerno s stalno hitrostjo. Če je telo mirovalo v trenutku, ko so se izničile zunanje sile, miruje tudi naprej. Če se je tedaj gibalo, se giblje naprej z nespremenjeno hitrostjo. Mirovanje tržišča oziroma njegovo enakomerno gibanje ne zadostuje za mehansko ravovesje. Potrebno je še, da se telo ne vrti neenakomerno (pospešeno ali pojemajoče), kar zagotovimo, če izničimo rezultanto vseh navorov. Če se v trenutku, ko rezultanta navorov postane nič, vrti z neko kotno hitrostjo, se vrti tudi naprej enakomerno z enako kotno hitrostjo.

V tehniških strokah se mehansko ravovesje teles obravnava v okviru **statike**. Vendar ne pozabimo, da z mehanskim ravovesjem ni vedno povezano mirovanje telesa. Telo se lahko tudi giblje, vendar enakomerno.

**Primeri:**

**1. Lokomotiva na mostu.** Most (dolžina  $b$ , masa  $M$ ) je na koncih podprt. Čezenj pelje lokomotiva (masa  $m$ ) s stalno hitrostjo  $v$ . Kako se sili  $N_A$  in  $N_B$ , s katerima most pritiska na podpori  $A$  in  $B$  spreminja s časom zaradi gibanja lokomotive? (Slika 3.43)

Na most učinkujejo tele zunane sile: podporni sili  $N_A$  in  $N_B$  navzgor ter teža lokomotive ( $mg$ ) in samega mostu ( $Mg$ ) navzdol. Njihova rezultanta mora biti nič:

$$N_A + N_B - mg - Mg = 0 \text{ ali } N_A + N_B = mg + Mg$$

(Podporni sili skupaj sta enaki celotni teži tovora – mostu in lokomotive). Drugi pogoj mehanskega ravnovesja (3.46b) uporabimo za os skozi podporno točko  $A$  (ali  $B$ ). Teža lokomotive vrti most navzdol z navorom  $xmg$  ( $x$  je oddaljenost lokomotive od leve podpore  $A$ , enaka je  $vt$ ), teža  $Mg$  mostu pa ga vrti z navorom  $Mgb/2$  (gl. 3.44). Tema navoroma nasprotuje podpora sila  $N_B$ , ki vrti most navzgor z navorom  $bN_B$ . Rezultanta vseh teh navorov je nič (most miruje):

$$bN_B - xmg - (b/2)Mg = 0 \text{ ali} \\ N_B = Mg/2 + (x/b)mg, \quad x = vt$$

Podobno dobimo podporno silo  $N_A$  (vrtišče je v podpori  $B$ ):

$$N_A = Mg/2 + (1 - x/b)mg$$

Ko je lokomotiva na sredi mostu ( $x = b/2$ ), sta podporni sili enaki ( $N_A = N_B = Mg/2 + mg/2$ ), drugače pa je bolj obremenjena tista podpora, ki je bliže bremenu (lokomotivi). V začetku, ko je lokomotiva nad podporo  $A$  ( $x = 0$ ), je  $N_A = Mg/2 + mg$  in  $N_B = Mg/2$ , na koncu ( $x = b$ ) pa obratno.

**2. Tehtanje z vzvodno tehtnico** (slika 3.44). Če vzvod ni podprt natančno v težišču, morata biti prazni skodelici različno težki, da je tehtnica v ravnovesju. Merjenec z maso  $m$ , ki jo želimo določiti, položimo npr. na desno skodelico, na levo pa postavimo znano utež  $m_1$ , ki uravnovesi tehtnico. Meritev nato ponovimo: merjenec damo na levo skodelico in uravnovesimo tehtnico z drugo utežjo  $m_2$  na desni skodelici. Dokazali bomo, da je masa merjenca enaka geometrijski sredini mas obeh uteži:  $m = \sqrt{m_1 m_2}$ .

Pogoj za mehansko ravnovesje (glede na vodoravno vrtilno os skozi podporno točko vzvoda) prazne tehtnice dà enačbi:

$$N - (M_0 + M_1 + M_2)g = 0 \text{ ter} \\ Mg x + M_2 g(L + x) - M_1 g(L - x) = 0$$

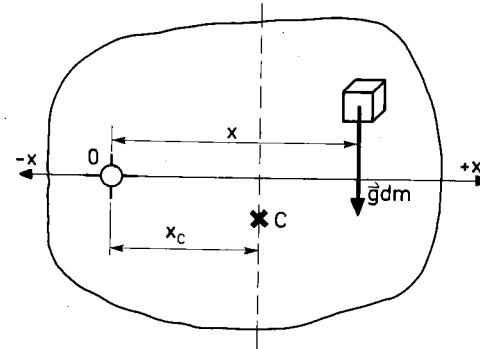
kjer je  $x$  odmak težišča vzvoda od vrtišča;  $M_0$ ,  $M_1$  in  $M_2$  so mase vzvoda ter leve in desne skodelice.

Za prvo tehtanje se navori izničijo z enačbo:

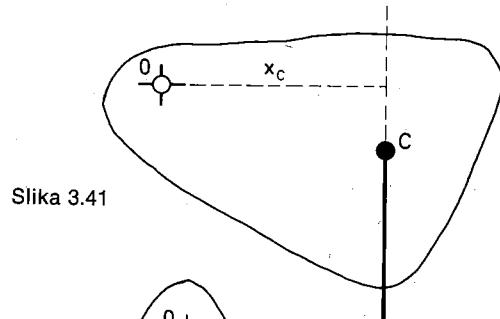
$$M_0 g x + (M_2 + m) g(L + x) - (M_1 + m_1) g(L - x) = 0$$

za drugo pa z enačbo:

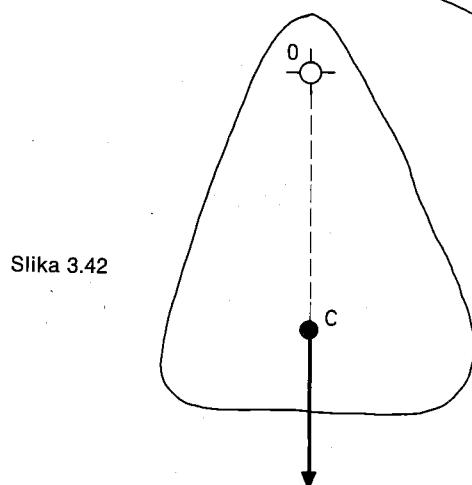
$$M_0 g x + (M_2 + m_2) g(L + x) - (M_1 + m) g(L - x) = 0$$



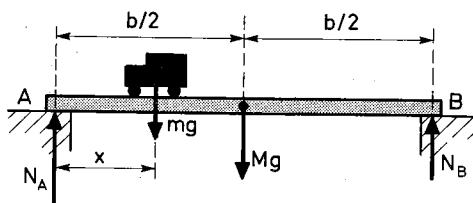
Slika 3.40



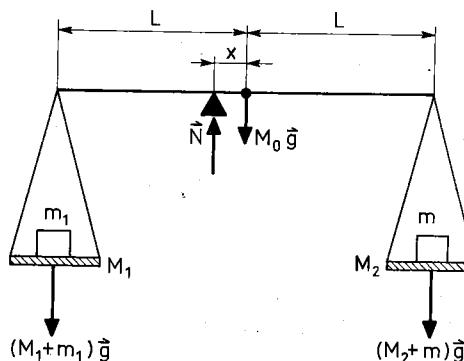
Slika 3.41



Slika 3.42



Slika 3.43



Slika 3.44

Sila  $N$  v podpori je vsakokrat enaka celotni teži vseh bremen (vzvoda, skodelic, merjenca in uteži).

Od zadnjih dveh enačb odštejemo enačbo ravnoesja navorov prazne tehtrnice (da se izločijo mase vzvoda in praznih skodelic) in dobimo enačbi:

$$\begin{aligned} m(L+x) &= m_1(L-x) \quad \text{ter} \\ m_2(L+x) &= m(L-x) \end{aligned}$$

Enačbi med seboj delimo in ostane:  $m/m_2 = m_1/m$  ali  $m^2 = m_1m_2$ , kar je bilo treba dokazati. Z dvojnim tehtanjem lahko maso merjenca izrazimo z masama uteži, ne da bi vpletali podatke o sami tehtrnici.

**3. Decimalna tehtrnica** je razmeroma zapleten sistem vzvodov, prirejen za tehtanje težjih tovorov (slika 3.45). Posameznii vzvodi so izbrani in razporejeni tako, da je odčitek teže tovora ( $T$ ) neodvisen od lege tovora na tehtalni plošči. Poleg tega je utež  $T$  na skodelici, ki uravnoesi tehtrnico s tovorm, natanko desetina teže tovora (odtovd imenje decimalna tehtrnica).

Na sliki (3.45) so označene sile  $F_1$ ,  $F_2$  in  $F_3$ , ki jih potrebujemo za uravnovešenje navorov v posameznih vrtiščih. Za ravnoesje glavnega vzvoda okrog vrtišča  $O$  dobimo enačbo:

$$TL = F_1a + F_2b$$

Sili  $F_1$  in  $F_3$  podpirata tehtalno ploščo s tovorm, zato je:

$$F_1 + F_3 = mg$$

Izenačenje navorov glede na vrtišče  $B$  dá enačbo:

$$F_1(b+d-a) + F_3c = mgx$$

pri čemer je  $x$  oddaljenost težišča tovora od vrtišča  $B$ . Preostane še ravnoesje navorov za podporno ogrodje, ki je pod tehtalno ploščo:

$$F_2d = F_3c$$

Iz zgornjih enačb izločimo  $F_3$  ter  $F_2$  in dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &= mg(x-c)/(b+d-a-c) \quad \text{ter} \\ TdL &= bc \cdot mg + (ad-bc)F_1 \end{aligned}$$

Vidimo, da postane odčitek  $T$  neodvisen od  $F_1$  (ki vsebuje  $x$ , to je lego tovora na tehtalni plošči), če je  $ad - bc = 0$  ali

$$a/b = c/d$$

Pri tako izbranih dolžinah vzvodov je odčitek  $T$  dan z enačbo (ne glede na lego tovora na tehtalni plošči):

$$T = (a/L)mg$$

Za  $L = 10a$  potem takem dobimo:  $T = mg/10$ , kar je značilno za decimalno tehtrnico.

Pri zgornjem izvajanjusu smo zanemarili težo tehtalne plošče in težo skodelice. Ponovi računa tako, da ju upoštevaš.

**4. Viseči most.** Levi konec vodoravnega mostu je vpet v zid, na prosti strani pa je most z vrvjo poševno

navzgor pritrjen v zid (slika 3.46). Kolikšna je sila  $F_v$  v vrvji in s kolikšno silo učinkuje zid na levi konec mostu?

Ker vrv vleče most poševno navzgor k zidu, ima sila zidu vodoravno komponento  $R$ , ki odriva most in tako vzdržuje ravnoesje z vodoravno komponento sile  $F_v$  v vrvji:

$$R = F_v \cos \varphi$$

Za navpične komponente sil velja ravnoesna enačba:

$$\begin{aligned} F_v \sin \varphi + N &= mg \quad \text{ali} \\ N &= mg - F_v \sin \varphi \end{aligned}$$

Navore sil izničimo glede na os, okrog katere bi se most zavrtel, če bi se vrv strgala. Teža mostu ( $mg$ ) vrti navzdol z navorom  $mgL/2$ , sila v vrv pa vrti navzgor z navorom  $F_v b \sin \varphi$  ( $b$  je oddaljenost pritrdišča vrvji od vrtišča mostu). Sledi:

$$\begin{aligned} F_v b \sin \varphi - mgL/2 &= 0 \quad \text{ali} \\ F_v &= mgL/(2b \sin \varphi) \quad \text{ter} \\ N &= mg - F_v \sin \varphi = mg(1 - L/2b) \\ R &= F_v \cos \varphi = mg(L/2b) \operatorname{ctg} \varphi \end{aligned}$$

Vidimo, da v zidu ni navpične podporne sile ( $N = 0$ ), če je  $b = L/2$ , če je torej nosilna vrv vpeta v težišču mostu. Tedaj je navpična komponenta sile v vrv enaka teži mostu (ne glede na naklon  $\varphi$  vrvji). Za  $b < L/2$  je  $N < 0$  (navpična sila v zidu je usmerjena navzdol).

**5. Drsenje lestve ob zidu.** *Lahka lestev (dolžina  $L$ ) je prislonjena ob navpično steno, tako da oklepa kót  $\varphi$  z vodoravnimi tlemi (slika 3.47). Statični torni koeficient med tlemi in lestvijo je  $k_1$ , med lestvijo in steno pa  $k_2$ . Po lestvi se vzpenja človek z maso  $m$ . Kako visoko se mora vzpeti, da lestev zdrsne? Maso lestve zanemarimo v primerjavi z maso človeka.*

Na lestev učinkujejo sile: teža  $mg$  človeka ter sila tal in sila stene. Zadnji razstavimo na navpični in vodoravni komponenti. Vodoravna komponenta sile tal je usmerjena k steni (ker hoče spodnji konec lestve zdrsniti proč od stene) in med človekovim vzpenjanjem narašča do največje možne vrednosti  $k_1 N_1$ . Navpična komponenta sile stene je usmerjena navzgor in narašča do zgornje vrednosti  $k_2 N_2$ .

Vzemimo, da lestev zdrsne, ko se človek povzpne po lestvi za  $x$ . Tedaj doseže vodoravna komponenta sile tal zgornjo mejo  $k_1 N_1$ , navpična komponenta sile stene pa zgornjo mejo  $k_2 N_2$ . Tik pred zdrsom še veljajo pogoji mehanskega ravnoesja.

Rezultanta vseh sil, ki učinkujejo na lestev, je nič:

$$\begin{aligned} N_1 + k_2 N_2 - mg &= 0 \quad \text{in} \\ k_1 N_1 - N_2 &= 0 \quad \text{ali} \\ N_1 &= mg/(1 + k_1 k_2) \quad , \quad N_2 = k_1 N_1 \end{aligned}$$

Rezultanta vseh navorov (npr. glede na vodoravno os skozi spodnje dotikalische lestve) je nič:

$$\begin{aligned} mgx \cos \varphi - k_2 N_2 L \cos \varphi - N_2 L \sin \varphi &= 0 \quad \text{ali} \\ x &= L N_2 (k_2 + \operatorname{tg} \varphi)/mg = L k_1 (k_2 + \operatorname{tg} \varphi)/(1 + k_1 k_2) \end{aligned}$$

Vidimo, da je najvišji vzpon neodvisen od mase človeka (če je le ta velika v primerjavi za maso lestve). Po lestvi

se lahko vzpenjamo brez bojazni, da bo zdrsnila, če je zgornji konec lestve pritrjen k steni, čemur ustreza  $k_2 \rightarrow \infty$ . Pri končno velikem  $k_2$  pa se je nemogoče vzpenjati po lestvi, če so tla idealno gladka: za  $k_1 = 0$  je tudi  $x = 0$ . V splošnem se lahko dlje vzpenjamo po lestvi, če je ta bolj pokončna (večjemu kotu  $\varphi$  ustreza večji  $x$ ).

**6. Prevrnitev zaboja med drsenjem.** Po vodoravnih tleh vlečemo kockast zabol (masa  $m$ , stranica  $b$ ), da drsi enakomerno s stalno hitrostjo (slika 3.48). Najmanj kolikšen kót  $\varphi$  mora oklepiti vlečna sila  $F$  z vodoravno smerjo, da se zabol med drsenjem ne prevrne?

Ker zabol drsi translatorno s stalno hitrostjo, so sile in navori v ravnovesju: rezultanta sil je nič in rezultanta navorov je nič. Za projekcije sil v navpični smeri velja:

$$F \sin \varphi + N - mg = 0 \text{ ali } N = mg - F \sin \varphi$$

za vodoravne projekcije pa:

$$F \cos \varphi - k_t N = 0 = F \cos \varphi - k_t(mg - F \sin \varphi) \text{ ali} \\ F = k_t mg / (\cos \varphi + k_t \sin \varphi)$$

Zabol se ne prevrne okrog vodoravne osi skozi rob 0 (gl. sliko 3.48), če je navor teže zabolja ( $mgb/2$ ) večji od navora ylečne sile ( $Fb \cos \varphi$ ):

$$mgb/2 > Fb \cos \varphi \text{ ali} \\ F < mg/(2 \cos \varphi)$$

Vstavimo  $F$  iz zgornje enačbe za enakomerno drsenje in dobimo pogoj, ki mora biti izpolnjen, da se zabol med enakomernim drsenjem ne prevrne:

$$\tan \varphi > 2 - 1/k_t$$

Pri zelo močnem trenju ( $k_t \gg 1$ ) se torej zabol ne prevrne, če je  $\tan \varphi > 2$ . Na povsem gladki podlagi ( $k_t \rightarrow 0$ ) pa zabolja ni mogoče prevrniti, četudi je vlečna sila usmerjena skoraj navpično navzdol ( $\varphi = -90^\circ$ ).

**7. Viseča palica.** Homogena palica z enakomernim prerezom  $S$  ima maso  $m$  in dolžino  $b$ ; z enim koncem je pritrjena na strop, tako da visi. Kolikšna je notranja sila  $F$  na različnih prerezih v palici? (Slika 3.49)

Na prerezu  $S$  v globini  $x$  pod pritrdilščem palice učinkuje sila  $F(x)$ , kar pomeni, da spodnji konec palice čuti silo  $F(x)$ , s katero ga zgornji del palice vleče navzgor (leva sila na sliki 3.48), sam pa obenem vleče zgornji del palice z enako veliko silo navzdol (desna sila na sliki). Na spodnji del palice torej delujeta sila  $F(x)$  navzgor in teža  $mg(b-x)/b$  navzdol. Ker palica miruje, je:

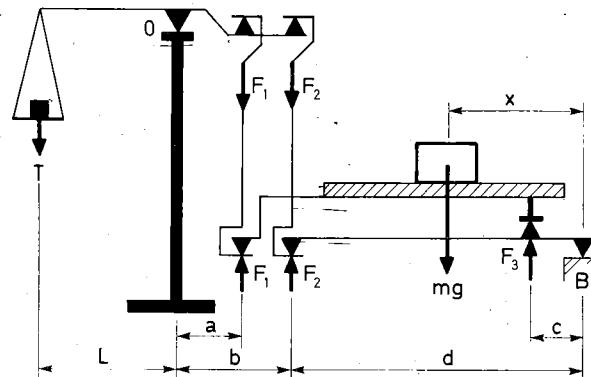
$$F(x) = mg(1 - x/b) \quad m = \rho V = \rho Sb$$

Na spodnjem prostem koncu palice ( $x = b$ ) seveda ni notranje sile:  $F = 0$ . Notranja sila enakomerno narašča navzgor in je največja na zgornjem (pritrjenem) koncu palice ( $x = 0$ ), kjer je enaka celotni teži palice ( $F = mg$ ).

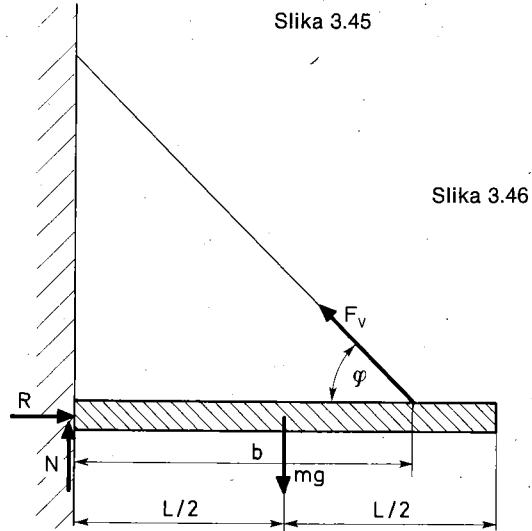
Natezna napetost v palici zaradi lastne teže palice je:

$$\sigma(x) = F(x)/S = \rho g(b-x) \quad (\text{gl. 3.18}) \quad (3.47)$$

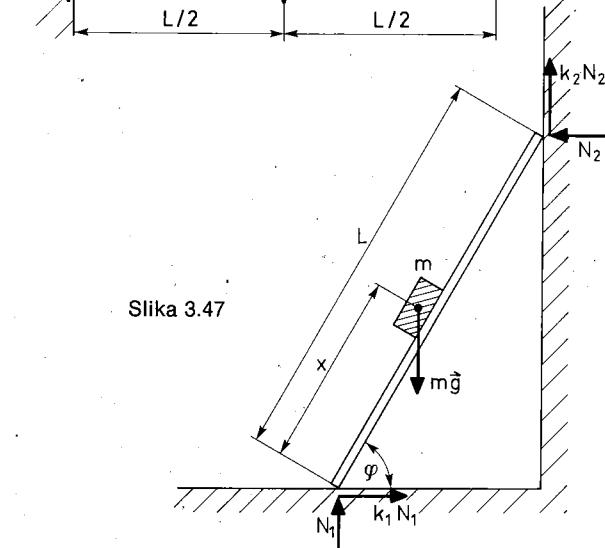
S kolikšno silo učinkuje palica na strop? Označi to silo na sliki.



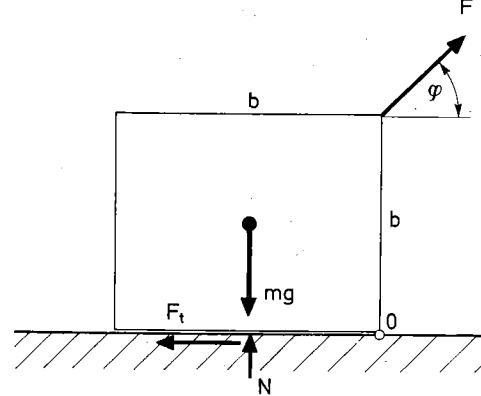
Slika 3.45



Slika 3.46



Slika 3.47



Slika 3.48

**8. Verižnica** je krivulja, v katero se povesi vrv ali veriga (kabel itd.) zaradi lastne teže; konca verige sta razmaknjena (npr. za a) in pritrjena enako visoko (slika 3.50).

Veriga z maso  $m$  in dolžino  $b$  je homogena; na enoto dolžine odpade masa  $\mu = m/b$ . Izhodišče koordinatnega križa (0) postavimo v najspodnejšo točko povešene verižnice, ki je na sredi med podpornima točkama A in B.

Enačbo verižnice najlažje poiščemo v parametrični obliku, s pomočjo parametra  $s$  (dolžina loka verižnice), ki ga merimo iz koordinatnega izhodišča 0 vzdolž krivulje verižnice. Za ločni element  $ds$  verižnice velja:  $dx = ds \cos\theta$  in  $dy = ds \sin\theta$ , pri čemer je  $\theta$  naklonski kot tangentne na verižnico v točki P.

Ravnovesni pogoj za viseči del verižnice med izhodiščem 0 in točko P (gl. slika 3.50a) dá enačbi:

$$\begin{aligned} F \sin\theta &= \text{teža} = s\mu g \quad \text{in} \\ F \cos\theta &= F_0 \end{aligned}$$

F je notranja sila v točki P verižnice,  $F_0$  pa v najspodnejši točki verižnice. Enačbi kvadriramo in seštejemo in dobimo:

$$F = \sqrt{F_0^2 + \mu^2 g^2 s^2}$$

Sledi:

$$\begin{aligned} dx &= ds \cos\theta = ds F_0 / F = F_0 (F_0^2 + \mu^2 g^2 s^2)^{-1/2} ds \quad \text{ter} \\ dy &= ds \sin\theta = ds \cdot \mu g s / F = \mu g s (F_0^2 + \mu^2 g^2 s^2)^{-1/2} ds \end{aligned}$$

Po integraciji obeh enačb dobimo enačbo verižnice v parametrični obliku:

$$x = p \ln(s/p + \sqrt{1 + s^2/p^2}) = p \operatorname{arsh} \left( \frac{s}{p} \right)$$

kjer je  $p = F_0/\mu g$

$$y = \sqrt{s^2 + p^2} - p$$

Iz prve enačbe najprej izračunamo:

$$s = p \operatorname{sh}(x/p)$$

in nato vstavimo v drugo enačbo, da dobimo enačbo verižnice v eksplisitni obliki:

$$y = p [\operatorname{ch}(x/p) - 1] \quad (3.48)$$

V parametru  $p = F_0/\mu g$  nastopa notranja sila  $F_0$  (v najspodnejšem delu povešene verižnice), ki je odvisna od dolžine verige ( $b$ ) in od njene razpona ( $a$ ). Velja:  $b = 2s$  za  $x = a/2$ , to je:

$$b = 2p \operatorname{sh}(a/2p)$$

Iz te enačbe z znanimi podatki za dolžino ( $b$ ) in razpon ( $a$ ) verižnice izračunamo parameter  $p$ , ki ga nato vstavimo v enačbo verižnice (3.48). Največji poves verižnice  $y_0$  je dan z enačbo:

$$y_0 = y(a/2) = p [\operatorname{ch}(a/2p) - 1]$$

## Dinamika togega telesa

Najenostavnejše gibanje togega telesa je **translatorno gibanje**: vsak del telesa ima enako hitrost in enak

pospešek (gl. str. 76). Kakor se giblje težišče, tako se giblje vsak del telesa (slika 3.51). Na sliki (3.52) je skiciran translatorni poševni met palice. Kako moramo vreči palico poševno navzgor, da bo letela translatoryno?

Drug enostaven primer gibanja togega telesa je **rotacija**, to je **vrtenje okrog stalne osi** skozi težišče telesa. Težišče miruje ( $v_c = 0$ ) in z njim vred mirujejo vse točke telesa, ki so na vrtilni osi. Ostali deli telesa pa krožijo okrog osi z obodno (tangentno) hitrostjo  $v' = r\omega$ , kjer je  $\omega$  kotna hitrost vrtenja telesa,  $r$  pa pravokotna oddaljenost od vrtilne osi (slika 3.53; vrtilna os je pravokotna na ravno lista). Čim bolj je del telesa oddaljen od vrtilne osi, tem hitreje se giblje. Tako se npr. gibljejo rotorji v raznih strojih in motorjih, osi, gredi ipd. Vrteča se telesa so večinoma osno simetrična; simetrijska os telesa je vrtilna os.

S translacijo in rotacijo lahko sestavimo posebno vrsto gibanja – **kotaljenje**. Težišče telesa se giblje, obenem se telo vrti okrog osi skozi težišče, vendar tako, da se smer vrtilne osi med gibanjem ne spreminja. Pri kotaljenju se vrtilna os premika paralelno sami sebi.

Hitrost v poljubnega dela telesa je sestavljena iz hitrosti  $v_c$  zaradi gibanja težišča in iz obodne hitrosti  $v'$  zaradi vrtenja telesa okrog osi skozi težišče:

$$v = v_c + v' \quad (3.49)$$

Na nekaterih mestih se hitrosti  $v_c$  in  $v'$  se števata, druge odštevata. Če je le telo dovolj veliko, obstaja na njemu mesto, kjer je hitrost zaradi gibanja težišča ravno nasprotno enaka hitrosti zaradi rotacije:  $v_c = -v'$ ; trenutna hitrost tega mesta je nič ( $v = 0$ ). Če je takšno mesto dotikalishče telesa s podlogo, pravimo, da se telo **kotali** po podlagi (brez podrsavanja). Na sliki (3.54) so označeni vektorji hitrosti ( $v$ ) za nekatera mesta valjastega ali kroglastega telesa (s polmerom  $R$ ), ki se kotali po vodoravni podlagi. Težišče telesa se giblje v desno s hitrostjo  $v_c$ , obenem se telo vrti okrog vodoravne osi skozi središče telesa s kotno hitrostjo  $\omega$  (v smeri vrtenja urnega kazalca), tako da je:

$$v_c = v' = R\omega \quad \text{pogoj za kotaljenje} \quad (3.50)$$

Dotikalishče telesa s podlogo bi se morallo gibati v desno s hitrostjo  $v_c$  in obenem v levo s hitrostjo  $v' = -R\omega$ . Ker je  $v_c = R\omega$ , je njegova trenutna hitrost nič, kar pomeni, da ne podrsuje. Brž ko je  $v_c \neq R\omega$ , telo podrsuje po tleh, in sicer:

$$\begin{aligned} v_c > R\omega &\quad \text{telo podrsuje v smeri gibanja} \\ v_c < R\omega &\quad \text{telo podrsuje proti smeri gibanja} \end{aligned}$$

Profil hitrosti posameznih mest kotalečega se telesa (gl. slika 3.54) nakazuje, da lahko **kotaljenje predstavimo kot rotacijo okrog trenutne osi skozi dotikalishče** telesa s podlogo. Hitrosti posameznih mest kotalečega se telesa so takšne, kot da bi se telo vrtelo s kotno hitrostjo  $\omega$  okrog trenutne osi skozi dotikalishče (ta vrtilna os se premika s hitrostjo težišča  $v_c$  vzporedno sami sebi). Hitrost v poljubnega dela telesa je npr. pravokotna na veznico  $r$  mesta z dotikalishčem in enaka  $r\omega$ . Med kotaljenjem se najhitreje giblje zgornja točka telesa – z dvakratno hitrostjo težišča ( $= 2v_c$ ).

Translacija, rotacija in kotaljenje so enostavni primeri gibanja togega telesa. V splošnem je gibanje bolj zapleteno, saj se med gibanjem lahko spreminja tudi smer vrtilne osi. Takšnega splošnega gibanja togega telesa ne moremo obravnavati s preprostimi matematičnimi sredstvi, ki so nam na razpolago na tej stopnji.

Ne glede na to, kako se telo giblje, velja tole:

Pospešek težišča telesa je odvisen od rezultante  $\mathbf{F}$  vseh zunanjih sil.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_c \quad (\text{gl. 3.7})$$

Če težišče telesa miruje (ali se giblje enakomerno s stalno hitrostjo), je rezultanta vseh sil, ki učinkujejo na telo, enaka nič.

Vrtenje telesa določa rezultanta  $\mathbf{M}$  navorov vseh zunanjih sil:

$$\mathbf{M} = J\boldsymbol{\alpha} \quad (\text{gl. 3.27})$$

kjer je  $\boldsymbol{\alpha}$  kotni pospešek,  $J$  pa vztrajnostni moment telesa glede na vrtilno os. Če se telo ne vrti (ali če se vrти enakomerno s stalno kotno hitrostjo), je rezultanta vseh zunanjih navorov enako nič.

### Primeri:

**1. Prevrnitev avta na ovinku.** Na strani 46 smo računali največjo hitrost, s katero lahko vozi avto skozi vodoravni ovinek, ne da bi zdrsnil. Četudi ne zdrsne, se pa lahko prevrne. Tokrat nas zanima, pri kolikšni hitrosti se avto prevrne. V tej zvezi sta pomembni predvsem višina  $h$  težišča nad tlemi ter razdalja  $b$  med kolesoma.

Problem najhitreje razrešimo v neinercialnem koordinatnem sistemu, ki se giblje skupaj z avtom skozi ovinek (slika 3.55). Avto se začne prevračati okrog osi skozi podporno točko  $O$  kolesa na zunanjji strani ovinka, ko je navor centrifugalne vztrajnostne sile  $mv^2/R$  (gl. str. 50) večji od navora teže avta:

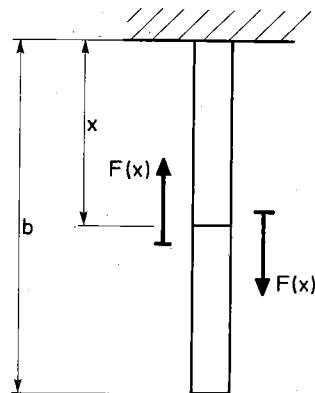
$$(mv^2/R)h \geq mgb/2 \quad \text{ali} \\ v \geq \sqrt{gbR/2h}$$

Nekoliko več dela je treba, če želimo primer razrešiti iz mirajočega inercialnega koordinatnega sistema (slika 3.56). Na avto učinkujejo sile: teža avta  $mg$ , ter sili tal na kolesi; zadnji razstavimo na navpični komponenti  $N_1$  in  $N_2$  ter na vodoravni komponenti  $F_1$  in  $F_2$  (ti sta usmerjeni k središču ovinka in omogočata radialni pospešek). Ker se težišče  $C$  giblje s hitrostjo  $v$  po vodoravnem krogu s polmerom  $R$ , to je z radialnim pospeškom  $v^2/R$  v vodoravni smeri k središču ovinka, zadoščajo sile ravnovesnima enačbama:

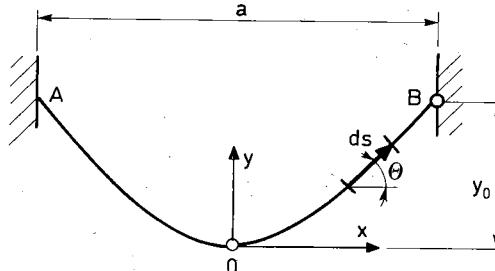
$$N_1 + N_2 - mg = 0 \quad \text{in} \\ F_1 + F_2 = mv^2/R$$

Vsota navorov glede na os skozi težišče je nič (ker se avto ne prevrača):

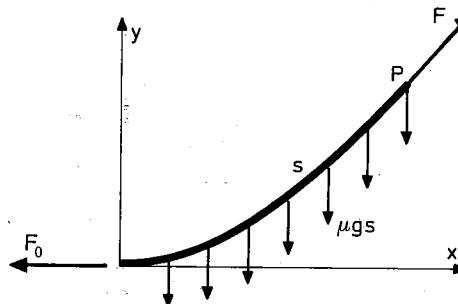
$$(F_1 + F_2)h + N_1b/2 - N_2b/2 = 0 \quad \text{ali} \\ N_2 - N_1 = (2h/b)(F_1 + F_2) = (2h/b)(mv^2/R)$$



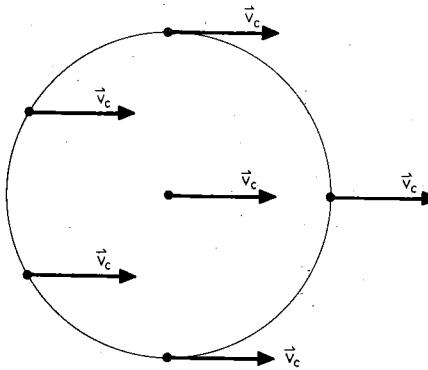
Slika 3.49



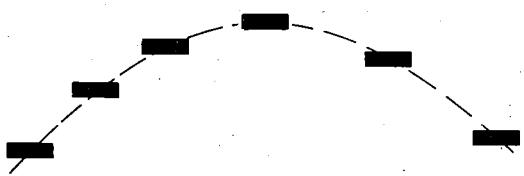
Slika 3.50



Slika 3.50a



Slika 3.51



Slika 3.52

Ker je  $N_1 + N_2 = mg$ , dobimo:

$$\begin{aligned}N_1 &= mg/2 - mv^2h/bR \\N_2 &= mg/2 + mv^2h/bR\end{aligned}$$

Vidimo, da je kolo na zunanjji strani ovinka bolj obremenjeno kot notranje kolo ( $N_2 > N_1$ ); razlika je večja, če se avto giblje hitreje. Avto se začne prevračati v trenutku, ko se pritisk notranjega kolesa na tla zmanjša na nič, kar se zgodi pri hitrosti  $v_{max}$ , za katero velja:

$$\begin{aligned}N_1 &= 0 = mg/2 - mv_{max}^2h/bR \text{ ali} \\v_{max} &= \sqrt{gbR/2h}\end{aligned}$$

kar že poznamo. Skozi ovinek lahko vozimo hitreje (brez bojazni, da bi se avto prevrnil), če je težišče avta niže (manjši  $h$ ) in če sta kolesi bolj razmagnjeni (večji  $b$ ) ter (seveda) če je ovinek blažji (večji  $R$ ).

**2. Uteži na škripcu** (slika 3.57). Uteži  $m_1$  in  $m_2$  sta privezani na skupno vrv, ki vodi okrog oboda pritrjenega škripca. Ta se lahko prosto vrvi okrog vodoravne osi. S kolikšnim pospeškom se gibljeta uteži in kolikšna je sila v vrvi?

Vzemimo, da težja utež  $m_2$  pada s pospeškom  $a$ . Ker je vrv napeta, se lažja utež  $m_1$  dviga z enako velikim pospeškom. Vrv ne podrsava po obodu škripca, zato se škripec vrvi pospešeno; vrtita ga sili  $F_1$  in  $F_2$  v vrvi na obeh straneh, ki sta zato različni.

Na utež  $m_2$  delujeta teža  $m_2g$  navzdol in sila  $F_2$  v vrvi navzgor:

$$m_2g - F_2 = m_2a$$

Za utež  $m_1$  pa velja:

$$F_1 - m_1g = m_1a$$

Pospešek  $a$  gibanja uteži je obenem tangentni pospešek vrtenja škripca (ker vrv ne podrsava po obodu škripca), torej se škripec vrvi s kotnim pospeškom  $\alpha = a/R$  ( $R$  je polmer škripca). Tega povzročata sili  $F_1$  in  $F_2$  (trenje v ležajih zanemarimo), ki vrtita škripec z navorom:

$$\begin{aligned}M &= (F_2 - F_1)R = J\alpha = Ja/R \\(J \text{ je vztrajnostni moment škripca})\end{aligned}$$

Iz enačb dinamike za uteži in škripec izračunamo neznane količine  $a$ ,  $F_1$  in  $F_2$ :

$$\begin{aligned}a &= (m_2 - m_1)g/(m_1 + m_2 + J/R^2) \\F_1 &= m_1g(2m_2 + J/R^2)/(m_1 + m_2 + J/R^2) \\F_2 &= m_2g(2m_1 + J/R^2)/(m_1 + m_2 + J/R^2)\end{aligned}$$

Če je škripec lahek v primerjavi z utežema, tako da je  $J/R^2 \ll m_1$  oz.  $m_2$ , se zgornji izrazi poenostavijo v:

$$\begin{aligned}a &\approx g(m_2 - m_1)/(m_1 + m_2) \\F_1 &\approx 2m_1m_2g/(m_1 + m_2) \approx F_2\end{aligned}$$

Tedaj sta sili v vrvi na obeh straneh škripca enaki (saj škripec nima zadosti vztrajnosti, da bi se upiral potegu uteži). Druga skrajnost je izredno težak škripec, tako da je  $J/R^2 \gg m_1$  oz.  $m_2$  in  $a \approx 0$  ter  $F_1 \approx m_1g$  in  $F_2 \approx m_2g$  (Škripec se zaradi velike vztrajnosti praktično ne vrvi, uteži na vrvi mirujeta).

S kolikšno silo učinkuje vrtilna os na škripec? Kolikšen je navor te sile (trenje zanemarimo)?

**3. Padanje palice.** Homogena palica z maso  $m$  in dolžino  $b$  stoji pokonci na vodoravnih tleh (slika 3.58). Palico rahlo sunemo, da začne padati. S kolikšno hitrostjo udari zgornji konec palice ob tla, če spodnji konec ne zdrsne?

Palica se med padanjem vrvi okrog vodoravne osi skozi podnožišče  $O$ . Ko oklepa z navpičnico kót  $\varphi$ , deluje nanjo navor teže  $M = mg(b/2)\sin\varphi$ , ki vsiljuje kotni pospešek  $\alpha$ :

$$M = Ja$$

$$\begin{aligned}mg(b/2)\sin\varphi &= (mb^2/3)\alpha \text{ ali} \\\alpha &= (3g/2b)\sin\varphi = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi} \text{ ali} \\d(\omega^2) &= (3g/b)\sin\varphi d\varphi\end{aligned}$$

Enačbo integriramo od začetne lege ( $\varphi = 0$  in  $\omega = 0$ ) do vmesne lege ( $\varphi$  in  $\omega$ ). Dobimo:

$$\omega^2 = (3g/b) \int_0^\varphi \sin\varphi d\varphi = (3g/b)(1 - \cos\varphi)$$

Palica pade na tla ( $\varphi = 90^\circ$ ) s kotno hitrostjo  $\omega_1 = \sqrt{3g/b}$ . Konec palice torej udari ob tla s hitrostjo  $v_1 = b\omega_1 = \sqrt{3gb}$ .

S kolikšno hitrostjo bi konec palice padel na tla, če bi prosto padal?

**4. Pol pospeška.** Kadar udarjamo s težkim kladivom ali sekiro, moramo držati ročaj na pravem mestu, da sunek udarca ni premočan. Držati moramo na mestu, kjer je t. i. pol pospeška.

Vzemimo dolgo palico in jo udarimo s silo  $F$  (vpliv drugih sil zanemarimo). Če jo udarimo v težišču, se palica premakne translatorno s pospeškom  $a_c = F/m$  ( $m$  = masa palice). Če pa jo udarimo izven težišča, se palica (dodatno translaciji) tudi zasuče okrog osi skozi težišče s kotnim pospeškom  $\alpha = M/J = fF/J$ , kjer je  $J$  vztrajnostni moment palice glede na os skozi težišče,  $f$  pa ročica sile (slika 3.59). Zaradi zasuka palice dobi vsak del palice (dodatno k pospešku  $a_c$  zaradi premika težišča) še tangenčni pospešek  $a_t = x\alpha$ , pri čemer merimo  $x$  iz težišča. Celoten pospešek dela palice na oddaljenosti  $x$  od težišča je torej:

$$a(x) = a_c + a_t = a_c + x\alpha = F/m + xfF/J$$

Levo od težišča ( $x$  negativen) si pospeška zaradi premika težišča in zaradi zasuka palice nasprotuje. **Pol pospeška** je tista točka ( $P$ ) na palici, kjer je celoten pospešek nič, kjer je pospešek težišča ravno nasprotno enak tangentnemu pospešku zaradi zasuka palice; to se zgodi pri  $x = -p$ :

$$\begin{aligned}a(-p) &= 0 = F/m - pfF/J \text{ ali} \\p &= J/mf\end{aligned}\tag{3.51}$$

Pol pospeška se kljub udarcu zunanje sile ne premakne; njegov pospešek je nič. Lega pola na palici je odvisna od mesta udarca ( $f$ ) sile, vedno pa je na drugi strani težišča. Če npr. udarimo homogeno palico (z dolžino  $b$ ) na koncu ( $f = b/2$ ), je pol pospeška oddaljen od drugega konca palice za  $b/3$ .

Podoben primer: Na kateri višini ( $h$ ) nad tlemi moramo suniti biljardno kroglo v vodoravni smeri, da po udarcu

ne zdrsne? Dotikališče krogla s tlemi mora biti pol pospeška ( $p = R$ ), zato:  $R = J/m(h - R)$ , kjer je  $J$  vztrajnostni moment krogla ( $= 2mR^2/5$ , gl. 3.31). Sledi:  $h = 7R/5$ . Kroglo moramo suniti na višini  $0,4R$  nad njenim središčem.

**5. Valjar.** Valj z maso  $m$  in polmerom  $R$  leži na vodoravnih tleh. S kolikšnim pospeškom se giblje njegovo težišče, če ga vlečemo v vodoravni smeri s silo  $F$ , katere podaljšek gre skozi težišče? (Slika 3.60)

Valj se kotali. Kotaljenje pa lahko obravnavamo kot rotacijo okrog trenutne osi skozi dotikališče  $O$ . Okrog te osi pospešuje vrtenje le vlečna sila  $F$ ; njen navor je  $M = FR$ . Valj se torej vrti okrog dotikališča  $O$  s kotnim pospeškom  $\alpha = M/J$ , kjer je  $J$  vztrajnostni moment valja glede na os skozi  $O$  ( $= 3mR^2/2$ , gl. 3.38b):

$$\alpha = 2F/3mR$$

Težišče valja se giblje s pospeškom:

$$a_c = Ra = 2F/3m$$

(Če bi bil valj prost – ne na tleh – bi se njegovo težišče zaradi vlečne sile  $F$  gibalo s pospeškom  $F/m$ , tako pa je zaradi kotaljenja po tleh pospešek manjši).

Enak rezultat dobimo, če napišemo enačbo za gibanje težišča in enačbo za vrtenje valja okrog osi skozi težišče:

$$\begin{aligned} N - mg &= 0 \\ F - F' &= ma_c \\ F'R &= J_c\alpha = J_c a_c / R \end{aligned}$$

Odtod izračunamo:

$$a_c = F/(m + J_c/R^2) = 2F/3m \quad (J_c = mR^2/2)$$

Vodoravna komponenta sile podlage (ki vrti valj) je:

$$F' = J_c a_c / R^2 = F/(1 + mR^2/J_c) = F/3$$

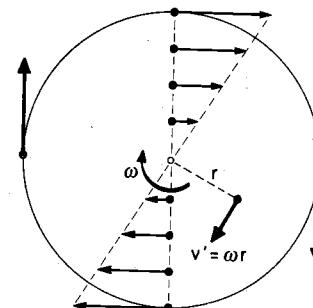
Dokler je ta komponenta manjša od statične torne sile ( $= k_s N = k_s mg$ ), se valj po podlagi še kotali. Pri  $F \geq 3k_s mg$  pa začne valj podrsavati po tleh.

Zgornjemu primeru je podobna znana igračka jo-jo (slika 3.61). Kolo ima gred s polmerom  $r$ ; okrog gredi je navita vrv, katere prosti konec držimo v roki. Ko kolo spustimo, začne pospešeno padati, pri čemer se pospešeno vrti, vrv pa se odvija. S kolikšnim pospeškom pada težišče kolesa? Uporabimo zgornji rezultat, le da je vlečna sila  $F$  zdaj teža  $mg$ :

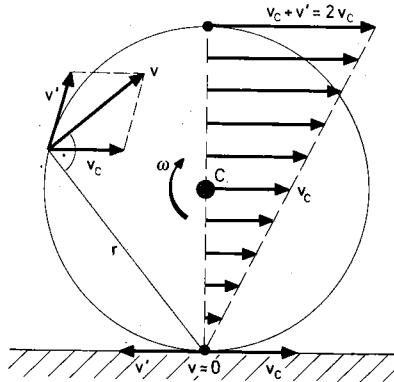
$$a_c = mg/(m + J/r^2) = g/(1 + J/mr^2)$$

Če se vrv pretrga, pada težišče kolesa s težnim pospeškom  $g$ ; vrv pa zadržuje padanje, saj se mora kolo med padanjem tudi vrteti. Kolo pada s tem manjšim pospeškom, čim večji je njegov vztrajnostni moment.

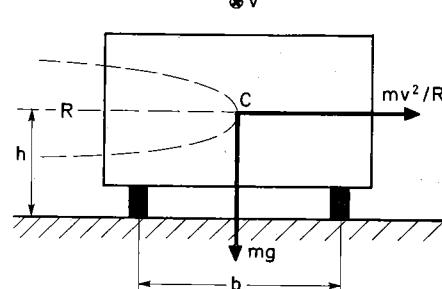
**6. Balinanje.** Kroglo zalučamo translatorno z začetno hitrostjo  $v_0$  po vodoravnih tleh. S kolikšno hitrostjo se na koncu giblje težišče krogla? Na kolikšni razdalji ( $x_1$ ) in po kolikšnem času ( $t_1$ ) od mesta oziroma trenutka, ko se krogla dotakne tal, se krogla začne kotaliti? (Slika 3.62)



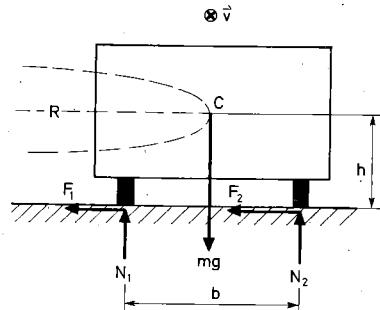
Slika 3.53



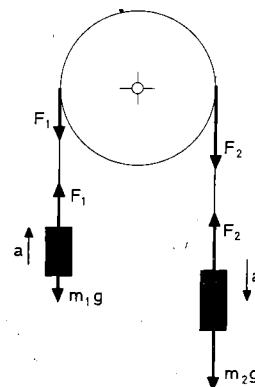
Slika 3.54



Slika 3.55



Slika 3.56



Slika 3.57

V začetku krogla drsi po tleh in neno gibanje zavira dinamična torna sila  $F_t = k_t N = k_t mg$ , ki obenem kroglo tudi vrti z navorom  $M = F_t R = k_t mgR$ . Zaradi tega se težišče krogle giblje enakomerno pojemajoče s pojmem kom  $a_c = F_t/m = k_t g$  in njegova hitrost enakomerno pojema s časom:

$$v_c = v_0 - a_c t = v_0 - k_t g t$$

Obenem se krogla vrti enakomerno pospešeno s kotnim pospeškom  $\alpha = M/J_c = 5k_t g/2R$  in kotna hitrost se enakomerno povečuje:

$$\omega = at = 5k_t g t / 2R$$

Dokler je  $v_c > R\omega$ , krogla še podrsuje po tleh. Ko postane  $v_c = R\omega$ , se začne kotaljenje:

$$v_0 - k_t g t_1 = 5k_t g t_1 / 2 \text{ ali} \\ t_1 = 2v_0 / 7k_t g$$

Pot podrsavanja znaša:

$$x_1 = v_0 t_1 - k_t g t_1^2 / 2 = 12v_0^2 / 49k_t g$$

Od tega mesta naprej se krogla kotali enakomerno (vodoravna komponenta sile tal izgine), težišče se giblje enakomerno s stalno hitrostjo  $v_c = R\omega = 5v_0/7$  (če zanemarimo upor zraka in kotalno trenje, gl. str. 78). Na popolnoma gladkih tleh ( $k_t \rightarrow 0$ ), bi krogla ves čas drsela translatorno, se ne bi mogla kotaliti.

Namesto da kroglo v začetku sunemo, jo zavrtimo z začetno kotno hitrostjo  $\omega_0$  in previdno položimo na tla (slika 3.63). Ker krogla v dotikališču drsi v levo, je dinamična torna sila usmerjena v desno. Ta sila pospešuje težišče krogle v desno s pospeškom:

$$a_c = k_t g$$

in obenem zavira vrtenje krogle s pojmem  $\alpha = 5k_t g / 2R$ . Zaradi tega se hitrost težišča povečuje s časom po enačbi:

$$v_c = a_c t = k_t g t$$

kotna hitrost  $\omega$  pa zmanjšuje:  $\omega = \omega_0 - at = \omega_0 - 5k_t g t / 2R$ . Slep ko prej se hitrost težišča toliko poveča, kotna hitrost pa toliko zmanjša, da je zadoščeno pogoju:  $v_c = R\omega$ , ki je potreben za kotaljenje. Krogla se prične kotaliti po času  $t_2 = 2R\omega_0 / 7k_t g$ .

Kako moramo zalučati kroglo, da drsi pojemajoče, se ustavi in se nato začne kotaliti nazaj?

**7. Kotaljenje valja po klancu.** Valj z maso  $m$  in polmerom  $R$  se kotali navzdol po klancu z naklonskim kotom  $\varphi$  (slika 3.64). Kolikšen je pospešek težišča valja?

Na valj učinkujeta teža  $mg$  in sila podlage; zadnjo razstavimo na pravokotno komponento  $N$  in na komponento  $F'$  v smeri klanca. Velja:

$$mg \sin \varphi - F' = ma_c$$

Med kotaljenjem se valj vrti pospešeno okrog osi skozi težišče s kotnim pospeškom  $\alpha$ , ki ga povzroča sila  $F'$  z navorom  $M = F'R$ :

$$\alpha = M/J = F'R/J$$

Dokler se valj še kotali, velja zveza:  $a_c = R\alpha$ , zato dobimo:

$$a_c = g \sin \varphi / (1 + J/mR^2) = (2/3)g \sin \varphi \quad (J = mR^2/2 \text{ za valj}) \text{ ter}$$

$$F' = a_c J / R^2 = mg \sin \varphi / (1 + mR^2/J) = (1/3)mg \sin \varphi$$

Če bi valj drsel navzdol translatorno brez trenja, bi se gibal s pospeškom  $g \sin \varphi$  (gl. str. 41), s kotaljenjem pa se pospešek zmanjša na  $(2/3)g \sin \varphi$ . Drsenje (translatorno) navzdol po klancu s trenjem pa je navadno precej počasnejše kot kotaljenje.

Če povečamo naklon  $\varphi$  klanca, se povečata tudi pospešek težišča valja in kotni pospešek vrtenja. V enakem razmerju se z naklonom povečuje tudi sila  $F'$ , ki je potrebna za pospešeno kotaljenje. Toda ta je omejena, njena zgornja meja je statična torna sila  $F_s = k_s N = k_s mg \cos \varphi$  (gl. str. 40). Ko  $F'$  doseže  $F_s$ , začne valj po klancu podrsavati. To se zgodi pri nagibu  $\varphi = \varphi_s$ , za katerega velja:

$$F' = F_s = k_s N \\ mg \sin \varphi_s / (1 + mR^2/J) = k_s mg \cos \varphi_s \text{ ali} \\ \tan \varphi_s = k_s (1 + mR^2/J) = 3k_s$$

Pri  $\varphi > \varphi_s$  valj med kotaljenjem navzdol po klancu podrsuje, zato je torna komponenta sile podlage enaka  $F_t = k_t N = k_t mg \cos \varphi$  in pospešek težišča valja je enak kot pri navadnem drsenju:  $a_c = g(\sin \varphi - k_t \cos \varphi)$ . Kotni pospešek valja tedaj določa dinamična torna sila  $F_t$ , ki vrti z navorom  $F_t R$ . Sledi:  $\alpha = F_t R / J = (2k_t g / R) \cos \varphi$ . Torej se kotni pospešek kotaljenja z večanjem strmine klanca zmanjšuje. Ob navpičnem zidu je celo nič. Valj se ob navpičnem zidu ne more kotaliti, saj ni sile, ki bi ga vrtela.

### Kotalno trenje

S kotaljenjem koles se lahko vozila premikajo po tleh veliko lažje, kot če drsijo. Ker kolo ne podrsava po tleh, torna sila ne zavira gibanja. V idealnem primeru, če se niti kolo niti podlaga pod bremenom ne deformirata, tako da se dotikata v eni sami točki, se lahko kolo kotali po vodoravni podlagi s stalno hitrostjo (če le zanemarimo upor zraka). Na kolo tedaj učinkujeta teža  $mg$  navzdol in nasprotno enaka sila podlage ( $N$ ) navzgor (slika 3.65).

Dejansko se kolo in podlaga zaradi bremena  $mg$  deformirata in se ne stikata le v eni točki temveč na širši stični površini (slika 3.66). Sila podlage je neenakomerno razporejena vzdol stične površine (na sprednji strani kolesa je močnejša kot na zadnjem); njena rezultanta  $N$  prijemlje v točki  $B$ , okrog katere se mora kolo na deformiranih tleh zakotaliti. Ker teža  $mg$  bremena nasprotuje tej zakotalitvi z navorom  $mgb$  ( $b$  je ročica teže glede na vodoravno os skozi kotalno točko  $B$ ), je potrebna potisna sila  $F$ , ki prevlada navor teže:

$$FR = mgb \quad \text{ali} \\ F = (b/R)mg$$

Količnik  $b/R$  je torej **koeficient kotalnega trenja**. Kot merilo za velikost kotalnega trenja običajno navajamo kar ročico  $b$  (v cm), npr. za leseno kolo na leseni podlagi je  $b$  okrog 0,2 cm, jekleno kolo na jekleni podlagi 0,025 cm.

### Proste osi togega telesa

Doslej smo obravnavali vrtenje telesa okrog osi, katere smer se med vrtenjem ne spreminja, bodisi da os miruje (vpeta v ležaje) ali pa se paralelno premika, npr. pri kotaljenju. Gibanje telesa se precej zamota, če dovolimo, da se smer osi med gibanjem spreminja.

Recimo, da je telo podprt v težišču, vendar tako da se lahko prosto vrti okrog poljubne osi skozi težišče. Telo zavrtimo s kotno hitrostjo  $\omega$  okrog neke osi, ki naj ne sovпадa z glavnimi vztrajnostnimi osmi telesa (gl. str. 66), in ga nato prepustimo samemu sebi.

Telo je sestavljeno iz masnih elementov  $dm$  (slika 3.67). Vsak vrteči se masni element  $dm$  vleče rotacijsko os s centrifugalno silo  $x\omega^2 dm$  radialno proč (gl. str. 44);  $x$  je pravokotna oddaljenost masnega elementa  $dm$  od vrtilne osi. Navor te sile glede na vodoravno os skozi težišče  $C$  je  $zx\omega^2 dm$ , pri čemer merimo koordinato  $z$  iz težišča (nad težiščem je pozitivna, pod njim pa negativna). Celotno togo telo potemtakem deluje na vrtilno os z navorom:

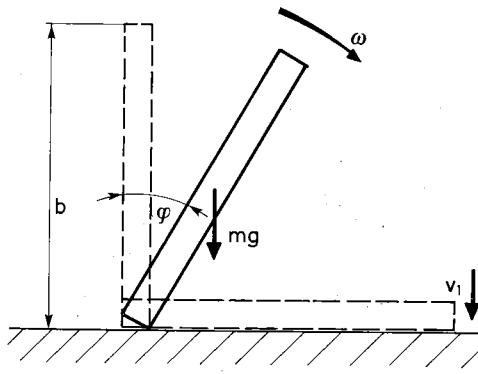
$$M_{cf} = \int x z \omega^2 dm = \omega^2 J_{xz} \quad (3.52)$$

ki se imenuje **centrifugalni navor**.  $J_{xz}$  je centrifugalni vztrajnostni moment telesa (gl. 3.35). Zaradi centrifugalnega navora se smer vrtilne osi med vrtenjem spreminja, če os ni vpeta v ležaje. Ležaji kompenzirajo učinek centrifugalnega navora in vrtilna os se ne spreminja.

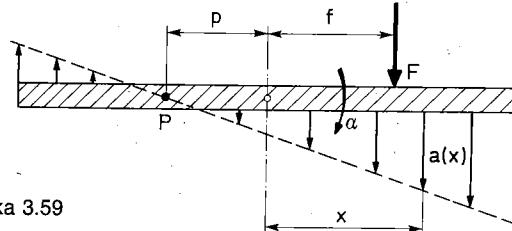
Centrifugalni navor je nič in ležaji niso potrebni, če je vrtilna os ena od glavnih osi vztrajnostnega elipsoida (gl. str. 67), glede na katero so centrifugalni vztrajnostni momenti  $J_{xz}$  itd. nič. Zaradi tega se glavne vztrajnostne osi telesa imenujejo tudi **proste osi**. Vsako togo telo (ne glede na obliko) ima najmanj tri proste osi, ki so pravokotne druga na drugo. Vrteče se telo ne obremenjuje ležajev, če se vrti okrog proste osi. Osi hitro vrtečih se rotorjev morajo zato biti proste osi, ker lahko drugače centrifugalni navor (ki narašča s kvadratom kotne hitrosti vrtenja) poškoduje ležaje.

Vrtilna os prostega telesa je stalna, če je ena od prostih osi telesa. Vendar pa vrtenje telesa okrog posameznih prostih osi ni enako stabilno. Pokaže se (dokaz presega okvir naše stopnje), da je vrtenje najbolj stabilno okrog tistih prostih osi, glede na katere ima telo ali **največji ali najmanjši vztrajnostni moment**. Te proste osi so **stabilne**. Če vrteče se telo malo zmotimo, da se izmakne iz stabilne proste osi, se po kratkem kolebanju samo povrne v prvotno stanje in se spet vrti okrog stabilne proste osi. Vrtenje telesa okrog prostih osi z **vmesnim vztrajnostnim momentom** pa je **labilno**. Že majhen zunanji dražljaj zadostuje, da se vrtilna os začne prekopicevati; gibanje telesa se umiri, ko telo najde eno od bližnjih stabilnih prostih osi, okrog katere se potem vrti. Na sliki (3.68a) vrtimo okroglo ploščico, ki visi na nitki, okrog njene diametralne osi. Ta os je labilna, zato se ploščica začne nemirno premetavati. Čez nekaj časa se težišče ploščice dvigne, tako da je ploščica vodoravna in se vrti okrog simetrijske osi (pravokotno na ploščico skozi njen sredino), ki je stabilna prosta os (slika 3.68b). Geometrijska os rotacijsko simetričnih teles je večinoma stabilna prosta os.

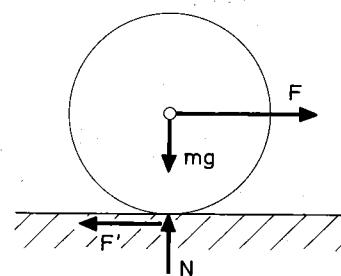
Metalec diska mora zavrteti disk okrog stabilne proste osi, da se ta med letenjem ne spreminja (zaradi česar bi se spremjal upor zraka). Kako leti krogla iz puške?



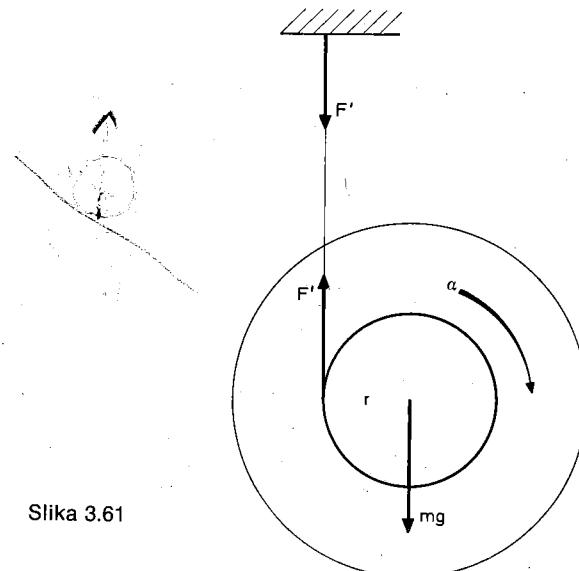
Slika 3.58



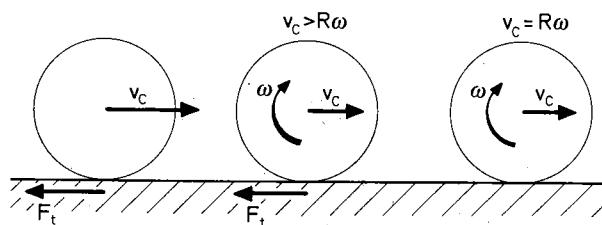
Slika 3.59



Slika 3.60



Slika 3.61



Slika 3.62

## Vrtilna količina

Vrtilna količina  $\Gamma$  ima pri vrtenju podobno vlogo, kakršno ima gibalna količina  $G$  pri premem gibanju. Kakor lahko Newtonov zakon dinamike za premo gibanje napišemo v obliki:  $F = dG/dt$  (gl. 2.3), ga lahko za vrtenje napišemo v obliki:

$$\boxed{M = d\Gamma/dt} \quad (3.53)$$

Z vrtilno količino se bomo najprej seznanili na enostavnem primeru: točkasto telo  $m$  se giblje s hitrostjo  $v$ , torej z gibalno količino  $G = mv$ . Nanj učinkuje sila  $F$ , ki spreminja njegovo gibalno količino:  $F = dG/dt$ . Navor te sile glede na os skozi koordinatno izhodišče 0 je  $M = r \times F$ , kjer je  $r$  krajevni vektor telesa  $m$  iz koordinatnega izhodišča (gl. 3.39). Naprej postopamo takole:

$$M = r \times F = r \times (dG/dt) = d(r \times G)/dt - (dr/dt) \times G$$

Ker je  $dr/dt = v$ , izpade zadnji člen, saj je vektorski produkt dveh kolinearnih vektorjev nič:

$$M = d(r \times G)/dt = d\Gamma/dt$$

Kjer je

$$\boxed{\Gamma = r \times G = r \times mv} \quad (3.54)$$

**vrtilna količina točkatega telesa** glede na izhodišče 0.

Recimo, da telo  $m$  kroži po krogu s polmerom  $r$  okrog izhodišča 0. Vektorski produkt  $r \times v$  tedaj znaša  $rv = r^2\omega$  in ima smer osi kroženja. Vrtilna količina  $\Gamma$  krožeckega točkastega telesa ima torej smer vrtilne osi (to je smer  $\omega$ ) in je enaka:

$$\boxed{F = mr^2\omega = J\omega} \quad (3.55)$$

pri čemer je  $J$  vztrajnostni moment krožeckega točkastega telesa. Vidimo, da je izraz za vrtilno količino  $\Gamma$  povsem analogen izrazu za gibalno količino  $G = mv$  (namesto mase  $m$  imamo vztrajnostni moment  $J$ , namesto hitrosti  $v$  pa kotno hitrost  $\omega$ ).

Če na krožecko telo  $m$  učinkuje sila  $F$  nima navora:  $M = 0$  (npr. da ima smer k središču kroženja, t. i. **centralna sila**), se **vrtilna količina krožeckega telesa ohranja**:  $\Gamma = \text{konst.}$ ; ohranja se tako hitrost kot ravnina kroženja.

Kroglico  $m$  položimo na vodoravno gladko ploščo (slika 3.69). Kroglica je privezana na vrvico, ki vodi skozi luknjo v sredini plošče. Zaženemo jo, da začne na plošči krožiti s kotno hitrostjo  $\omega$  po krogu s polmerom  $r$ . Nato vlečemo vrvico s silo  $F$  navzdol, da se polmer kroženja  $r$  zmanjšuje. Sila  $F$  deluje na kroglico v radialni smeri, zato je njen navor nič in kroglica kroži s stalno vrtilno količino; produkt  $r^2\omega$  se ohranja. Ker se  $r$  zmanjšuje, se povečuje kotna hitrost kroženja; kroglica kroži tem hitreje, čim krajša je vrvica:  $r_1^2\omega_1 = r_2^2\omega_2$ .

Planeti krožijo okrog Sonca po eliptičnih tirnicah; nanje učinkuje privlačna gravitacijska sila Sonca, ki je centralna sila (njen navor je nič), zato se vrtilna količina planetov ohranja: ravnina kroženja je stalna; ko se razdalja planeta do Sonca zmanjša (npr. pozimi), se hitrost planeta poveča (in obratno).

Izraz (3.54) bomo posplošili, da bomo dobili **vrtilno količino točega telesa**, ki se vrvi s kotno hitrostjo  $\omega$  okrog dane osi (slika 3.70). Telo v mislih razdelimo na masne elemente  $dm$ . En tak element kroži okrog osi  $\omega$  z obodno hitrostjo  $v = \omega \times r$  (gl. 1.53c). Vrtilna količina  $\Gamma$  celotnega telesa je vsota (integral) vrtilnih količin posameznih delov telesa:

$$\Gamma = \int r \times v dm \quad (3.56)$$

Ker je  $v = \omega \times r$ , dobimo naprej:

$$r \times v = r \times (\omega \times r) = r^2\omega - r(\omega \cdot r)$$

Vektorja  $r$  in  $\omega$  izrazimo s projekcijami v koordinatnem sistemu:

$$\begin{aligned} r &= x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \\ \omega &= \omega_1\mathbf{e}_x + \omega_2\mathbf{e}_y + \omega_3\mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (\text{gl. 1.1})$$

Zavrteti telo okrog osi  $\omega$  s kotno hitrostjo  $\omega$  je enako, kot zavrteti ga okrog osi  $x$  s kotno hitrostjo  $\omega_1$  in obenem okrog osi  $y$  s  $\omega_2$  ter okrog osi  $z$  s  $\omega_3$ .

$$\begin{aligned} r \times v &= (\omega_1\mathbf{e}_x + \omega_2\mathbf{e}_y + \omega_3\mathbf{e}_z)(x^2 + y^2 + z^2) - \\ &\quad - (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z)(\omega_1x + \omega_2y + \omega_3z) = \\ &= \mathbf{e}_x [(y^2 + z^2)\omega_1 - \omega_2xy - \omega_3xz] + \\ &+ \mathbf{e}_y [(z^2 + x^2)\omega_2 - \omega_3yz - \omega_1yx] + \\ &+ \mathbf{e}_z [(x^2 + y^2)\omega_3 - \omega_1zx - \omega_2zy] \end{aligned} \quad (3.56a)$$

Zgornji izraz poenostavimo, če usmerimo koordinatni sistem tako, da se koordinatne osi  $x-y-z$  ujemajo z glavnimi vztrajnostnimi osmi telesa (gl. str. 67); potem izpadejo integrali, ki vsebujejo produkte  $xy$ ,  $yz$  in  $zx$ , ter ostane:

$$\boxed{\Gamma = J_1\omega_1\mathbf{e}_x + J_2\omega_2\mathbf{e}_y + J_3\omega_3\mathbf{e}_z} \quad (3.57)$$

pri čemer so  $J_1$ ,  $J_2$  in  $J_3$  **glavni vztrajnostni momenti telesa** (gl. 3.37).

Vidimo, da vrtilna količina  $\Gamma$  vrtečega se telesa v splošnem nima enake smeri kot vrtilna os (to je  $\omega$ ).  $\Gamma$  ima smer  $\omega$  le za kroglasto telo ( $J_1 = J_2 = J_3 = J$  in  $\Gamma = J\omega$ ) ali če zavrtimo telo okrog ene od glavnih vztrajnostnih osi, tako da je npr.

$$\omega_2 = \omega_3 = 0 \text{ in } \omega_1 = \omega \text{ ter } \Gamma = J_1\omega\mathbf{e}_x = J_1\omega.$$

Geometrijska os rotacijsko simetričnih teles je ena od glavnih vztrajnostnih osi telesa. Če torej telo zavrtimo okrog te osi s kotno hitrostjo  $\omega$ , dobi vrtilno količino  $\Gamma = J\omega$ , kjer je  $J$  vztrajnostni moment telesa glede na to os. Da je res tako, se prepričamo neposredno iz enačbe (3.56):  $\Gamma = \int r \times v dm$ .

Zaradi simetrije lahko od vektorja  $r \times v$  upoštevamo le njegovo projekcijo na smer vrtilne osi, to je  $|\mathbf{r} \times \mathbf{v}| \mathbf{e}_\omega = r v \sin \delta \mathbf{e}_\omega = r_1 v \mathbf{e}_\omega = r_1^2 \omega \mathbf{e}_\omega = r_1^2 \omega (v = r_1 \omega, \text{gl. slika 3.71}).$

$$\Gamma = \int r_1^2 \omega dm = J\omega, \quad J = \int r_1^2 dm$$

Kakor velja za točkasto telo, velja tudi za togo telo: če je **rezultanta navorov nič ( $M = 0$ )**, se **vrtilna količina telesa ohranja**:  $\Gamma = \text{konst.}$ ; ohranjata se tako njena velikost kot smer. Pri kroglastem telesu ali če zavrtimo telo okrog njegove glavne vztrajnostne osi, se potemtakem **ohranja tudi smer vrtilne osi** (saj ima  $\Gamma$  enako smer kot  $\omega$ ).

To lastnost vrtečega se telesa izkorisčamo pri **giro-skopskem kompasu**. Osnosimetrično telo z velikim vztrajnostnim momentom je vgrajeno v posebno ohišje, tako da se lahko prosto vrta okrog poljubne osi skozi njegovo težišče. Telo v začetku zavrtimo z veliko kotno hitrostjo, da dobi čim večjo vrtilno količino, ki jo usmerimo natančno na sever. Ker je vpliv trenja in upora zraka na vrtenje gira zmanjšan na minimum, druge sile pa zaradi posebno oblikovanega ohišja ne morejo izmakniti vrtilne osi iz smeri sever-jug, se vrtilna količina gira in s tem tudi smer njegove vrtilne osi ohranjata. Četudi ladja z ohišjem giroskopa spremi-nja smer, os vrtečega se gira stalno kaže na sever.

### Vrtilna količina sestavljenih teles

Doslej smo razpravljali o vrtilni količini togega telesa. Netogo telo pa lahko med vrtenjem spreminja obliko oziroma velikost. Kako se zaradi tega spreminja njegova vrtilna količina? Pogosto se oblika telesa spremeni z učinkovanjem notranjih sil, ki učinkujejo med posameznimi deli telesa. Vemo, da se notranje sile vedno pojavljajo v parih nasprotno enakih sil (gl. str. 52). Tudi navori teh sil so nasprotno enaki, se medse-bojno uničujejo, zato ne vplivajo na celotno vrtilno količino telesa. Kljub spremembji oblike ali velikosti telesa zaradi učinkovanja notranjih sil se vrtilna količina telesa ne spremeni. Vrtilno količino telesa spreminjajo le navori zunanjih sil.

Recimo, da notranje sile razširijo telo, tako da se njegov vztrajnostni moment poveča. Ker se zaradi tega vrtilna količina  $\Gamma = J\omega$  ne spremeni, se kotna hitrost  $\omega$  vrtenja zmanjša, tako da je produkt  $J\omega$  enak:

$$\Gamma = J\omega = \text{konst.} = J_1\omega_1 = J_2\omega_2$$

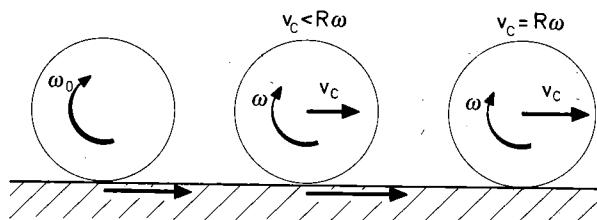
#### Primer:

Sedimo na vrtljivem stolu in se vrtimo s kotno hitrostjo  $\omega_1$ . Ko med vrtenjem iztegnemo roki, se poveča vztrajnostni moment (od  $J_1$  na  $J_2$ ), toda obenem se zmanjša kotna hitrost vrtenja (od  $\omega_1$  na  $\omega_2 = \omega_1 J_1/J_2$ ). Skrčitev rok zopet pospeši vrtenje itd.

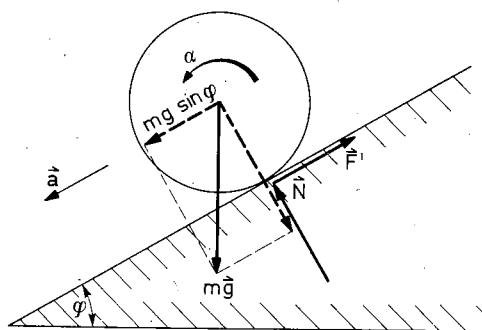
Umetnostna drsalka na ledu dela pirueto tako, da se najprej ob razprtih rokah (čim večji vztrajnostni moment) poganja z eno nogo, da dobi čim večjo vrtilno količino okrog vrtilne osi skozi drugo nogo (priskrbi jo navor zunanje sile med drsalko in ledom). Nato se postavi na konico drsalke in dvigne roki v smeri osi, da se njen vztrajnostni moment čim bolj zmanjša – ob tem se hitrost vrtenja zelo poveča.

Premisli, kako skače skakalec v vodo. Kako spreminja svoj vztrajnostni moment okrog vodoravne osi in kako se zaradi tega spreminja njegovo vrtenje?

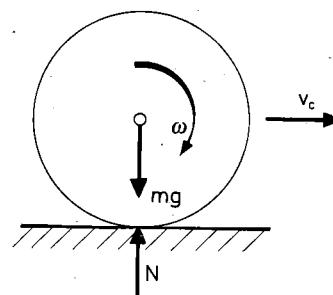
Kar smo zgoraj povedali za vrteče se netogo telo, velja tudi za **sistem teles**, ki se vrtijo okrog skupne osi. **Vrtilna količina celotnega sistema je algebraična vsota vrtilnih količin posameznih teles** (upoštevati moramo predznak posameznih vrtilnih količin, to je smisel vrtenja). Med posameznimi telesi sistema v splošnem učinkujejo **notranje sile**. Te lahko spreme-



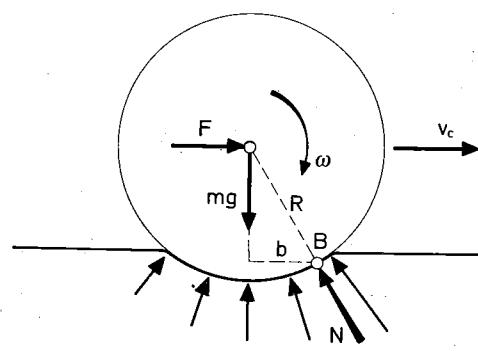
Slika 3.63



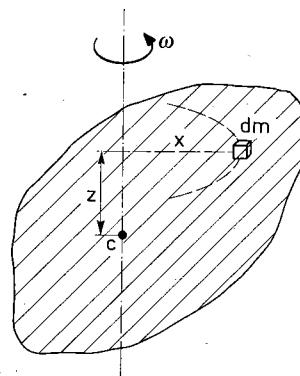
Slika 3.64



Slika 3.65



Slika 3.66



Slika 3.67

nijo vrtilno količino posameznih teles, ne morejo pa spremeniti celotne vrtilne količine sistema. Ta se spreminja le zaradi navorov zunanjih sil. Če zunanjih navorov ni (če je njihova rezultanta nič), se vrtilna količina sistema teles ohranja (zakon o ohranitvi vrtilne količine sistema).

Recimo, da mirujemo na vrtljivem stolu in držimo v rokah vrteče se kolo, tako da je os kolesa vzporedna vrtilni osi stola. Ker s stolom vred mirujemo, je vrtilna količina celotnega sistema kar enaka vrtilni količini kolesa ( $= \Gamma_1 = J_1\omega_1$ ). Nenadoma zasukamo os vrtečega se kolesa za  $180^\circ$ , tako da je spet vzporedna osi stola, vendar se zdaj kolo vrti v nasprotni smeri kot prej. Opazimo, da se pri tem sami s stolom vred začnemo vrteti v enaki smeri, kot se je prvotno vrtelo kolo. Z navorom notranjih sil rok smo spremenili vrtilno količino kolesa od  $\Gamma_1$  na  $-\Gamma_1$ . Ker mora biti vrtilna količina celotnega sistema še vedno  $\Gamma_1$ , se začnemo vrteti z vrtilno količino  $\Gamma_2 = J_2\omega_2$  ( $J_2$  je naš in stolov vztrajnostni moment), tako da je  $\Gamma_1 = \Gamma_2 + (-\Gamma_1)$  ali  $\Gamma_2 = 2\Gamma_1$ , in  $\omega_2 = 2\omega_1 J_1/J_2$ .

### Primer:

Kolo z vztrajnostnim momentom  $J_1$  je nasajeno na navpično os, okrog katere se lahko prosto vrti; kolo v začetku miruje. Na isti osi je nasajeno drugo kolo z vztrajnostnim momentom  $J_2$  (slika 3.72a). Drugo kolo zavrtimo s kotno hitrostjo  $\omega_0$  in nato spustimo, da pade na prvo, mirajoče kolo. Zgornje kolo se še vrti, vendar podrsuje po mirajočem kolesu. Med njima začne učinkovati drsno trenje. Zgornje kolo čuti navor torne sile, s katerim spodnje kolo zavira njegovo vrtenje. Obenem spodnje kolo čuti enako velik (a nasprotno usmerjen) navor, s katerim ga zgornje kolo začenja vrteti. Čez čas kolesi prenehata podrsavati in se vrtita s skupno kotno hitrostjo (slika 3.72b). Velja:

$$J_1\omega_1 = (J_1 + J_2)\omega \quad \text{ali} \quad \omega = \omega_1 J_1 / (J_1 + J_2)$$

Kaj pa, če se spodnje kolo v začetku vrti v naprotnej smeri kot zgornje kolo? Kako morata biti povezani začetni kotni hitrosti obeh koles, da se kolesi po končanem podrsavanju ustavita?

### Vrtavka

Vrtavka je rotacijsko simetrično kolo z zelo velikim vztrajnostnim momentom ( $J$ ) glede na geometrijsko os. Zavrtimo jo s precejšnjo kotno hitrostjo ( $\omega$ ) okrog stabilne geometrijske osi in jo postavimo na konico, tako da je njeno težišče nad dotikališčem (slika 3.73). Njena os v splošnem oklepa kot  $\theta$  z navpičnico skozi dotikališče.

Vrtenje vrtavke je v splošnem precej zapleteno. Poleg tega da se vrti okrog lastne geometrijske osi (z vrtilno količino  $\Gamma = J\omega$ ), njena os tudi precesira, to je pri stalnem kotu  $\theta$  se suče okrog navpičnice po plašču stožca. Možno je tudi (odvisno od tega, kako sprožimo njeno gibanje), da se med precesiranjem izmenično spreminja kót  $\theta$ , tako da vrtavka os niha gor (θ se zmanjšuje) in dol (θ se povečuje). Tej vrsti vrtavkinega gibanja pravimo nutacija.

Spolšnega gibanja vrtavke ne bomo mogli obravnavati. Predpostavili bomo, da se vrtavka vrti tako hitro, da je vrtilna količina  $J\omega$  zaradi njenega vrtenja okrog geometrijske osi velika v primerjavi z vrtilno količino zarađadi precesije ali morebitne nutacije. Vektor celotne vrtilne količine  $\Gamma$  praktično sovпадa z vrtavkino osjo, kar pomeni, da se smer vrtavkine osi spreminja s časom podobno kot smer celotne vrtilne količine  $\Gamma$ . Ta predpostavka seveda odpove, ča se vrtavka vrti prepočasi; tedaj je pomembna tudi nutacija.

Recimo, da potegnemo vrh pokončno usmerjene vrteče se vrtavke s silo  $\mathbf{F}$  k sebi. Pričakovali bi, da se vrtavkina os nagne k nam. Toda hitro vrteča se vrtavka reagira drugače. Vlečna sila  $\mathbf{F}$  deluje na vrtavko z navorom  $\mathbf{M}$ , ki je usmerjen v desno (slika 3.74). Zaradi tega navora se vrtilna količina vrtavke  $\Gamma$  v času dt spremeni za  $d\Gamma = \mathbf{M}dt$  (gl. 3.53). Os vrtavke se nagne v desno, nova vrtilna količina je  $\Gamma' = \Gamma + \mathbf{M}dt$ . Če je vrtilni moment  $\mathbf{M}$  stalen, se os vrtavke nagiba toliko časa, dokler ne kaže v smer  $\mathbf{M}$ , nato se v tej smeri umiri (čemur pomaga tudi trenje).

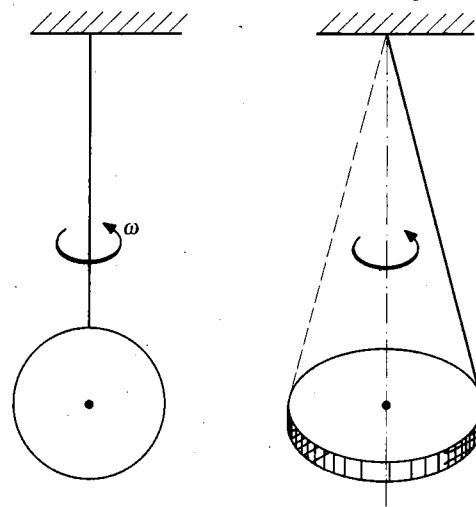
Premisli, kako reagira sprednje kolo z volonom pri biciklu, če se nagnemo v levo.

Precesijo vrtavkine osi povzroča navor vrtavkine teže. Vrtavko, ki se vrti z veliko vrtilno količino  $\Gamma = J\omega$ , previdno postavimo na mizo, tako da njena os oklepa kót  $\theta$  z navpičnico. Ko jo previdno spustimo (da ne vzbudimo nutacije), začne njena os precesirati okrog navpičnice. Na vrtavko namreč deluje navor njene teže (glede na trenutno os skozi dotikališče):  $mgL\sin\theta$ , kjer je  $m$  masa vrtavke,  $L$  pa oddaljenost njenega težišča od podporne točke. Ker navor  $M$  deluje stalno, se vrtilna količina vrtavke spremeni v času dt za  $d\Gamma = Mdt$  in njena os se zasuče (po plašču stožca s kotom  $2\theta$  ob vrhu – podporni točki) za kot  $d\phi = d\Gamma / (\Gamma \sin\theta) = (mgL / \Gamma)dt$  (gl. slika 3.73). Sledi, da vrtavka precesira s kotno hitrostjo

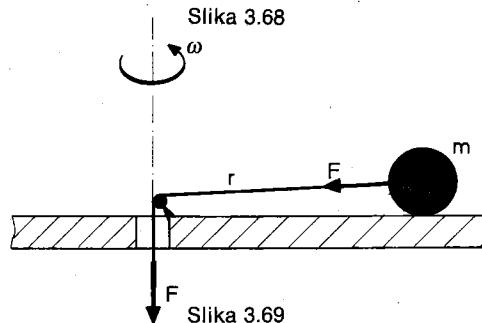
$$\Omega = d\phi/dt = mgL/J\omega$$

Značilno je, da je kotna hitrost precesije neodvisna od naklonskega kota  $\theta$  vrtavkine osi.

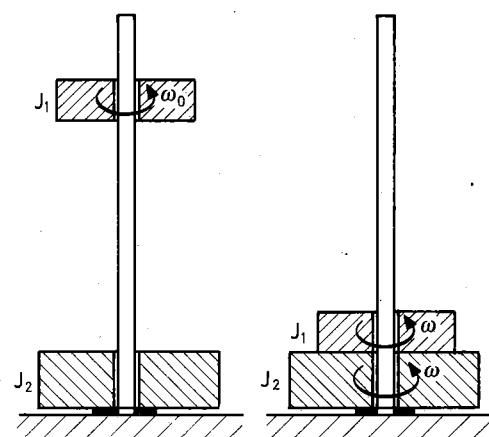
Zemlja ima zaradi dnevnega vrtenja vrtilno količino. Nanjo učinkuje gravitacijska privlačna sila Sonca (in deloma Lune). Ako bi bila popolna krogla, bi bil navor gravitacijske sile nič in smer Zemljine vrtilne količine (to je smer polarne osi) bi bila stalna. Toda Zemlja je ovalna in njena os je nagnjena za  $23,5^\circ$  glede na pravokotnico na ravnino ekliptike. Sonce učinkuje na odbijeni del Zemlje z gravitacijsko privlačno silo, ki je večja za bližnji del ( $F_2$  na sliki 3.75) kot za oddaljeni del ( $F_1$ ). Navor teh sil je različen od nič in stalno učinkuje na vrtavko – Zemljo, zaradi česar njena polarna os počasi precesira. Obhodni čas Zemljine precesije (=  $2\pi/\Omega$ ) je okrog 26 000 let. »Trenutno« kaže Zemljina os v smer zvezde Severnice.



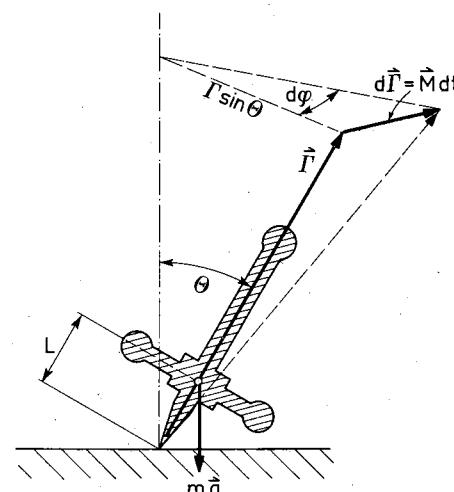
Slika 3.68



Slika 3.69

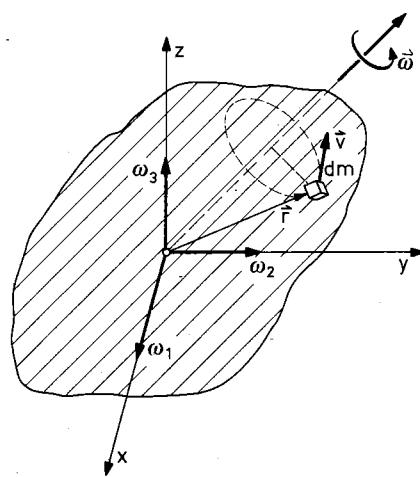


Slika 3.72

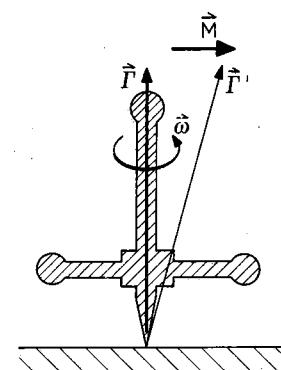


Slika 3.73

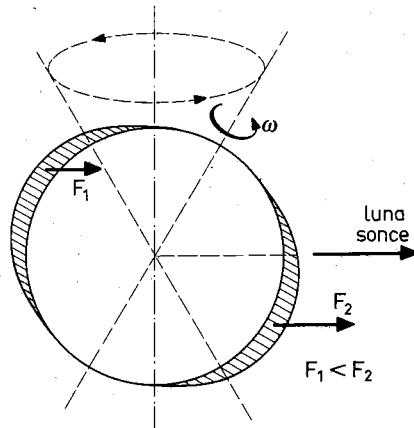
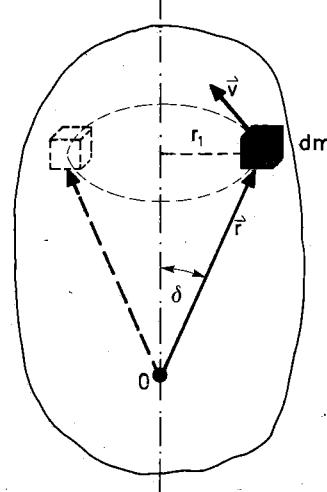
Slika 3.70



Slika 3.74



Slika 3.71



Slika 3.75

Newtonov zakon dinamike  $\mathbf{F} = ma$  omogoča izračun pospeška, če so znane sile, učinkajoče na telo. Izračunani pospešek integriramo in dobimo hitrost ( $v$ ) telesa kot funkcijo časa. Račun se zaplete, če se sile spremnijo s časom oziroma s krajem.

Kadar je znano, kako so sile odvisne od časa, olajšamo zgoraj omenjeni problem tako, da uporabimo **gibalno količino** ( $G = mv$ ) in **snek sile** (gl. 2.2–2.5). Zadnji je dan s produktom sile in časovnim intervalom njenega učinkovanja ter je enak spremembni gibalne količine telesa. Končna gibalna količina ( $mv_2$ ) je enaka vsoti začetne gibalne količine ( $mv_1$ ) in sunka sile, ki ga je telo med potjo prejelo. Tako lahko s pomočjo sunka sile ugotovimo končno hitrost  $v_2$ , ne da bi morali računati, kolikšna je v vmesnih trenutkih.

Nekaj podobnega napravimo, če vemo, kako se sila spreminja s krajem. Tedaj silo integriramo po poti. Dobljeni produkt se imenuje **delo sile** ( $A$ ) in je enak spremembni **kinetične energije telesa** ( $W_k = mv^2/2$ ). Končna kinetična energija telesa ( $W_{k2} = mv_2^2/2$ ) je vsota njegove začetne kinetične energije ( $W_{k1} = mv_1^2/2$ ) in dela  $A$ , ki ga telo prejme spotoma (ki ga sile opravijo spotoma). Torej lahko tudi v tem primeru določimo končno hitrost telesa, ne da bi jo bilo treba poznati v vseh vmesnih trenutkih.

Zgornjo ugotovitev dokažemo tako, da Newtonov zakon dinamike  $\mathbf{F} = ma$  pomnožimo na levi in desni strani skalarno z vektorjem premika telesa  $ds$ :

$$\mathbf{F} \cdot ds = ma \cdot ds$$

Ker je  $a = dv/dt$  in  $v = ds/dt$ , lahko zapišemo:

$$ma \cdot ds = m(dv/dt) \cdot ds = mdv \cdot (ds/dt) = mv \cdot dv = md(v^2)/2 = d(mv^2/2)$$

tako da dobimo:

$$\mathbf{F} \cdot ds = d(mv^2/2) \quad (4.1)$$

Skalarni produkt sile  $\mathbf{F}$  in premika  $ds$  njenega prijemalnika je po definiciji **delo sile** na poti  $ds$  (označimo ga z  $dA$ ), količina  $mv^2/2$  pa je **kinetična energija telesa** z maso  $m$  pri hitrosti  $v$ :

$$W_k = mv^2/2 \quad (4.2)$$

Vidimo, da je **delo sile enako spremembni kinetične energije telesa**:

$$dA = dW_k$$

Z delom in kinetično energijo smo se sicer že seznanili v srednji šoli, toda ti količini sta dovolj pomembni, da zaslužita ponovitev.

### Delo sile in moč

## 4.

# ENERGIJA

**Delo sile** je po definiciji **skalarni produkt sile in premika njenega prijemalnika**. Na kratki poti  $ds$  opravi sila  $\mathbf{F}$  delo:

$$dA = \mathbf{F} \cdot ds = F ds \cos\varphi = F' ds \quad (\text{slika 4.1}) \quad (4.3a)$$

kjer je  $F'$  projekcija sile  $\mathbf{F}$  na smer premika,  $\varphi$  pa kót med smerjo sile in smerjo premika. **Delo je torej enako produktu premika in projekcije sile na smer premika.** Pravimo, da delo opravlja projekcija sile na smer premika.

Sila, ki je pravokotna na smer premika, med tem premikom ne opravlja dela:  $dA = 0$  za  $\varphi = 90^\circ$ . Če sila kaže v smer premika ( $\varphi < 90^\circ$ ), je njen delo pozitivno. Nasprotno: delo sile je negativno, če sila nasprotuje premiku ( $\varphi > 90^\circ$ ), če ima njena projekcija  $F'$  nasprotno smer kot premik.

Celotno delo  $A$  na daljši poti  $s$  je algebrska vsota (oziroma integral) diferencialnih del  $dA$ , opravljenih na posameznih kratkih odsekih  $ds$ :

$$A = \int dA = \int \mathbf{F} \cdot ds \quad (4.3b)$$

Če je celoten premik  $s$  premočrten in sila  $\mathbf{F}$  med potjo stalna, lahko izpostavimo  $\mathbf{F}$  iz integrala in dobimo za delo preprost izraz:

$$A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F s \cos \varphi \quad (4.3c)$$

Sila opravi na dani poti največ dela, če je usmerjena v smer premika ( $\varphi = 0^\circ$ , tedaj dela celotna sila):

$$A = Fs \text{ za } \varphi = 0^\circ$$

**Merske enote za delo:** **J (joule, izg. džul) = Nm =  $= \text{kgm}^2/\text{s}^2$**  (toliko dela opravi sila 1 N na poti 1 m, če kaže v smer premika); večji enoti sta  $\text{kJ} = 10^3 \text{J}$  (kilodžul) ter  $\text{MJ} = 10^6 \text{J}$  (megadžul). Stari enoti: **kpm** = 9,81 J (kilopondmeter) ter **erg** = dina · cm =  $10^{-7} \text{J}$ .

Recimo, da na telo učinkuje več sil hkrati, npr.  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots$  Med danim premikom telesa opravijo sile, ki učinkujejo v smeri premika, pozitivno delo, zaviralne sile (ki premiku nasprotujejo) pa negativno delo. Celotno delo vseh sil je algebrska vsota del posameznih sil:

$$A = A_1 + A_2 + \dots$$

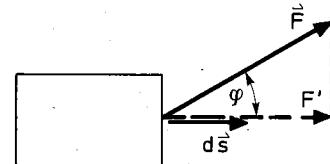
Če so premiki prijemališč posameznih sil enaki, npr.  $\mathbf{s}$  (kot pri translatornem premiku telesa), velja:  $A_1 = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{s}, A_2 = \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{s}, \dots$  ter

$$A = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots) \cdot \mathbf{s} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$$

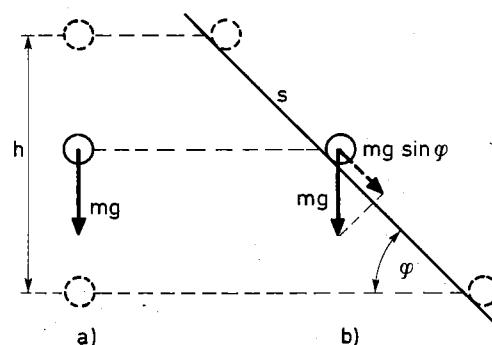
kjer je  $\mathbf{F}$  rezultanta delujočih sil. Pri **translatornem premiku telesa je celotno delo vseh delujočih sil kar enako delu rezultante sil**. To seveda ne velja za premike, kjer se prijemališča sil različno premikajo, kot npr. pri vrtenju telesa.

### Primeri:

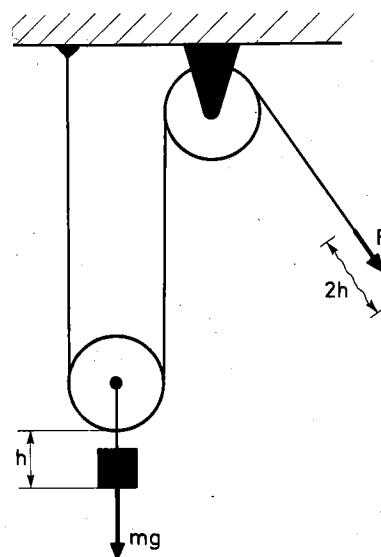
- Med navpičnim spustom telesa  $m$  za višinsko razliko  $h$  (slika 4.2a) opravi **teža telesa** pozitivno delo  $A = mgh$ . Enako veliko dela opravi teža telesa pri poševnem spustu navzdo po klancu z naklonskim kotom  $\varphi$  (slika 4.2b). Res je pot daljša ( $s = h/\sin\varphi$ ), zato pa dela ne opravlja celotna teža  $mg$  ampak le njena dinamična komponenta  $F_d = mg\sin\varphi$ , tako da je  $A = F_d s = mg\sin\varphi \cdot h/\sin\varphi = mgh$ .



Slika 4.1



Slika 4.2



Slika 4.3

Med gibanjem navzdol je delo teže pozitivno in enako  $mgh$ , kjer je  $h$  višinska razlika spusta (neodvisno od strmine spuščanja). Med dviganjem pa teža telesa opravlja negativno delo ( $= -mgh$ ), medtem ko je pri premikanju v vodoravni smeri delo teže nič.

**2. Vlečna sila  $F$**  vleče vrv, ki vodi prek pritrjenega in gibljivega škripca, in s tem dviguje breme  $m$  (slika 4.3). Koliko dela opravita vlečna sila  $F$  in teža bremena ( $mg$ ), ko se breme dvigne za višino  $h$ ?

Teža bremena med dvigom za  $h$  opravi negativno delo  $A_1 = -mgh$ . Prijemališče vlečne sile  $F$  se premakne za  $2h$  (gibljivi škripce se kotali navzgor po levi viseči vrvi, zato se vrv na desni strani tega škripca dviguje dvakrat hitreje kot središče škripca, gl. kotaljenje, str. 74), torej ta sila opravi delo  $A_2 = F \cdot 2h$ . Obe sili skupaj opravita delo:

$$A = A_1 + A_2 = (2F - mg)h$$

Če se breme dviguje enakomerno, je  $2F = mg$  in zato  $A = 0$  (kolikor pozitivnega dela opravi vlečna sila  $F$ , koliko negativnega opravi teža bremena in je zato celotno delo nič).

**3. Delo prožne sile.** Ko raztegujemo prožno vzmet, premagujemo silo prožnosti, s katero vzmet nasprotuje raztezku; ta narašča premo sorazmerno z raztezkom  $x$  vzmeti. Vlečna sila se povečuje z raztezkom vzmeti po enačbi:  $F = kx$  ( $k$  je konstanta prožnosti vzmeti, gl. str. 43). Ko se raztezek vzmeti poveča od  $x$  na  $x + dx$  (to je za  $dx$ ), opravi vlečna sila  $F = kx$  delo  $dA = Fdx = kxdx$ . Celotno delo, potrebno, da se vzmet raztegne od 0 do končnega  $x$ , je enako:

$$A = \int dA = \int_0^x kxdx = kx^2/2 \quad (4.4)$$

Prožno vzmet raztegnemo za  $x_1 = 2$  cm, za kar je potrebna sila  $F_1 = 5$  N. Koliko dela mora opraviti vlečna sila, da poveča raztezek te vzmeti z  $x_1$  na  $x_2 = 6$  cm?

$$A = \int_{x_1}^{x_2} kxdx = (k/2)(x_2^2 - x_1^2) = (F_1/2x_1)(x_2^2 - x_1^2) = 0,4 \text{ J}$$

### Delo sile pri vrtenju

Med vrtenjem telesa okrog stalne osi krožijo prijemališča delujočih sil v ravninah, ki so pravokotne na vrtilno os. Zatorej sile, ki so vzporedne z vrtilno osjo, med vrtenjem ne opravljajo dela (gl. str. 64). Delo opravljajo projekcije sil na ravnino, ki je pravokotna na vrtilno os. Recimo, da sila  $F$  leži v tej ravnini; njen prijemališče je npr. oddaljeno od vrtilne osi za  $r$  (slika 4.4).

Med majhnim zasukom telesa za kót  $d\varphi$  se prijemališče sile  $F$  premakne za ločni element  $ds = rd\varphi$ , zato sila  $F$  opravi delo:

$$dA = F'ds = F\sin\theta \cdot rd\varphi$$

Kjer je  $\theta$  kót, ki ga smer sile oklepa z radijem  $r$ . Produkt  $r\sin\theta$  je ročica sile ( $r'$ , gl. str. 64) in dobimo:

$$dA = Fr'd\varphi = Md\varphi$$

Pri čemer je  **$M$  navor** sile  $F$ .

**Pri vrtenju je delo enako produktu navora in kota zasuka.** Pravimo, da pri vrtenju opravlja delo navor sile.

Zgoraj smo vzeli, da sila  $F$  leži v ravnini, pravokotno na vrtilno os. Navor sile  $M = r X F$  (gl. 3.22) ima torej smer vrtilne osi, enako kakor kót zasuka  $d\varphi$  (gl. str. 23). Če sila  $F$  ne leži v tej ravnini, moramo upoštevati projekcijo navora  $M$  na smer vrtilne osi, to je vzeti skalarni produkt navora in kota zasuka:

$$dA = M \cdot d\varphi$$

Celotno delo, ki ga opravi navor  $M$  pri večjem zasuku, je dano z integralom:

$$A = \int M \cdot d\varphi \quad (4.5)$$

Kadar učinkuje na vrteče se telo hkrati več navorov, v splošnem izračunamo delo vsakega navora posebej. Le pri togem telesu, če je zasuk prijemališča vsake sile enak, dobimo celotno delo neposredno iz gornje enačbe (4.5), pri čemer je  $M$  rezultanta vseh delujočih navorov.

### Primer:

1. **Vrv je navita na obodu gredi,** ki se lahko vrti okrog vodoravne osi (slika 4.5). Na viseči konec vrv obesimo utež  $m$ . Koliko dela opravi teža uteži med spustom za  $h$ ? Koliko od tega dela prejme sama utež in koliko vrteča se gred?

Med spustom za  $h$  opravi teža uteži delo  $mgh$ . Če bi utež prosto padala, bi to delo v celoti povečevalo njeni kinetični energiji in bi zato prosto padala. Ker pa je privedana na vrv, njeni padanje zadržuje sila  $F$  v vrv, ki opravlja negativno delo. Utež zato prejme le delo  $A_1 = (mg - F)h$ .

Sila  $F$  vrti gred z navorom  $M = RF$ . Ko se utež spusti za  $h$ , se gred zasuče za kót  $\varphi = h/R$  in sila  $F$  opravi delo  $A_2 = M\varphi = RF \cdot h/R = Fh$ , ki ga prejme gred. Velja:  $A_1 + A_2 = mgh$ . Sila  $F$  v vrv torej omogoča, da se nekaj opravljenega dela prenese z uteži na gred. Delo  $A_1$  povečuje kinetični energiji padajoče uteži, delo  $A_2$  pa kinetični energiji vrteče se gredi.

2. **Vijak** omogoča spremenjanje dela navora med vrtenjem v delo sile pri linearinem premiku. Ko vijak zavrtimo z navorom  $M$  za polni kót  $2\pi$  (in opravimo delo  $A = M\varphi = 2\pi M$ ), se vijak pomakne za  $h$  (višina navoja) in potisne naprej s silo  $F$ , tako da je:  $A = 2\pi M = Fh$  ali  $F = 2\pi M/h$ .

### Moč

Poleg dela ( $A$ ) je pomemben tudi časovni interval, v katerem je delo opravljeno, to je pomembna je **moč ( $P$ )**, ki predstavlja delo, opravljeno v časovni enoti. Če se delo  $dA$  opravi v kratkem časovnem intervalu  $dt$ , je moč enaka:

$$P = dA/dt \quad (4.6)$$

Merska enota moči je 1 W (watt) = J/s. Stroj dela z močjo 1 W, če vsako sekundo opravi 1 J dela. stare enote moči: 1 kpm/s = 9,81 W, KM (konjska moč, HP) = 75 kpm/s = 736 W = 0,736 kW. Če delamo s stalno močjo  $P$ , opravimo v času od 0 do  $t_0$  delo:

$$A = Pt_0 \quad (P = \text{konst.}) \quad (4.7)$$

Enoto dela – J = Nm = kgm<sup>2</sup>/s<sup>2</sup> – pogosto izrazimo z enoto moči in pišemo:

$$J = \text{Ws (wattsekunda)}$$

Večji enoti dela te vrste sta:

$$\text{Wh (wattura)} = W \cdot h = W \cdot 3600s = 3,6 \text{ kJ}$$

$$\text{kWh (kilowattura)} = \text{kW} \cdot h = 3,6 \text{ MJ}$$

Delo 1 kWh opravi stroj, ki dela eno uro s stalno močjo 1 kW.

Če se moč  $P$  spreminja s časom, računamo opravljeno delo takole: v kratkem časovnem intervalu  $dt$  opravljeno delo znaša:  $dA = P(t)dt$ , v daljšem času (npr. od 0 do  $t_0$ ) pa:

$$A = \int dA = \int_0^{t_0} P(t)dt \quad (4.7a)$$

Na grafu (slika 4.7), ki prikazuje odvisnost moči od časa,  $P(t)$ , je opravljeno delo predstavljeno s ploščino pod krivuljo moči. Pri časovno spremenljivi moči nas zanima **povprečna moč  $\bar{P}$** , to je moč, s katero moramo stalno delati, da opravimo enako veliko dela ( $A$ ) kot pri spremeljivi moči, to je:

$$A = \bar{P}t_0$$

Na časovnem grafu moči (slika 4.7) postavimo povprečno moč  $\bar{P}$  tako visoko, da je ploščina pravokotnika  $\bar{P}t_0$  enaka ploščini  $A$  pod krivuljo moči, to je:

$$\begin{aligned} \bar{P} \cdot t_0 &= \int_0^{t_0} P(t)dt \quad \text{ali} \\ \bar{P} &= (1/t_0) \int_0^{t_0} P(t)dt \end{aligned} \quad (4.8)$$

Pri stalni moči:  $P(t) = P$  je seveda  $\bar{P} = P$ .

### Primer:

Moč stroja se povečuje s časom linearno od nič navzgor do vrednosti  $P_1 = 3 \text{ kW}$ , ki jo doseže po času  $t_1 = 6 \text{ s}$ , nato je stalna do trenutka  $t_2 = 46 \text{ s}$ , nakar se linearne zmanjšuje in doseže nič po času  $t_3 = 60 \text{ s}$  od začetka. Kolikšna je povprečna moč tega stroja?

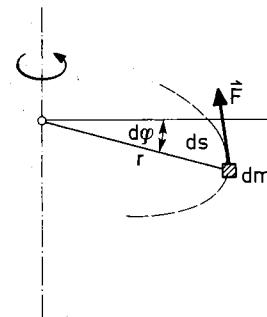
$$\begin{aligned} \bar{P} \cdot t_3 &= \int_0^{t_3} P(t)dt = P_1 t_1/2 + P_1(t_2 - t_1) + P_1(t_3 - t_2)/2 \\ \bar{P} &= P_1(t_2 + t_3 - t_1)/2t_3 = 0,83P_1 = 2,5 \text{ kW} \end{aligned}$$

Stroj med tem časom opravi delo  $A = \bar{P}t_3 = 2,5 \text{ kW} \cdot 60 \text{ s} = 150 \text{ kWs} = 150 \text{ kJ} = 0,15 \text{ MJ}$ .

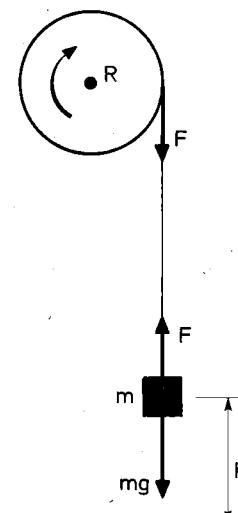
**Moč pri premem gibanju:**  $P = dA/dt = F \cdot ds/dt = F \cdot v$ , ker je  $v = ds/dt$ .

$$P = F \cdot v$$

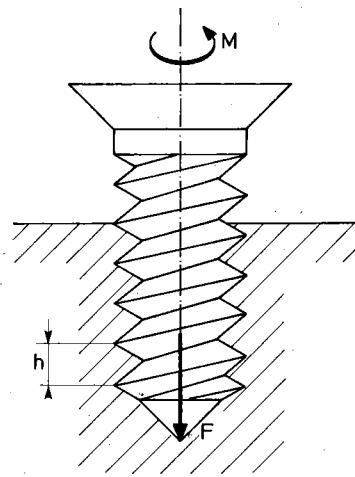
$$(4.9)$$



Slika 4.4



Slika 4.5



Slika 4.6

**Moč sile pri premem gibanju je skalarni produkt sile in hitrosti.** To velja ne glede na vrsto gibanja (pospešeno ali pojemajoče) in ne glede na smer sile.

### Primera:

- Na telo  $m$  učinkuje sila  $F$ . Kako se hitrost telesa spreminja s časom, če je moč sile stalna in če je telo v začetku mirovalo?

Ker imata sila in hitrost enako smer, lahko vektorske znake opustimo:

$$P = F \cdot v = v \cdot ma = v \cdot mdv/dt \quad \text{ali} \\ dv = (P/m)dt$$

Po integraciji (upoštevaje začetni pogoj:  $v = 0$  za  $t = 0$ ) dobimo:

$$v^2 = (2P/m)t \quad \text{ali} \\ v = (2Pt/m)^{1/2}$$

Pri stalni moči se hitrost povečuje s korenom časa.

Do enakega rezultata pridemo hitreje, če se spomnimo, da delo  $A = Pt$  poveča kinetično energijo telesa (od 0 do  $mv^2/2$ ), tako da je:  $Pt = mv^2/2$ .

Kako se mora sila  $F$  spremeniti s časom, da je njena moč med gibanjem stalna?  $F = P/v = (mP/2t)^{1/2}$ .

Kako se spreminja s časom moč pri gibanju, če je sila  $F$  stalna?

- Kolikšna moč je potrebna, da vlečemo hlod z maso  $m = 200 \text{ kg}$  po vodoravnih, zamrznjenih tleh s stalno hitrostjo  $v = 2 \text{ m/s}$ ? Drsni torni koeficient med hodom in tlemi je  $k_t = 0,1$ .

Ker je hitrost stalna, mora biti vlečna sila  $F$  enaka torni sili  $F_t = k_t N = k_t mg$  (gl. str. 38). Sledi:

$$P = Fv = k_t mgv = 400 \text{ kgm}^2/\text{s}^3 = 400 \text{ J/s} = 400 \text{ W}$$

**Moč pri vrtenju.** Pri vrtenju opravlja delo navor  $M$ . Ko se telo zasuče za kót dφ, opravi navor  $M$  (ki ima smer osi zasuka) delo dA = Mdφ. Moč navora zato znaša:

$$P = dA/dt = M \cdot d\phi/dt = M\omega$$

$$\boxed{P = M\omega} \quad (4.10)$$

### Moč pri vrtenju je produkt navora in kotne hitrosti vrtenja

Moč vrteče se gredi enostavno izmerimo s t.i. **Pronyjevo zavoro** (slika 4.8). Gred objamemo z jarmom (zavoro), ki se podaljšuje v ročico, na kateri se pomika znana utež. Vrteča se gred skuša prek torne sile zavrteti jarem z navorom  $M$  navzgor; ta navor uravnovesimo s protinavorom uteži, tako da ročica ostane vodoravna (kljub vrtenju gredi). S tem določimo navor  $M$  gredi, njeni kotno hitrost  $\omega$  pa izmerimo npr. s strobo-skopsko metodo (glej srednješolsko fiziko). Iskana moč gredi je:  $P = M\omega$ .

### Primer:

Moč vrtenja prenašamo z ene gredi na drugo s prestavami, npr. z jermenom (slika 4.9). Gonilna gred se vrta z močjo  $P_1$  in s kotno hitrostjo  $\omega_1$ ; na njej je pritrjena jermenica s polmerom  $R_1$ . Prek nje vodi jermen do jermenice (polmer  $R_2$ ) na drugi (vzporedni) gredi. Jermen vrta gnano gred z navorom  $M_2$  in s kotno hitrostjo  $\omega_2$ , tako da ta prejema moč  $P_2 = M_2\omega_2$ . Dokaži, da je moč gonilne gredi enaka moči gnane gredi ( $P_2 = P_1$ ).

Jermen se giblje s hitrostjo  $v$ , ki je obenem obodna hitrost obeh gredi, zato velja:  $v = R_1\omega_1 = R_2\omega_2$  ali

$$\omega_2/\omega_1 = R_1/R_2$$

Gred z večjo jermenico se vrta počasneje od gredi z manjšo. V napetem delu jermenova učinkuje sila  $F$ , ki jo povzroča gonilna jermenica (silo v ohlapnem delu zanemarimo, gl. str. 40). Ta napenja jermen z navorom  $M_1 = P_1/\omega_1 = FR_1$ , tako da je  $F = P_1/R_1 = P_1/\omega$ . Jermen pa poganja gnano jermenico z navorom  $M_2 = FR_2$ , zato gnana gred prejema moč  $P_2 = M_2\omega_2 = F \cdot R_2\omega_2 = Fv = = P_1$ . Vidimo, da se moč gonilne gredi ( $M_1\omega_1$ ) prenaša prek jermenova (=  $Fv$ ) na gnano gred (=  $M_2\omega_2$ ). Pri dani gonilni moči  $P_1$  se gnana gred vrta s tem večjim navorom, čim večji je polmer njene jermenice (in čim počasneje se vrta). Pri vožnji z avtomobilom v klanec moramo zato prestaviti v nižjo prestavo (to je vključiti večje zobato kolo na gnani osi), da ima gnana os s kolesi večji navor, ki je potreben za premagovanje dinamične komponente teže.

### Kinetična energija

Točkasto telo z maso  $m$ , ki se giblje s hitrostjo  $v$ , ima kinetično energijo  $W_k = mv^2/2$  (gl. 4.2). Ta izraz lahko uporabimo tudi za večje telo, če se telo giblje translatorično, torej če ima vsak del telesa enako hitrost:

$$\boxed{W_k = mv^2/2} \quad \begin{array}{l} \text{kinetična energija} \\ \text{translatorno gibajočega} \\ \text{se telesa} \end{array} \quad (4.11)$$

Hitrost  $v$  translatorno gibajočega se telesa v splošnem predstavimo z vektorsko vsoto hitrosti telesa vzdolž posameznih koordinatnih osi:  $v = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z$  (gl. 1.3). Kvadrat hitrosti je vsota kvadratov projekcij hitrosti na koordinatne osi (gl. 1.5):  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ , zato je **kinetična energija translatorno gibajočega se telesa v splošnem vsota kinetičnih energij zaradi gibanja telesa vzdolž posameznih koordinatnih osi**:

$$W_k = mv^2/2 = mv_x^2/2 + mv_y^2/2 + mv_z^2/2 \quad (4.11a)$$

Kinetično energijo togega telesa, ki se vrta s kotno hitrostjo  $\omega$  okrog stalne osi, pa izpeljemo takole: Telo v mislih razdelimo na diferencialne masne elemente  $dm$ . Ti krožijo okrog izbrane vrtilne osi z enako kotno hitrostjo  $\omega$  (gl. slika 3.27). Element  $dm$  z oddaljenosti  $r$  od osi kroži z obodno hitrostjo  $v = r\omega$  in ima zato kinetično energijo  $dW_k = dm \cdot v^2/2 = dm \cdot r^2\omega^2/2$ . Kinetična energija  $W_k$  celotnega rotirajočega telesa je vsota (integral) kinetičnih energij posameznih diferencialnih masnih elementov:

$$W_k = \int dm \cdot r^2 \omega^2 / 2 = (\omega^2 / 2) \int r^2 dm$$

$$W_k = J\omega^2 / 2 \quad \text{kinetična energija rotirajočega telesa} \quad (4.12)$$

kjer je  $J$  vztrajnostni moment telesa glede na izbrano vrtilno os (gl. 3.26). Zgornji izraz velja ne glede na lego vrtilne osi; lahko je os tudi izven telesa (odvisnost od lege vrtilne osi je zajeta v vztrajnostnem momentu  $J$  telesa).

Kakor lahko kinetično energijo translacijsko gibajočega se telesa izrazimo kot vsoto kinetičnih energij zaradi gibanja vzdolž posameznih koordinatnih osi (4.11a), tako lahko tudi kinetično energijo togega telesa, ki se vrta s kotno hitrostjo  $\omega$  okrog poljubne osi predstavimo kot vsoto kinetičnih energij zaradi vrtenja telesa okrog posameznih glavnih osi:

$$W_k = J_1 \omega_1^2 / 2 + J_2 \omega_2^2 / 2 + J_3 \omega_3^2 / 2 \quad (4.12a)$$

Kjer so  $J_1$ ,  $J_2$  in  $J_3$  glavni vztrajnostni momenti togega telesa,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  in  $\omega_3$  pa kotne hitrosti vrtenja telesa okrog ustreznih glavnih osi (glej podobno izvajanje vrtilne količine togega telesa, str. 80):  $\omega = \omega_1 \mathbf{e}_x + \omega_2 \mathbf{e}_y + \omega_3 \mathbf{e}_z$ .

Dokaz:  $W_k = (1/2) \int v^2 dm$ ,  $v = \omega \times r$  (gl. 1.53c),  $v^2 = v \cdot v = (\omega \times r) \cdot (\omega \times r) = \omega \cdot (r \times \omega) = (y^2 + z^2)\omega_1^2 + (z^2 + x^2)\omega_2^2 + (x^2 + y^2)\omega_3^2 - \text{členi z mešanimi produkti } xy, yz, zx$  (gl. 3.56a). Če koordinatne osi  $x, y$  in  $z$  sovpadajo z glavnimi vztrajnostnimi osmi telesa, izpadajo iz integrala vsi dodatni členi z mešanimi produkti  $xy$ ,  $yz$  in  $zx$  (izpadajo centrifugalni vztrajnostni momenti, gl. 3.35) in ostanejo le prvi trije členi, v katerih nastopajo glavni vztrajnostni momenti  $J_1$ ,  $J_2$  in  $J_3$  (gl. 3.34), to je:  $W_k = J_1 \omega_1^2 / 2 + J_2 \omega_2^2 / 2 + J_3 \omega_3^2 / 2$ , kar smo morali dokazati.

Poglejmo še, kako napišemo **kinetično energijo kotalečega se telesa**. Težišče telesa se giblje s hitrostjo  $v_c$ , obenem se telo še vrta okrog osi skozi težišče s kotno hitrostjo  $\omega$ , ki je pravokotna na ravnino lista (gl. slika 3.54). Hitrost v masnega elementa  $dm$ , ki je oddaljen od vrtilne osi (težišča) za  $r$ , je vektorska vsota hitrosti  $v_c$  zaradi gibanja težišča in obodne hitrosti  $v'$  zaradi vrtenja telesa okrog osi skozi težišče ( $v' = r\omega$ ):  $v = v_c + v'$ . V izrazu za kinetično energijo nastopa kvadrat hitrosti:  $v^2 = (v_c + v')^2 = v_c^2 + v'^2 + 2v_c \cdot v' = v_c^2 + r^2\omega^2 + 2v_c r \omega \cos \delta$ , kjer je  $\delta$  kót med smerjo  $v_c$  in  $v'$  (gl. slika 4.10). Dobimo:

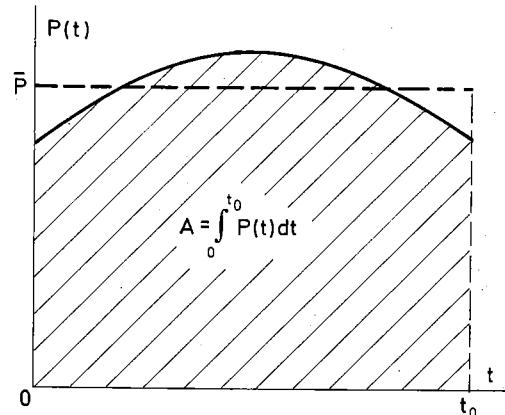
$$W_k = (1/2) \int (v_c^2 + r^2\omega^2 + 2v_c r \omega \cos \delta) dm$$

kjer je  $x = r \cos \delta$  koordinata masnega elementa  $dm$ , merjena iz težišča telesa. Integral tretjega člena je v zvezi s koordinato  $x_c$  težišča telesa, ki je nič, ker je koordinatno izhodišče v težišču (glej podoben sklep pri izpeljavi Steinerjevega stavka, str. 68). Sledi:

$$W_k = mv_c^2 / 2 + J_c \omega^2 / 2 \quad \text{kinetična energija kotalečega se telesa} \quad (4.13)$$

**Kinetična energija kotalečega se telesa je vsota kinetične energije zaradi gibanja težišča in kinetične energije zaradi vrtenja telesa okrog osi skozi težišče.**

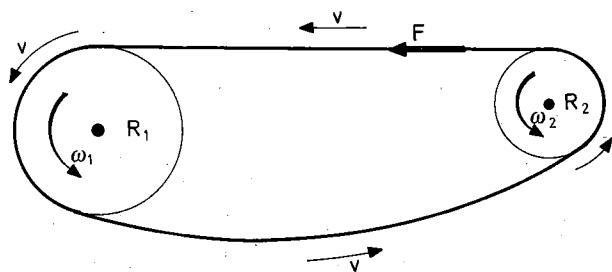
Ker lahko kotaljenje predstavimo kot čisto rotacijo okrog trenutne osi skozi dotikalische (glej str. 74), lahko tudi kinetično energijo kotalečega se telesa pišemo kot



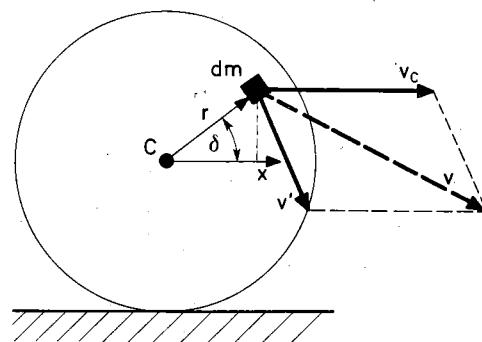
Slika 4.7



Slika 4.8



Slika 4.9



Slika 4.10

**Moč sile pri premem gibanju je skalarni produkt sile in hitrosti.** To velja ne glede na vrsto gibanja (pospešeno ali pojemajoče) in ne glede na smer sile.

### Primera:

1. Na telo  $m$  učinkuje sila  $F$ . Kako se hitrost telesa spreminja s časom, če je moč sile stalna in če je telo v začetku mirovalo?

Ker imata sila in hitrost enako smer, lahko vektorske znake opustimo:

$$P = F \cdot v = v \cdot ma = v \cdot mdv/dt \quad \text{ali} \\ dv/dt = (P/m)$$

Po integraciji (upoštevaje začetni pogoj:  $v = 0$  za  $t = 0$ ) dobimo:

$$v^2 = (2P/m)t \quad \text{ali} \\ v = (2Pt/m)^{1/2}$$

Pri stalni moči se hitrost povečuje s korenom časa.

Do enakega rezultata pridemo hitreje, če se spomnimo, da delo  $A = Pt$  poveča kinetično energijo telesa (od 0 do  $mv^2/2$ ), tako da je:  $Pt = mv^2/2$ .

Kako se mora sila  $F$  spremenjati s časom, da je njena moč med gibanjem stalna?  $F = P/v = (mP/2t)^{1/2}$ .

Kako se spreminja s časom moč pri gibanju, če je sila  $F$  stalna?

2. Kolikšna moč je potrebna, da vlečemo hlod z maso  $m = 200$  kg po vodoravnih, zamrznjenih tleh s stalno hitrostjo  $v = 2$  m/s? Drsni torni koeficient med hlodom in tlemi je  $k_t = 0,1$ .

Ker je hitrost stalna, mora biti vlečna sila  $F$  enaka torni sili  $F_t = k_t N = k_t mg$  (gl. str. 38). Sledi:

$$P = Fv = k_t mgv = 400 \text{ kgm}^2/\text{s}^3 = 400 \text{ J/s} = 400 \text{ W}$$

**Moč pri vrtenju.** Pri vrtenju opravlja delo navor  $M$ . Ko se telo zasuče za kót dφ, opravi navor  $M$  (ki ima smer osi zasuka) delo dA = Mdφ. Moč navora zato znaša:

$$P = dA/dt = M \cdot d\phi/dt = M\omega$$

$$\boxed{P = M\omega} \quad (4.10)$$

### Moč pri vrtenju je produkt navora in kotne hitrosti vrtenja

Moč vrteče se gredi enostavno izmerimo s t.i. **Pronyjevo zavoro** (slika 4.8). Gred objamemo z jarmom (zavoro), ki se podaljšuje v ročico, na kateri se pomika znana utež. Vrteča se gred skuša prek torne sile zavrteti jarem z navorom  $M$  navzgor; ta navor uravnovesimo s protinavorom uteži, tako da ročica ostane vodoravna (kljub vrtenju gredi). S tem določimo navor  $M$  gredi, njeno kotno hitrost  $\omega$  pa izmerimo npr. s strobo-skopsko metodo (glej srednješolsko fiziko). Iskana moč gredi je:  $P = M\omega$ .

### Primer:

Moč vrtenja prenašamo z ene gredi na drugo s prestavami, npr. z jermenom (slika 4.9). Gonilna gred se vrta z močjo  $P_1$  in s kotno hitrostjo  $\omega_1$ ; na njej je pritrjena jermenica s polmerom  $R_1$ . Prek nje vodi jermen do jermenice (polmer  $R_2$ ) na drugi (vzporedni) gredi. Jermen vrти gnano gred z navorom  $M_2$  in s kotno hitrostjo  $\omega_2$ , tako da ta prejema moč  $P_2 = M_2\omega_2$ . Dokaži, da je moč gonilne gredi enaka moči gnane gredi ( $P_2 = P_1$ ).

Jermen se giblje s hitrostjo  $v$ , ki je obenem obodna hitrost obeh gredi, zato velja:  $v = R_1\omega_1 = R_2\omega_2$  ali

$$\omega_2/\omega_1 = R_1/R_2$$

Gred z večjo jermenico se vrta počasneje od gredi z manjšo. V napetem delu jermenova učinka je sila  $F$ , ki jo povzroča gonilna jermenica (silo v ohlapnem delu zanemarimo, gl. str. 40). Ta napenja jermen z navorom  $M_1 = P_1/\omega_1 = FR_1$ , tako da je  $F = P_1/R_1 = P_1/\omega$ . Jermen pa poganja gnano jermenico z navorom  $M_2 = FR_2$ , zato gnana gred prejema moč  $P_2 = M_2\omega_2 = F \cdot R_2\omega_2 = Fv = = P_1$ . Vidimo, da se moč gonilne gredi ( $M_1\omega_1$ ) prenaša prek jermenov (=  $Fv$ ) na gnano gred (=  $M_2\omega_2$ ). Pri dani gonilni moči  $P_1$  se gnana gred vrta s tem večjim navorom, čim večji je polmer njene jermenice (in čim počasneje se vrta). Pri vožnji z avtomobilom v klanec moramo zato prestaviti v nižjo prestavo (to je vključiti večje zobato kolo na gnani osi), da ima gnana os s kolesi večji navor, ki je potreben za premagovanje dinamične komponente teže.

### Kinetična energija

Točkasto telo z maso  $m$ , ki se giblje s hitrostjo  $v$ , ima kinetično energijo  $W_k = mv^2/2$  (gl. 4.2). Ta izraz lahko uporabimo tudi za večje telo, če se telo giblje translatoryno, torej če ima vsak del telesa enako hitrost:

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{kinetična energija} \\ &W_k = mv^2/2 \quad \text{translatorno gibajočega se telesa} \end{aligned}} \quad (4.11)$$

Hitrost  $v$  translatorno gibajočega se telesa v splošnem predstavimo z vektorsko vsoto hitrosti telesa vzdolž posameznih koordinatnih osi:  $v = v_x e_x + v_y e_y + v_z e_z$  (gl. 1.3). Kvadrat hitrosti je vsota kvadratov projekcij hitrosti na koordinatne osi (gl. 1.5):  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ , zato je **kinetična energija translatorno gibajočega se telesa v splošnem vsota kinetičnih energij zaradi gibanja telesa vzdolž posameznih koordinatnih osi:**

$$W_k = mv^2/2 = mv_x^2/2 + mv_y^2/2 + mv_z^2/2 \quad (4.11a)$$

Kinetično energijo togega telesa, ki se vrta s kotno hitrostjo  $\omega$  okrog stalne osi, pa izpeljemo takole: Telo v mislih razdelimo na diferencialne masne elemente  $dm$ . Ti krožijo okrog izbrane vrtilne osi z enako kotno hitrostjo  $\omega$  (glej sliko 3.27). Element  $dm$  z oddaljenosti  $r$  od osi kroži z obodno hitrostjo  $v = r\omega$  in ima zato kinetično energijo  $dW_k = dm \cdot v^2/2 = dm \cdot r^2\omega^2/2$ . Kinetična energija  $W_k$  celotnega rotirajočega telesa je vsota (integral) kinetičnih energij posameznih diferencialnih masnih elementov:

$$W_k = \int dm \cdot r^2 \omega^2 / 2 = (\omega^2 / 2) \int r^2 dm$$

**$W_k = J\omega^2/2$**  kinetična energija rotirajočega telesa (4.12)

Kjer je  $J$  vztrajnostni moment telesa glede na izbrano vrtilno os (gl. 3.26). Zgornji izraz velja ne glede na lego vrtilne osi; lahko je os tudi izven telesa (odvisnost od lege vrtilne osi je zajeta v vztrajnostenem momentu  $J$  telesa).

Kakor lahko kinetično energijo translacijsko gibajočega se telesa izrazimo kot vsoto kinetičnih energij zaradi gibanja vzdolž posameznih koordinatnih osi (4.11a), tako lahko tudi kinetično energijo togega telesa, ki se vrta s kotno hitrostjo  $\omega$  okrog poljubne osi predstavimo kot vsoto kinetičnih energij zaradi vrtenja telesa okrog posameznih glavnih osi:

$$W_k = J_1 \omega_1^2 / 2 + J_2 \omega_2^2 / 2 + J_3 \omega_3^2 / 2 \quad (4.12a)$$

Kjer so  $J_1$ ,  $J_2$  in  $J_3$  glavni vztrajnostni momenti togega telesa,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  in  $\omega_3$  pa kotne hitrosti vrtenja telesa okrog ustreznih glavnih osi (glej podobno izvajanje vrtilne količine togega telesa, str. 80):  $\omega = \omega_1 \mathbf{e}_x + \omega_2 \mathbf{e}_y + \omega_3 \mathbf{e}_z$ .

Dokaz:  $W_k = (1/2) \int v^2 dm$ ,  $v = \omega \times r$  (gl. 1.53c),  $v^2 = v \cdot v = (\omega \times r) \cdot v = \omega \cdot (r \times v) = (y^2 + z^2)\omega_1^2 + (z^2 + x^2)\omega_2^2 + (x^2 + y^2)\omega_3^2 - \text{členi z mešanimi produkti } xy, yz, zx$  (gl. 3.56a). Če koordinatne osi  $x, y$  in  $z$  sovpadajo z glavnimi vztrajnostnimi osmi telesa, izpadajo iz integrala vsi dodatni členi z mešanimi produkti  $xy$ ,  $yz$  in  $zx$  (izpadajo centrifugalni vztrajnostni momenti, gl. 3.35) in ostanejo le prvi trije členi, v katerih nastopajo glavni vztrajnostni momenti  $J_1$ ,  $J_2$  in  $J_3$  (gl. 3.34), to je:  $W_k = J_1 \omega_1^2 / 2 + J_2 \omega_2^2 / 2 + J_3 \omega_3^2 / 2$ , kar smo morali dokazati.

Poglejmo še, kako napišemo kinetično energijo kotalečega se telesa Težišče telesa se giblje s hitrostjo  $v_c$ , obenem se telo še vrta okrog osi skozi težišče s kotno hitrostjo  $\omega$ , ki je pravokotna na ravnino lista (gl. slika 3.54). Hitrost v masnega elementa  $dm$ , ki je oddaljen od vrtilne osi (težišča) za  $r$ , je vektorska vsota hitrosti  $v_c$  zaradi gibanja težišča in obodne hitrosti  $v'$  zaradi vrtenja telesa okrog osi skozi težišče ( $v' = r\omega$ ):  $v = v_c + v'$ . V izrazu za kinetično energijo nastopa kvadrat hitrosti:  $v^2 = (v_c + v')^2 = v_c^2 + v'^2 + 2v_c \cdot v' = v_c^2 + r^2\omega^2 + 2v_c r \omega \cos \delta$ , kjer je  $\delta$  kót med smerjo  $v_c$  in  $v'$  (gl. slika 4.10). Dobimo:

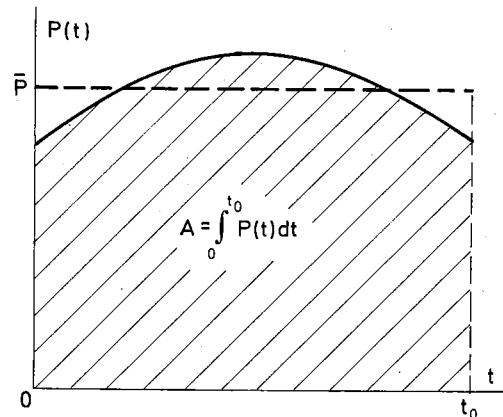
$$W_k = (1/2) \int (v_c^2 + r^2\omega^2 + 2v_c r \omega \cos \delta) dm$$

kjer je  $x = r \cos \delta$  koordinata masnega elementa  $dm$ , merjena iz težišča telesa. Integral tretjega člena je v zvezi s koordinato  $x_c$  težišča telesa, ki je nič, ker je koordinatno izhodišče v težišču (glej podoben sklep pri izpeljavi Steinerjevega stavka, str. 68). Sledi:

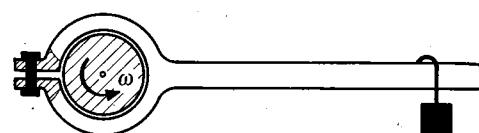
**$W_k = mv_c^2/2 + J_c\omega^2/2$**  kinetična energija kotalečega se telesa (4.13)

**Kinetična energija kotalečega se telesa je vsota kinetične energije zaradi gibanja težišča in kinetične energije zaradi vrtenja telesa okrog osi skozi težišče.**

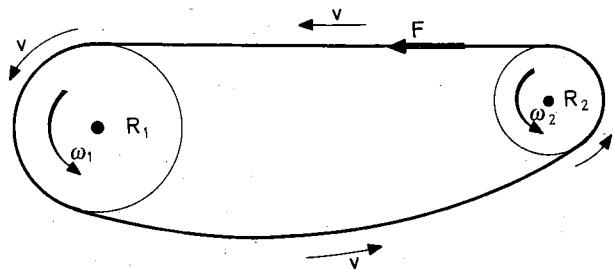
Ker lahko kotaljenje predstavimo kot čisto rotacijo okrog trenutne osi skozi dotikalische (gl. str. 74), lahko tudi kinetično energijo kotalečega se telesa pišemo kot



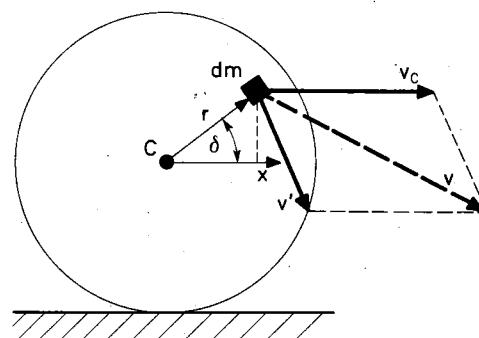
Slika 4.7



Slika 4.8



Slika 4.9



Slika 4.10

kinetično energijo kroženja okrog trenutne osi, to je:  $W_k = J\omega^2/2$ , kjer je  $J$  vztrajnostni moment telesa glede na trenutno os skozi dotikalische.

### Izrek o kinetični energiji

Kinetična energija togega telesa se spremeni, če sile opravijo delo (gl. 4.1). **Sprememba kinetične energije je enaka delu (A) vseh sil, ki učinkujejo na telo:**

$$\Delta W_k = A \quad (4.14)$$

Tu je  $\Delta W_k$  spremembu kinetične energije, to je razlika med končno kinetično energijo ( $W_{k2}$ ) in začetno ( $W_{k1}$ ).

**Kinetična energija telesa na koncu poti ( $W_{k2}$ ) je enaka vsoti kinetične energije na začetku ( $W_{k1}$ ) in dela A, ki ga sile spotoma opravijo na telesu:**

$$W_{k2} = W_{k1} + A \quad (4.14a)$$

Če sile opravijo pozitivno delo ( $A > 0$ , če pospeševalne sile opravijo več dela kot zaviralne), je končna kinetična energija večja od začetne ( $W_{k2} > W_{k1}$ ). Tedaj imamo pospešeno gibanje. Nasprotno velja za  $A < 0$ ; kinetična energija telesa se zmanjšuje, gibanje je pojemačje.

V posebnem primeru, da je  $A = 0$ , se **kinetična energija telesa ohranja**, končna kinetična energija je enaka začetni:

$$\Delta W_k = 0 \quad \text{in} \quad W_{k2} = W_{k1} \quad \text{za} \quad A = 0 \quad (4.14b)$$

kar ustreza enakomerinemu gibanju.

Mirujoče telo nima kinetične energije. Takšno telo se lahko premakne le, če učinkuje zunanjega sila, ki opravi delo, potrebno za povečanje kinetične energije. Vemo, da se telo tedaj pospeši v smeri zunanje sile.

Drugače je, če se telo že giblje, če ima kinetično energijo, npr.  $W_{k0}$  = začetno kinetično energijo, ko začno delovati zunanjega sila. Tedaj se telo lahko giblje tudi v nasprotni smeri, kot učinkujejo sile, kar pomeni, da telo lahko »premaguje« sile, ki nasprotujejo njegovemu gibanju. Pri tem te sile opravljajo negativno delo, ki zmanjšuje kinetično energijo telesa. **Telo premaguje zunanje sile na račun manjšanja lastne kinetične energije**, kar pomeni, da se upočasnuje. Pravimo, da **lahko telo z manjšanjem lastne kinetične energije oddaja delo** (premaguje zunanje zaviralne sile). Čim več kinetične energije ima, tem več dela lahko odda. Torej je **kinetična energija** telesa nekakšna **zaloga dela**, shranjenega v telesu.

Kinetična energija ima enako mersko enoto kot delo sile, to je  $J = Nm = kgm^2/s^2$  (preizkusi enote).

### Primeri:

1. **Kroglico z maso  $m = 5$  g izstrelimo s hitrostjo  $v_1 = 300$  m/s skozi desko z debelino  $x = 5$  cm; na drugi strani izstopi s hitrostjo  $v_2 = 200$  m/s. S kolikšno povprečno silo  $F$  se deska upira prodiranju kroglice skoznjo?**

$$\begin{aligned} A &= \Delta W_k = W_{k2} - W_{k1} \\ -Fx &= (mv_2^2 - mv_1^2)/2 \quad \text{ali} \\ F &= (m/2x)(v_1^2 - v_2^2) = 2500 \text{ N} = 2,5 \text{ kN} \end{aligned}$$

**2. Zavorna pot avtomobila** (glej 1. primer na strani 40). Tokrat bomo problem rešili s pomočjo izreka o kinetični energiji. Delo zavorne torne sile  $F_t = k_t mg$  na zavorni poti  $x$  je enako spremembji kinetične energije:

$$\begin{aligned} A &= \Delta W_k = W_k - W_{k0} \\ -F_t x &= 0 - mv_0^2/2 \quad \text{ali} \\ x &= mv_0^2/2F_t = v_0^2/2k_t g \end{aligned} \quad (4.19)$$

**3. Z vrha klanca spustimo telo, da začne drseti navzdol;** drsnii torni koeficient je  $k_t = 0,2$ , nagib klanca glede na vodoravno smer je  $\varphi = 25^\circ$ . S kolikšno hitrostjo ( $v$ ) pridrsi telo do dna klanca, ki je dolg  $s = 5$  m?

Posešek drsenja po klancu smo računali na strani 41 (gl. 2.22):  $a = g(\sin\varphi - k_t \cos\varphi)$ . Poglejmo še, kako se tega problema lotimo z energijskim izrekom. Na drseče telo učinkujejo teža  $mg$ , pravokotna sila podlage ( $N$ ) in drsna torna sila  $F_t = k_t N = k_t mg \cos\varphi$ . Prva opravi pozitivno delo  $mgh$  ( $h$  = višinska razlika spusta =  $= s \cdot \sin\varphi$ , glej 1. primer na str. 85), delo druge sile je nič (ker je pravokotna na smer gibanja), tretja pa opravi negativno delo  $-F_t s$ . V celoti prejme telo delo  $A = mgh - sk_t mg \cos\varphi$ , ki poveča njegovo kinetično energijo od 0 (na vrhu klanca) na  $mv^2/2$  (na dnu):

$$\begin{aligned} mv^2/2 &= A = mg s \sin\varphi - sk_t mg \cos\varphi \quad \text{ali} \\ v &= \sqrt{2gs(\sin\varphi - k_t \cos\varphi)} = \sqrt{2as} = 4,9 \text{ m/s} \quad (4.15) \end{aligned}$$

**4. Vztrajnik** je rotacijsko simetrično telo z velikim vztrajnostnim momentom, prirejen za velike kotne hitrosti vrtenja. Priklučen je na gonilno gred pogonskih motorjev. Ko se gred z vztrajnikom zavrti, prejme vztrajnik precejšnjo kinetično energijo ( $J\omega^2/2$ ). Ta izravnava neenakomerno dovajanje kinetične energije gredi (npr. pri batnih motorjih) ter tako omogoča enakomerno uporabo, predvsem v trenutkih, ko zunanje gonilne sile odnehajo (t.i. mrtvih točkah).

Posebno prirejeni vztrajniki se uporabljajo za skladiščenje (akumuliranje) kinetične energije. Več ton težki vztrajniki (iz jekla ali iz ojačene plastike z vgrajenimi steklenimi vlakni) se vrtijo z veliko frekvenco (npr. 6–8000 obr./min) in lahko shranijo več sto kWh kinetične energije. Problem so seveda dobri in odporni ležaji, da izgube kinetične energije zaradi trenja niso prevelike.

Ljudje so si celo izmislii avtobus (t.i. **girobus**), ki izkorišča kinetično energijo, shranjeno v vztrajniku. Na začetni postaji zavrtimo vztrajnik in naložimo vanj zalogo kinetične energije. Med vožnjo se kinetična energija s prestavami prenaša s vztrajnika na pogonska kolesa vozila.

Kako hitro ( $v_0$ ) moramo zavrteti vztrajnik z vztrajnostnim momentom  $J = 80 \text{ kgm}^2$ , da bo zaloga kinetične energije zadoščala do  $x = 4 \text{ km}$  oddaljenega kraja, če se pričakuje povprečna sila odpora  $F$  (zaradi trenja, upora zraka in dinamične komponente teže na klancih) okrog 15kN?

$$\begin{aligned} Fx &= J\omega_0^2/2 = 2\pi^2 v_0^2 J \quad \text{ali} \\ v_0 &= \sqrt{Fx/2\pi^2 J} = 195/\text{s} = 11700/\text{min} \end{aligned}$$

**5. Kroženje kroglice na vrvici.** V poglavju vrtilna količina (str. 80) smo obravnavali kroženje kroglice na vrvici, ki vodi skozi luknjico na osi (slika 3.69). Zanimalo nas je, kako se kotna hitrost ( $\omega$ ) kroženja spremeni z radijem  $r$  vrvice, če tega zmanjšujemo tako, da vlečemo vrvico s silo  $F$ . Ugotovili smo, da se vrtilna količina krožeče kroglice ohranja.

$$\Gamma = J\omega = mr^2\omega = \text{konst.} = mr_1^2\omega_1$$

Zaradi tega se kotna hitrost kroženja povečuje, če se polmer  $r$  zmanjšuje, kar pomeni, da se povečuje tudi kinetična energija kroglice:

$$W_k = J\omega^2/2 = \Gamma^2/2J = \Gamma^2/2mr^2$$

Ko se polmer  $r$  spremeni za  $dr$ , se kinetična energija kroglice spremeni za:

$$dW_k = (\Gamma^2/2m)d(1/r^2) = -(\Gamma^2/mr^3)dr$$

Če se polmer  $r$  zmanjšuje ( $dr$  negativen), se kinetična energija povečuje ( $dW_k$  pozitiven), in obratno. Kinetično energijo krožeče kroglice povečuje vlečna sila  $F$ , ki opravlja potrebno delo. Pri spremembi polmera  $r$  za  $dr$  opravi vlečna sila delo  $dA = -Fdr$  (predznak – zato, ker je  $dA > 0$  pri  $dr < 0$ , in obratno).

$$dA = dW_k$$

$$-Fdr = -(\Gamma^2/mr^3)dr$$

$$F = \Gamma^2/mr^3 = mr_1^4\omega_1^2/r^3 = mr\omega^2 \quad (= \text{radialna sila})$$

Vlečna sila je obratno sorazmerna s tretjo potenco polmera kroženja.

Poglejmo še soroden primer, le da vrvica ne vodi skozi luknjico na osi, ampak se med kroženjem navija na palico (polmer  $R$ ), ki je v osi kroženja (slika 4.11, palica je pravokotna na ravnino lista). Tokrat lahko delo sile  $F$  v vrvici med kroženjem zanemarimo in vzamemo, da je kinetična energija krožeče kroglice stalna:

$$W_k = J\omega^2/2 = \text{konst.}$$

$$J_1\omega_1^2 = J_2\omega_2^2$$

$$mr_1^2\omega_1^2 = mr_2^2\omega_2^2$$

$$\omega_2 = \omega_1(r_1/r_2)$$

Tudi tu se kotna hitrost povečuje z zmanjševanjem polmera  $r$ , le da ne tako moč kot prej (le obratno sorazmerno s polmerom).

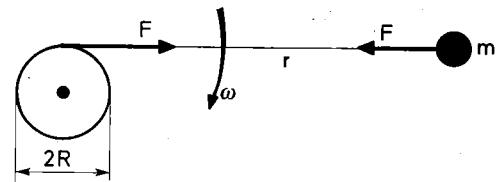
Kako se spreminja vrtilna količina kroglice?

$$\Gamma = J\omega = \sqrt{2JW_k} = r\sqrt{2mW_k}$$

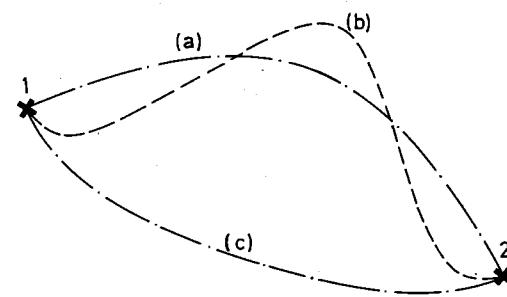
Vrtilna količina je premo sorazmerna s polmerom  $r$ , torej se zmanjšuje, če se ta zmanjšuje. Zmanjšuje jo navor  $M$  sile  $F$  v vrvici:  $M = RF$ . S pomočjo enačbe  $M = dI/dt$  pokaži, da je  $F = mr\omega^2$  (= radialna sila, ki daje kroglici radialni pospešek  $rw^2$ ).

**6. Kotaljenje valja po klancu** smo obravnavali na strani 78 (slika 3.64): zanimalo nas je hitrost težišča valja ( $v_c$ ) na dnu klanca. Tokrat si primer ogledamo z energijskega stališča.

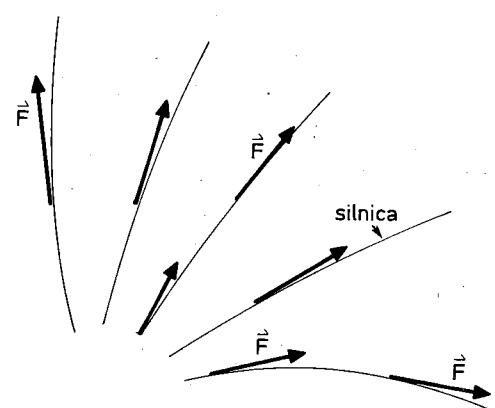
Med kotaljenjem navzdol brez podrsavanja opravlja delo le teža valja ( $mg$ ), sila podlage s komponentama  $N$  in  $F'$  pa ne (ker valj ne podrsuje). Ko se težišče valja spusti za  $h = s/\sin\varphi$ , opravi teža delo  $A = mgh$ , ki



Slika 4.11



Slika 4.12



Slika 4.13

poveča kinetično energijo valja z nič (na vrhu klanca) na  $mv_c^2/2 + J\omega^2/2$  (na dnu) =  $3mv_c^2/4$  (ker je  $J = mR^2/2$  in  $v_c = R\omega$ ).

$$mgh = 3mv_c^2/4$$

$$v_c = \sqrt{(4/3)gh}$$

Če bi valj drsel navzdol translatorno po gladki podlagi (brez trenja), bi pridrsel do dna klanca s hitrostjo  $\sqrt{2gh}$ , zaradi kotaljenja pa je hitrost težišča valja manjša. Drugače je, če je treba upoštevati trenje med drsenjem. Običajno je trenje dovolj močno, da je hitrost na dnu klanca po drsenju manjša kot po kotaljenju. Torej je varneje, če po strmini navzdol drsimo, kot če se kotalimo. (Kaj pa po ledeni strmini?)

## Polje sile – konservativne sile

Telesa učinkujejo drugo na drugega z različnimi silami, odvisno od vrste, stanja in medsebojne oddaljenosti teles. Nekatere sile učinkujejo na daljavo – imajo **velik doseg** (npr. gravitacijska, električna in magnetna sila), druge učinkujejo zaznatno le v neposredni okolini teles – imajo **kratek doseg** (npr. jedrske, atomske, kohezijske, kemijske sile).

Območje v okolini telesa, na katerem telo učinkuje na druga podobna telesa, se imenuje **polje sile**. Pravimo, da telo ustvarja v svoji okolini polje sile. S tem želimo povedati, da učinkuje s silo na vsako drugo telo, ki se znajde v tem polju. Namesto da opazujemo gibanje telesa pod vplivom sil, s katerimi druga telesa učinkujejo nanj, raje opazujemo gibanje telesa v polju sile, ki ga ustvarjajo druga telesa. Vsaki sili lahko pripisemo ustrezno polje. Polje gravitacijske sile se imenuje **gravitacijsko polje** (učinkuje na vsako telo z maso, ne glede na njegovo notranje stanje). Polje električne sile je **električno polje** (učinkuje le na nenelektrena telesa). Poznamo še magnetno polje ter polja jedrskih sil. Poznati polje sile, se pravi, poznati silo na izbrano telo v vsaki točki polja.

V polju sile nas zanima predvsem delo, ki ga opravi sila, če se telo v polju premakne, npr. od mesta 1 do mesta 2 (slika 4.12). Recimo, da se telo premakne po tirnici (a). Ko se premakne za  $ds$ , opravi sila  $F$  delo  $dA = F \cdot ds$ . Celotno delo na poti od začetnega mesta 1 do končnega 2 ( $A_{1 \rightarrow 2}$ ) je potem enako:

$$A_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 dA = \int_1^2 F \cdot ds \quad (a) \quad (4.16)$$

Oznaka (a) na koncu integrala pomeni, da integriramo vzdolž krivulje (a).

V splošnem je opravljeno delo  $A_{1 \rightarrow 2}$  odvisno od oblike (in dolžine) krivulje (a), vzdolž katere računamo delo. Če se npr. premaknemo od mesta 1 do mesta 2 po kakšni drugi krivulji (npr. po krivulji b), opravi sila v splošnem drugačno delo. V nekaterih poljih (to je za nekatere sile) pa velja, da opravljeno delo ni odvisno od oblike krivulje (premika), ampak le od začetne in končne lege v polju, to je:

$$A_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 F \cdot ds \quad (a) = \int_1^2 F \cdot ds \quad (b)$$

Takšno polje se imenuje **potencialno polje**, sila pa **konservativna sila**.

Delo konservativne sile je odvisno le od začetne in končne lege, ne pa od oblike poti. Pri prehodu od mesta 1 do mesta 2 opravi konservativna sila enako veliko dela, ne glede na to, po kakšni poti se premikamo. To velja za sile, ki so odvisne le od lege teles v prostoru, nič pa od hitrosti oziroma načina gibanja teles, npr. za **gravitacijske in električne sile** (ki so dane z Newtonovim gravitacijskim in Coulombovim zakonom). Konservativna je tudi **sila prožnosti** (to je sila, ki učinkuje na telo, privezano na prožno vzmet); ta je odvisna le od velikosti raztezka, nič pa od hitrosti raztezanja, ali raztezamo v enem koraku ali v več koračih itd. Na drugi strani pa sta **upor zraka, torna sila nekonservativna**; njuno delo je odvisno od oblike in velikosti poti ter od načina prehoda. Torna sila npr. nasprotuje premiku, njeno delo je zato vedno negativno, in to tem bolj negativno, čim daljša je pot. Upor zraka je odvisen tudi od hitrosti gibanja, torej njegovo delo gotovo ni odvisno le od začetne in končne lege telesa v prostoru, temveč tudi od načina (hitrosti) prehoda.

Recimo, da napravimo v potencialnem polju **zaključeno pot**. Z mesta 1 se premaknemo po krivulji (a) do mesta 2 (pri čemer konservativna sila opravi delo  $A_{1 \rightarrow 2}$ ), nato pa po kakšni drugi poti (npr. po krivulji c) nazaj do izhodnega mesta 1. Na povratni poti opravi konservativna sila delo  $A_{2 \rightarrow 1}$ , ki je po velikosti enako delu  $A_{1 \rightarrow 2}$  na prvem delu poti, le da ima nasproten predznak:

$$A_{2 \rightarrow 1} = -A_{1 \rightarrow 2}$$

(to razumemo, če si mislimo, da se vračamo po isti krivulji a; ker se spremeni smer premika, se spremeni predznak dela). V celoti opravi konservativna sila na zaključeni poti delo:

$$A = A_{1 \rightarrow 2} + A_{2 \rightarrow 1} = A_{1 \rightarrow 2} - A_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad (4.17)$$

**Delo konservativne sile na zaključeni poti je nič.** Kolikor pozitivnega dela opravi na enem delu poti, toliko negativnega opravi na drugem delu, tako da je celotno delo po povratku na izhodno mesto nič.

Delo nekonservativnih sil na zaključeni poti je različno od nič. Delo torne sile je npr. vedno negativno (manjše od nič).

Za vsako silo posebej moramo ugotoviti, ali je konservativna ali ne, ali je torej njeno delo odvisno od oblike poti ali ne.

Potencialno polje (polje konservativne sile) običajno predstavimo s **silnicami**. To so matematične črte, katerih tangente kažejo smer sile v vsaki točki polja (slika 4.13). V splošnem je sila v različnih točkah polja različna: v bližini teles (ki ustvarjajo polje) je običajno velika, proč od njih pa majhna; spreminja se tudi smer sile. Zato so silnice v splošnem ukrivljene in različno goste. Kjer je polje močnejše (sila večja), so silnice gostejše, kjer je šibkejše, pa redkejše. V posebnem primeru, da je sila v vsaki točki polja enaka (tako v velikosti kot smeri), imamo t. i. **homogeno polje**: silnice so ravne in vzporedne.

## Potencialna energija – izrek o ohranitvi energije

Med premikom telesa v potencialnem polju od mesta 1 do mesta 2 v smeri silnic opravi konservativna sila (ki ustvarja to polje) pozitivno delo  $A_{1 \rightarrow 2}$ . To delo prejme telo, katerega kinetična energija se zato poveča. Povečanje kinetične energije telesa ( $\Delta W_k = W_{k2} - W_{k1}$ ) je enako delu, ki ga opravi konservativna sila med prehodom. Namesto da omenjamo delo konservativne sile, lahko tudi vzamemo, da ima telo v potencialnem polju t. i. **potencialno energijo** ( $W_p$ ), in rečemo, da se kinetična energija telesa poveča zato, ker se zmanjša njegova potencialna energija. Pri prehodu od mesta 1 do mesta 2 se torej potencialna energija telesa zmanjša (od  $W_{p1}$  na  $W_{p2}$ ) za toliko, kolikor pozitivnega dela konservativna sila med tem prehodom opravi, to je:

$$W_{p1} - W_{p2} = A_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\Delta W_p \quad (4.18)$$

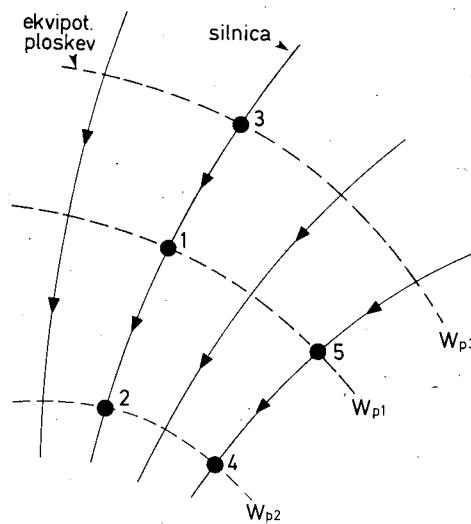
Sledi, da se **potencialna energija telesa v smeri silnic zmanjšuje** (je manj pozitivna), **proti smeri silnic pa povečuje** (je bolj pozitivna). Poznamo le spremembo potencialne energije (enaka je delu konservativne sile), o njeni absolutni vrednosti na danem mestu pa se moramo dogovoriti posebej. Če se npr. domenimo, da je potencialna energija telesa na mestu 1 (slika 4.14) nič ( $W_{p1} = 0$ ), je potencialna energija na mestu 2, ki je nižje v smeri silnic, negativna (in to tem bolj, čim nižje pod mestom 1 je mesto 2), na mestu 3, ki je »nad« mestom 1 (to je proti smeri silnic), pa pozitivna (in to tem bolj, čim višje je mesto 3 nad mestom 1). Dogovor o tem, kje je potencialna energija telesa nič, je povsem poljuben in ga po potrebi spremenimo.

Povprek čez silnice, to je **v smeri pravokotno na silnice**, konservativna sila ne opravlja dela, zato se v tej smeri **potencialna energija telesa ne spreminja**. Sosednje točke, v katerih je potencialna energija telesa enaka, povežemo v t. i. **ekvipotencialne ploskev**. V prostoru lahko narišemo več ekvipotencialnih ploskev, vsaki ustreza določena vrednost potencialne energije. Na sliki (4.14) so s črtanimi črtami označeni preseki z ravno listo ekvipotencialnih ploskev, ki gredo skozi mesta 1, 2 in 3. Na vsaki točki spodne ekvipotencialne ploskeve ima telo enako potencialno energijo  $W_{p2}$ , na srednji  $W_{p1}$  (= 0 glede na naš dogovor) in na zgornji  $W_{p3}$ . Če se pomakamo vzdolž ekvipotencialne ploskeve, je potencialna energija enaka, npr.  $W_{p4} = W_{p2}$ ,  $W_{p5} = W_{p1}$  itd. Najmočneje pa se spremeni v smeri normale na ekvipotencialne ploskeve, to je v smeri silnic.

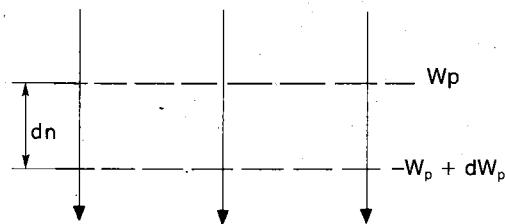
**Silnice so v vsaki točki pravokotne na ekvipotencialne ploskeve** (zvlečene črte na sliki 4.14), kažejo smer, v kateri se **potencialna energija telesa najmočneje spreminja s krajem**.

Mislimo si sosednji ekvipotencialni ploski s potencialnima energijama  $W_p$  in  $W_p + dW_p$ , ki sta v smeri normale (silnic) razmaknjeni za  $dn$  (slika 4.15). Če so silnice usmerjene navzdol, je potencialna energija spodne plodnje ploskeve manjša od zgornje,  $dW_p$  je torej negativen. Med prehodom od zgornje do spodnej ekvipotencialne ploskeve opravi konservativna sila delo  $F \cdot dn$ , ki je enako spremambi potencialne energije:

$$\begin{aligned} F \cdot dn &= W_p - (W_p + dW_p) \quad \text{ali} \\ F &= -dW_p/dn \end{aligned} \quad (4.19)$$



Slika 4.14



Slika 4.15

**Sila je enaka negativnemu odvodu potencialne energije v smeri normale na ekvipotencialno ploskev.**

Zgornjo enačbo napišemo v vektorski obliki takole:

$$\mathbf{F} = -(\mathrm{d}W_p/\mathrm{d}n)\mathbf{e}_n = -\nabla W_p \quad (4.19a)$$

pri čemer ima enotin vektor  $\mathbf{e}_n$  normale na ekvipotencialno ploskev smer večanja potencialne energije, to je nasprotno smeri silnic. Odvod skalarne funkcije (v našem primeru  $W_p$ ) po krajevni koordinati v smeri normale na ekvipotencialno ploskev, to je v smeri največjega naraščanja njene vrednosti, matematično označimo z operatorjem  $\nabla$  (**nabla**):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}(\dots)\mathbf{e}_n = \nabla(\dots) \quad (4.20)$$

Operacija nabla ( $\nabla$ ) pomeni odvajanje po krajevni koordinati in se izvaja nad skalarno funkcijo. Dobimo vektor, ki ima smer največjega naraščanja prvostrukne skalarne funkcije, po velikosti pa je enak odvodu funkcije po krajevni koordinati v tej smeri (to je enak je spremembi funkcije na enoto dolžine v tej smeri). Dobljeni vektor se imenuje tudi **gradient funkcije** in ga označimo z **grad**(...). Velik gradient pomeni, da se funkcija močno spreminja s krajem.

Enačba (4.19) omogoča izračun sile  $\mathbf{F}$  v poljubni točki potencialnega polja, če je znano, kako se potencialna energija telesa spreminja s krajem. Ta postopek je torej ravno obraten kot pri enačbi (4.18), s katero računamo potencialno energijo v vsaki točki polja, če je znano krajevno spremiranje konservativne sile.

### Izrek o ohranitvi kinetične in potencialne energije

Izrek o spremembah kinetične energije (gl. 4.14) pravi, da je sprememba kinetične energije enaka delu  $A$  vseh sil, ki učinkujejo na telo:

$$\Delta W_k = W_{k2} - W_{k1} = A$$

Celotno delo  $A$  razdelimo na delo konservativnih sil ( $A_{\text{konserv}}$ ) in na delo nekonservativnih sil ( $A_{\text{nekonserv}}$ ):

$$A = A_{\text{konserv}} + A_{\text{nekonserv}} \quad (4.21)$$

Prvega nadomestimo s spremembijo ustreznih potencialnih energij (gl. 4.18):

$$A_{\text{konserv}} = W_{p1} - W_{p2} = -\Delta W_p \quad (4.22)$$

Vsaki konservativni sila pripisemo ustrezno potencialno energijo, tako da je  $\Delta W_p$  sprememba vseh nastopajočih potencialnih energij. Izrek o spremembah kinetične energije se tako prelevi v:

$$\Delta W_k + \Delta W_p = A_{\text{nekonserv}} \quad (4.23)$$

**Vsota sprememb kinetične in potencialne energije je enaka delu nekonservativnih sil, ki učinkujejo na telo.** Ker je to delo večinoma negativno, se **vsota kinetične in potencialne energije s časom zmanjšuje**. Če zanemarimo vpliv nekonservativnih sil, to je za  $A_{\text{nekonserv}} = 0$ , je:

$$\Delta(W_k + W_p) = 0 \quad \text{ali} \\ W_k + W_p = \text{konst.} \quad (4.24)$$

Če ni nekonservativnih sil, se **vsota kinetične in potencialne energije telesa ohranja**. Konservativne sile s svojim delom spreminjajo potencialno energijo v kinetično ali obratno, ne morejo pa spremeniti njune vsote, ta se spremeni le, če učinkujejo nekonservativne sile.

### Gravitacijsko (težnostno) potencialno polje

Kar smo zgoraj povedali na splošno, si bomo zdaj ogledali na primeru gravitacijske sile.

Zanima nas potencialno polje gravitacijske sile, s katero Zemlja učinkuje na telesa iz svoje okolice. To silo računamo z Newtonovim gravitacijskim zakonom (2.8 in 2.11a). Zemlja (masa  $M$ ) privlačuje telo (masa  $m$ ), ki je oddaljeno od središča Zemlje za  $r$ , s silo  $F = GMm/r^2 = mg_0R^2/r^2$  ali v vektorski obliki:

$$\mathbf{F} = mg_0R^2/r^2 \quad (4.25)$$

Tu je  $g_0$  težni pospešek na površju Zemlje ( $r = R$ ); usmerjen je k središču Zemlje. Silnice zemeljskega gravitacijskega polja so radialni žarki, usmerjeni navznoter – k središču Zemlje (slika 4.16). Ekvipotencialne ploskve so koncentrične kroglaste ploskve s središčem v zemeljskem središču.

Da je gravitacijska sila (gl. 4.25) zares konservativna, se prepričamo, če izračunamo delo te sile pri prehodu od mesta 1 ( $r = r_1$ ) do mesta 2 ( $r = r_2$ ):

$$A_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \quad (\text{a})$$

Poljubno krivuljo (a), vzdolž katere integriramo, lahko nadomestimo z drobno stopničasto krivuljo (glej sliko 4.16), katere stopničke leže v ekvipotencialnih ploskvah, padajo pa vzdolž silnic. Integral po vodoravnem delu stopničk je nič, po navpičnem delu vsake stopničke pa je enako velik, kot če integriramo po začetni silnici od 1 do 3 (3 leži na isti ekvipotencialni ploskvi kot končno mesto 2). Torej je integral  $A_{1 \rightarrow 2}$  po poljubni krivulji (a) enak integralu  $A_{1 \rightarrow 3}$  vzdolž začetne silnice. V tej smeri imata  $\mathbf{F}$  in  $\mathrm{d}\mathbf{s}$  enako smer, zato lahko pišemo:

$$A_{1 \rightarrow 2} = A_{1 \rightarrow 3} = \int_{r_2}^{r_1} F dr = mg_0R^2 \int_{r_2}^{r_1} r^{-2} dr \\ = mg_0R^2(1/r_2 - 1/r_1)$$

Sledi:

$$W_{p1} = W_{p2} + mg_0R^2(1/r_2 - 1/r_1) \quad (4.26)$$

Točko 2 postavimo na zemeljsko površje ( $r_2 = R$ ) in se domenimo, da je tam **potencialna energija nič**:  $W_{p2} = 0$ . Potencialno energijo  $W_{p1}$  telesa v poljubni točki 1, npr. za  $r_1 = r$ , označimo z  $W_p(r)$ :

$$W_p(r) = mg_0R^2(1/R - 1/r) \quad r \geq R \quad (4.27)$$

Zgornji izraz velja za mesta nad zemeljskim površjem, to je za  $r \geq R$ . Pod površjem pa se gravitacijska sila

Zemlje zmanjšuje linearno z oddaljenostjo od središča (gl. 2.9). Če vzamemo Zemljo kot homogeno telo, velja:

$$F(r) = mg_0 r/R \quad \text{za } r \leq R$$

Med prehodom od zemeljskega površja do globine  $r$  se potencialna energija telesa zmanjša z  $W_p(R) = 0$  na  $W_p(r)$ :

$$\begin{aligned} W_p(R) - W_p(r) &= \int_r^R F(r) dr = (mg_0/R) \int_r^R r dr \\ W_p(r) &= mg_0(r^2 - R^2)/2R \quad \text{za } r \leq R \end{aligned} \quad (4.27a)$$

Graf gravitacijske potencialne energije  $W_p(r)$  je podan na sliki (4.17). Če se oddaljujemo od Zemlje, se gravitacijska potencialna energija povečuje in se asimptotično približuje največji vrednosti  $mg_0 R$ , ki jo doseže v neskončnosti (seveda, ker zanemarimo gravitacijski vpliv drugih nebesnih teles). Na zemeljskem površju ( $r = R$ ) je glede na naš odgovor enaka nič, pod površjem ( $r < R$ ) pa je negativna in se parabolicno približuje najnižji vrednosti  $-mg_0 R/2$ , ki jo doseže v središču ( $r = 0$ ).

#### Primer:

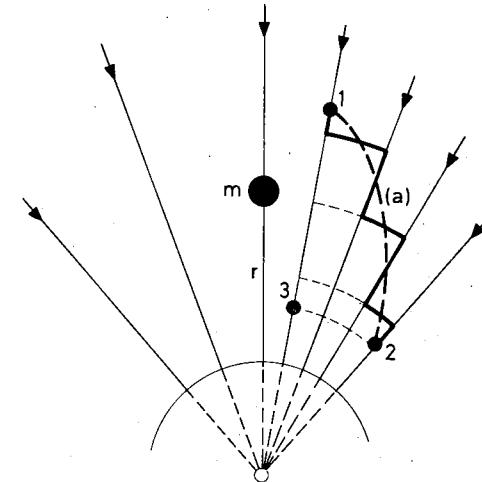
**Drugo kozmično hitrost** smo računali na strani 36 tako, da smo integrirali Newtonov zakon dinamike. Račun je bil dokaj težak. Videli bomo, da lahko dobimo rezultat tudi po enostavni poti, če uporabimo izrek o ohranitvi energije (gl. 4.24).

Da se raketa dvigne z zemeljskega površja in zapusti območje zemeljske privlačnosti, se mora njena potencialna energija povečati z nič na  $mg_0 R$ . To povečanje lahko priskrbí potisna reakcijska sila izpušnih raketnih plinov, ki spotoma opravi potrebno delo, ali pa damo raketni ob startu zalogu energije v obliki začetne kinetične energije  $mv_2^2/2$ .

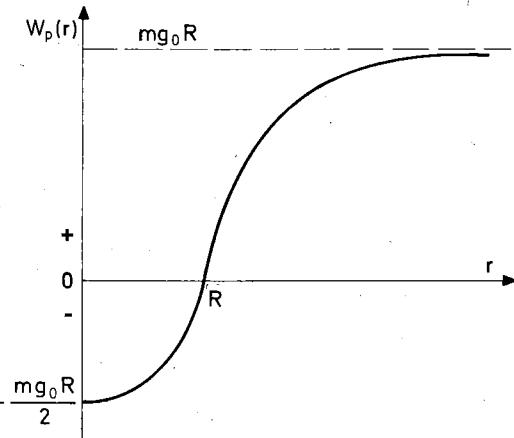
Če zanemarimo vpliv nekonervativnih sil (npr. zračnega upora), je vsota kinetične in potencialne energije energije rakte stalna: na površju Zemlje ima raka potencialno energijo nič in kinetično  $mv_2^2/2$ , v neskončni oddaljenosti pa se raka ustavi in njena potencialna energija znaša  $mg_0 R$ . Sledi:

$$\begin{aligned} mv_2^2/2 + 0 &= 0 + mg_0 R \quad \text{ali} \\ v_2 &= (2g_0 R)^{1/2} \quad (\text{gl. 2.16}) \end{aligned}$$

S kolikšno hitrostjo bi morali izstreliti raka iz središča Zemlje, da bi zapustila območje zemeljske privlačnosti?



Slika 4.16



Slika 4.17

#### Gravitacijska (težnostna) potencialna energija v bližini zemeljskega površja

Običajno se zadržujemo v neposredni bližini površine Zemlje, npr. do nekaj km nad njim. Legi telesa merimo z višinsko koordinato z nad tlemi, tako da je  $r = R + z$ . Ker je  $z \ll R$ , se izraz (4.27) za gravitacijsko potencialno energijo telesa na višini  $z$ , če uporabimo geometrijsko vrsto  $1/(1 + z/R) = 1 - z/R + z^2/2R^2 - \dots$ , ponostavi v:

$$\begin{aligned} W_p &= mg_0 R^2 [1/R - (1/R)(1 - z/R + z^2/2R^2 - \dots)] = \\ &= mg_0 R(z/R - z^2/2R^2 + \dots) = \\ &= mg_0 z (1 - z/2R + \dots) \end{aligned}$$

Pri nenatančnosti enega promila lahko za  $z < 12$  km zanemarimo dodatne člene v oklepaju in obdržimo le:

$$W_p \approx mg_0 z \quad z \ll R \quad (4.28)$$

kar že poznamo iz srednje šole. V bližini zemeljskega površja je **gravitacijska potencialna energija premo sorazmerna z višino nad tlemi**. Silnice so ravne, vzporedne in usmerjene navzdol.

Pri računanju gravitacijske potencialne energije telesa v homogenem polju je pomembna lega **njegovega težišča**. Pri dani legi težišča je potencialna energija telesa enaka, ne glede na to, kako je telo zasukano okrog osi skozi težišče (slika 4.18). Pri zasuku telesa okrog te osi namreč teža telesa (to je gravitacijska sila) ne opravlja dela (gl. str. 70), torej se gravitacijska potencialna energija ne spremeni. Potencialna energija telesa je neodvisna od orientacije telesa v prostoru, spremeni se le, če se spremeni lega težišča.

### Primeri:

**1. Betonski kvader** s stranicami  $a = 40$  cm,  $b = 30$  cm in  $c = 20$  cm leži na največji ploskvi. Najmanj koliko dela ( $A$ ) je potrebno, da ga zavrtimo okrog njegovega najdaljšega roba? Gostota betona je  $\rho = 2,0$  g/cm<sup>3</sup>.

Težišče kvadra je v začetku na višini  $z_1 = c/2 = 10$  cm nad tlemi. Ko je najvišje (tik nad robom, okrog katerega kvader zavrtimo), je na višini  $z_2 = \sqrt{b^2 + c^2}/2 = 18$  cm. Torej se težišče dvigne za  $\Delta z = z_2 - z_1 = 8$  cm, čemur ustreza povečanje potencialnega energije za  $\Delta W_p = mg_0 \Delta z = \rho abc g_0 \Delta z = 38$  J = A.

**2. Pokončna posoda** z osnovno ploskvijo  $S = 400$  cm<sup>2</sup> in višino  $h = 60$  cm stoji na vodoravnih tleh. Najmanj koliko dela ( $A$ ) je potrebno, da dvignemo vodo z višine tal in jo natočimo v posodo? Kolikšna je potencialna energija ( $W_p$ ) vode v polni posodi?

Voda na višini tal ima potencialno energijo nič. Za dvig vode z maso  $m = \rho V = \rho Sh$  za višino  $h$  je potrebno delo:

$$A = mg_0 h = \rho g_0 S h^2 = 144 \text{ J}$$

Težišče vode v polni posodi je na višini  $h/2$  nad tlemi, potencialna energija vode v posodi zato znaša:

$$W_p = mg_0 h/2 = A/2$$

Za napolnjenje posode z vodo je potrebno delo  $A$ , voda v posodi pa ima potencialno energijo  $A/2$ . V kaj se je spremenilo preostalo delo  $A - A/2 = A/2$ ? (Premisli, kaj se dogaja, ko natakaš vodo v posodo)

**3. Poševni met.** Telo z maso  $m$  odvržemo s tal z začetno hitrostjo  $v_0$ , to je z začetno kinetično energijo  $mv_0^2/2$ . Med dviganjem se njegova potencialna energija povečuje, kinetična pa zmanjšuje. Če zanemarimo

upor zraka, se vsota kinetične in potencialne energije med gibanjem (navzgor ali navzdol) ne spreminja. Na višini  $h$  ima telo potencialno energijo  $mgh$  in kinetično  $mv^2/2$ , tako da je:

$$\begin{aligned} mv_0^2/2 &= mgh + mv^2/2 \quad \text{ali} \\ v^2 &= v_0^2 - 2gh \quad (\text{gl. 1.42}) \end{aligned}$$

Hitrost v telesa na višini  $h$  je neodvisna od tega, pod kakšnim kotom odvržemo telo od tal, ali gre za navpični ali za poševni met, ali se telo dviga ali spušča (gl. sliko 1.31 na strani 21).

**4. Padanje palice** smo obravnavali na strani 76. Med padanjem opravlja delo edinole teža palice (sila tal v podporni točki palice ne, če palica ne zdrsne), njen delo pa upoštevamo s spremembo potencialne energije palice.

Ko palica pada od začetne pokončne lege do tal, se njena potencialna energija zmanjša za  $mgb/2$ , kinetična pa poveča z nič na  $J\omega_1^2/2$ . Sledi:

$$mgb/2 = J\omega_1^2/2 \quad \text{ali} \quad (J = mb^2/3)$$

$$\omega_1^2 = 3g/b$$

$$v_1 = b\omega_1 = \sqrt{3gb}, \text{ kar že poznamo.}$$

**5. Kotaljenje valja po klancu** (gl. str. 78) bomo tu obravnavali s pomočjo izreka o ohranitvi energije. Kolikšna je hitrost  $v_c$  težišča valja na dnu klanca?

Ko se težišče valja spusti za višinsko razliko  $h$ , se njegova potencialna energija zmanjša za  $mgh$ , kinetična pa poveča z nič (na vrhu klanca) na  $mv_c^2/2 + J_c\omega^2/2 = 3mv_c^2/4$  (na dnu), tako da je:

$$mgh = 3mv_c^2/4 \quad \text{ali}$$

$$v_c = \sqrt{(4/3)gh}$$

Na strani 78 smo izpeljali pospešek težišča valja:  $a_c = (2/3)g \cdot \sin\varphi$ , hitrost  $v_c$  pa dobimo z enačbo (1.21):  $v_c^2 = 2a_c s = 2(2/3)gs \sin\varphi \cdot h/\sin\varphi = (4/3)gh$ , enako kot zgoraj, le da po daljši poti.

### Prožnostna energija

Pogosto se zgodi, da je telo privezano na prožno vzmet (ali na kakšno drugo prožno telo). Gibajoče se telo potem nateguje ali krči vzmet s silo prožnosti, pri čemer opravlja delo:

Delo prožne sile pri deformaciji prožne vzmeti smo računali na strani 86. Ko se vzmet raztegne ali skrči za  $x$ , opravi prožna sila vzmeti delo (gl. 4.4):  $kx^2/2$ . Opravljeni delo je neodvisno od načina deformacije vzmeti, ali jo deformiramo hitro ali počasi, v enem koraku ali v več korakih itd. Torej je prožna sila vzmeti konservativna in lahko njen delo  $kx^2/2$  obravnavamo kot potencialno energijo telesa. Ta je enaka energiji deformirane prožne vzmeti; tej energiji pravimo **prožnostna energija** ( $W_{pr}$ ) vzmeti:

$$W_{pr} = kx^2/2 \quad (4.29)$$

Graf prožnostenje energije v odvisnosti od raztezka ali skrčka  $x$  je na sliki (4.19). Vidimo, da je ta energija najmanjša ( $= 0$ ) za  $x = 0$ , torej če vzmet ni ne raztegnjen ne skrčen.

Telo, prvezano na prožno vzmet, med gibanjem oddaja vzmet energijo (prožnostno) ali jo od nje prejema. Če na takšno telo učinkuje le še teža (druge sile, predvsem nekonservativne, pa zanemarimo), potem je vsota kinetične, gravitacijske potencialne in prožnostne energije stalna:

$$mv^2/2 + mgz + kx^2/2 = \text{konst.} \quad (4.30)$$

Kinetična energija telesa se lahko spreminja v potencialno ali prožnostno ali obratno, vendar tako, da se vsota vseh treh ne spremeni. Za njihovo spremembo je potrebna dodatna sila (npr. sila roke), ki opravi potrebno delo.

### Primeri:

**1. Vzmetno nihalo** (gl. str. 44). Telo z maso  $m$  je prvezano na prožno vzmet (s konstanto prožnosti  $k$ ). Ko raztegnemo vzmet za amplitudo  $x_0$ , opravimo delo  $kx_0^2/2$ , ki ga prejme vzmet (in s tem tudi nanjo pritrjeno telo) v obliki prožnostne energije. Ko telo spustimo, se približuje ravnoesni legi, pri čemer se njegova prožnostna energija zmanjšuje, kinetična pa povečuje. V ravnoesni legi ( $x = 0$ ) se prožnostna energija zmanjša na nič, kinetična pa je tedaj največja:  $mv_0^2/2$ . Največja kinetična energija nihajočega telesa (v ravnoesni legi) je enaka največji njegovi prožnostni energiji (v amplitudi):

$$mv_0^2/2 = kx_0^2/2 \text{ ali}$$

$$v_0 = \sqrt{k/m} \quad x_0 = \omega v_0 \quad (\text{gl. 1.32})$$

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad (\text{gl. 2.26})$$

Pri vmesnem raztezku  $x$  ima telo hitrost  $v$ , tako da je:

$$mv^2/2 + kx^2/2 = kx_0^2/2 = mv_0^2/2 \text{ ali}$$

$$v = v_0 \sqrt{1 - x^2/x_0^2} \quad (\text{gl. 1.32})$$

Vidimo, da se pri nihanju kinetična energija spreminja v prožnostno (potencialno), ko se nihajoče telo oddaljuje od ravnoesne lege, in obratno (ko se ji približuje). To prelivanje energije se lahko dogaja le s točno določeno frekvenco ( $\omega$ ), ki je lastna frekvencia nihala.

**2. Telo na elastični vrvi** (gl. str. 43). Na kateri globini se ustavi telo z maso  $m$ , ki je prvezano na elastično vrv (dolžina  $l$ , konstanta prožnosti  $k$ ), če ga spustimo z višine pritrdišča vrv?

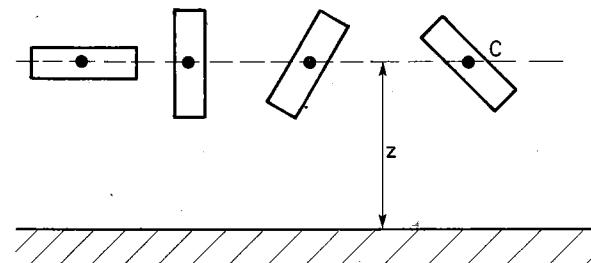
Telo se ustavi ( $v = 0$ ) na globini  $l + x_2$ , pri čemer je  $x_2$  največji raztezek vrv. Med tem prehodom se gravitacijska potencialna energija telesa zmanjša za  $mg(l + x_2)$ , prožnostna energija pa se poveča za  $kx_2^2/2$ . Ker je kinetična energija telesa na začetku in koncu enaka ( $= 0$ ), dobimo:

$$\Delta W_k + \Delta W_p + \Delta W_{pr} = 0$$

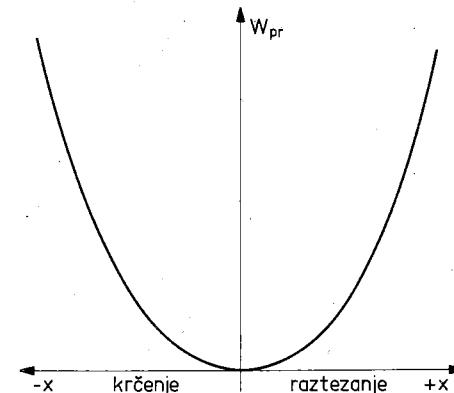
$$0 + (-)mg(l + x_2) + kx_2^2/2 = 0 \text{ ter}$$

$$x_2^2 - (2mgl/k)x_2 - 2mgl/k = 0$$

kar že poznamo (gl. str. 44).



Slika 4.18



Slika 4.19

Poisciemo še hitrost telesa ( $v$ ) na globini  $x$ . Za  $x < l$  imamo navaden prosti pad. Pri  $x > l$  se začne napenjati elastična vrv in je treba upoštevati tudi prožnostno energijo vrv. Izrek o spremembah celotne energije telesa se v tem primeru glasi:

$$mv^2/2 + (-)mg(l+x) + kx^2/2 = 0 \text{ ali} \\ v^2 = 2g(l+x) - (k/m)x^2$$

Na kateri globini ( $l+x_1$ ) ima telo največjo hitrost?

$$\frac{d(v^2)/dx}{dx} = 0 \text{ za } x = x_1 \\ 2g - (k/m \cdot 2x_1) = 0 \\ x_1 = mg/k$$

**3. Telesi**  $m_1 = 2 \text{ kg}$  in  $m_2 = 4 \text{ kg}$  sta povezani s prožno vzmetjo; konstanta prožnosti vzmeti je  $k = 20 \text{ N/cm}$ . Vzmet je stisnjena za  $x = 3 \text{ cm}$ . S kolikšno hitrostjo ( $v_1$  in  $v_2$ ) odletita telesi vsaksebi, ko vzmet sprostimo?

Stisnjena vzmet ima prožnostno energijo  $W_{pr} = kx^2/2 = 0,9 \text{ J}$ . Po sprožitvi se ta energija porazdeli med telesi kot kinetična energija:

$$m_1v_1^2/2 + m_2v_2^2/2 = W_{pr}$$

S kakršno gibalno količino ( $m_1v_1$ ) odleti eno telo v eno smer, odleti drugo telo v drugo smer ( $m_2v_2$ ), glej ohra-nitev gibalne količine sistema, str. 54):

$$m_1v_1 = m_2v_2$$

Iz gornjih enačb izračunamo  $v_1$  in  $v_2$ :

$$v_1 = \sqrt{m_2kx^2/m_1(m_1+m_2)} = 0,77 \text{ m/s} \\ v_2 = (m_1/m_2)v_1 = 0,39 \text{ m/s}$$

Vidimo, da lažje telo odleti z večjo hitrostjo kot teže. Telesi si razdelita razpoložljivo energijo v obratnem razmerju svojih mas:  $W_{k1}/W_{k2} = m_2/m_1$ . Lažje telo  $m_1$  prevzame 0,6 J, teže pa 0,3 J. Pri zračni puški je  $m_2$  (masa puške) velika v primerjavi z  $m_1$  (masa metka) in je zato  $W_{k1} \approx kx^2/2 = W_{pr}$ .

## Ravnovesne legi teles

Zgoraj obravnavani primeri kažejo, da lahko gibanje teles pod vplivom **konservativnih sil** obravnavamo kot **gibanje v potencialnem polju teh sil**, s tem da ugotovimo spremembe kinetične energije in ustreznih potencialnih energij. Slika potencialnega polja (potek silnic, kako se potencialna energija spreminja s krajem) mnogo pove o gibanju teles.

Ko telo v potencialnem polju spustimo, se premakne v smeri manjšanja potencialne energije (premakne – pospeši ga konservativna sila); povečanje kinetične energije, povezano s premikom telesa, gre na račun manjšanja potencialne energije. Čim bolj se potencialna energija spreminja s krajem, tem bolj se hitrost povečuje.

V smeri, v kateri se potencialna energija veča, se telo giblje pojemajoče, njegova kinetična energija pada.

Prvotno mirujoče telo se v tej smeri premakne le, če deluje dodatna sila, ki opravi delo, potrebno za povečanje potencialne energije.

**Telo obmiruje** v potencialnem polju, četudi ga spustimo, če je na mestu, kjer se **potencialna energija ne spreminja s krajem**, kjer je **odvod potencialne energije po krajevni koordinati enak nič** (mesta A, B in C na sliki 4.20). Ta mesta so **ravnovesne legi telesa** v potencialnem polju. Ker ni spremembe potencialne energije, tudi ni spremembe kinetične energije.

$$\frac{dW_p/dx}{dx} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{pogoj za ravnovesno lego (4.31)} \\ \text{v potencialnem polju} \end{array}$$

Poznamo tri vrste ravnovesnih leg: **stabilne, labilne in indifferentne**.

Ravnovesna lega je **stabilna**, če je v njej **minimum potencialne energije** (mesto A na sliki 4.20), če je v njeni neposredni okolici večja potencialna energija kot v njej sami. Kakršenkoli premik telesa iz stabilne ravno-vesne lege je združen s povečanjem potencialne energije. Ker je graf potencialne energije v okolici stabilne lege zakrivljen navzgor (lončasta oblika), je drugi **odvod potencialne energije po krajevni koordinati pozitiven**:

$$\frac{d^2W_p/dz^2}{dz^2} > 0 \quad \text{stabilna ravnovesna lega (4.32a)}$$

Mirujoče telo se samo od sebe ne more premakniti iz stabilne ravnovesne lege. Za tak premik je potrebna dodatna sila, ki opravi potrebno delo. Približevanje telesa k stabilni legi je pospešeno, oddaljevanje od nje pa pojemajoče.

Telo ima lahko več stabilnih ravnovesnih leg (mesta  $A_1$ ,  $A_2$  in  $A_3$  na sliki 4.21), ki pa v splošnem niso enako stabilne. Najbolj stabilna je tista lega, ki ustreza najnižjemu minimumu potencialne energije ( $A_3$ ). Če telo »dvignemo« iz stabilne lege (če mu povečamo potencialno energijo) in ga nato spustimo, se začne gibati pospešeno proti najbližji stabilni legi (ni nujno, da se povrne v isto stabilno lego, iz katere smo ga bili dvignili). Telo v splošnem niha okrog stabilne ravnovesne lege. Energija nihanja se zaradi energijskih izgub (dušenja) sčasoma izgublja in telo niha z vedno manjšimi amplitudami. Na koncu obmiruje v stabilni ravnovesni legi.

### Primer:

Telo  $m$ , ki visi na elastični vrv (gl. 2. primer na strani 43), je v stabilni ravnovesni legi, ko je vrv raztegnjena za  $x_1 = mg/k$ .

Celotna potencialna energija telesa v globini  $l+x$  (ko je vzmet raztegnjena za  $x$ ) je sestavljena iz gravitacijske energije  $-mg(l+x)$  (vzamemo, da je gravitacijska energija na višini pritrdišča vrv enaka nič) in iz prožnostne energije  $kx^2/2$ :

$$W_p = kx^2/2 - mg(l+x) \\ \frac{dW_p}{dx} = kx - mg = 0, x = mg/k = x_1 \\ \frac{d^2W_p}{dx^2} = k > 0$$

Ravnovesna lega telesa pri  $x = x_1$  je torej zares stabilna.

Povsem drugačna od stabilne je **labilna ravnovesna lega** (*B* na sliki 4.20). Značilno zanjo je, da je v njej **maksimum potencialne energije; drugi odvod potencialne energije po krajevni koordinati je negativen**:

$$d^2W_p/dx^2 < 0 \quad \text{labilna ravnovesna lega} \quad (4.32b)$$

Telo lahko ostane v labilni legi le, če je natančno v njej. Že najmanjši premik zadošča, da se začne pospešeno oddaljevati od nje – k najbližji stabilni legi. Telo se samo od sebe ne more vrniti v labilno lego.

**Indifferentna ravnovesna lega** je tista, v okolici katere je **potencialna energija enaka**, se ne spreminja s krajem (*C* na sliki 4.20). **Drugi odvod potencialne energije po krajevni koordinati je v indifferentni legi nič**:

$$d^2W_p/dx^2 = 0 \quad \text{indifferentna lega} \quad (4.32c)$$

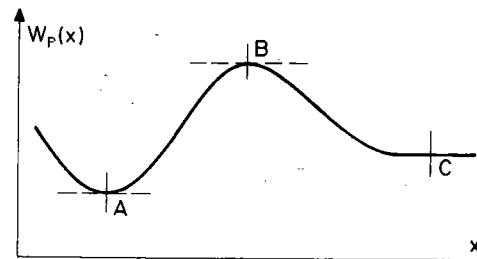
Ob kakršnemkoli premiku telesa iz indifferentne legе se potencialna energija telesa ne spremeni. Telo obmiruje v novi legi, se niti ne povrne k prvotni legi, niti se ne oddalji od nje.

Zgornje ugotovitve o značilnostih posameznih ravnovesnih leg drže le, če na telo učinkujejo edinole konzervativne sile, ki ustvarjajo potencialno polje. Pogosto pa poleg teh sil nastopajo tudi druge, npr. sila podlage, sila opore, v ležaju, v vrvi itd. Te sicer med gibanjem ne opravljajo dela (ne učinkujejo direktno na kinetično energijo telesa), zato pa predpisujejo tirnico, po kateri se telo lahko giblje skozi potencialno polje. Npr. telo se giblje po vodoravni podlagi, navzdol po klancu ali po dnu kotanje, čez hribček, kroži po loku, niha okrog fiksne osi ipd. Tudi v teh primerih nam slika potencialnega polja marsikaj pove o gibanju telesa vzdolž predpisane tirnice, saj sprememba potencialne energije na tej poti določa spremembo kinetične energije telesa.

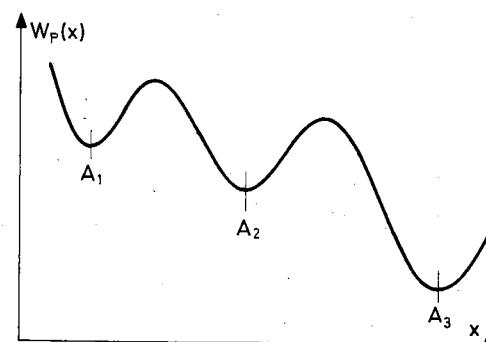
**Ravnovesno lego** telesa v splošnem (če so poleg konzervativnih sil prisotne tudi druge) definiramo kot lego, v kateri je **vsota vseh delujučih sil nič** (gl. mehansko ravnovesje sil, str. 70). Ni nujno, da v tej legi obstaja (v matematičnem smislu) odvod potencialne energije po krajevni koordinati (gl. sliki 4.22 in 4.23). V **stabilni ravnovesni legi je potencialna energija najmanjša** (v njeni okolici je večja), vendar ni rečeno, da v tej legi obstaja minimum potencialne energije, da je  $d^2W_p/dx^2 > 0$ . Podobno velja za **labilno lego**: v njej je **potencialna energija največja**, a ni nujno, da obstaja maksimum potencialne energije. Edinole za **indifferentno lego** velja enako kot v čistem potencialnem polju: potencialna energija se ne spreminja s krajem, njena odvoda (prvi in drugi) po krajevni koordinati sta nič.

Primeri indifferentnih leg: kroglica na vodoravni ploskvi, ravnilo – obešeno v težišču, človek v breztežnem stanju, telo – ki potopljeno lebdi v vodi itd.

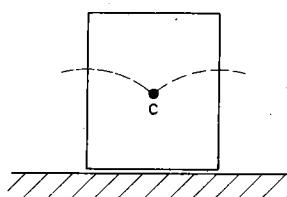
Kroglica na dnu skodelice ali kotanje je v stabilni ravnovesni legi, ravno tako telo, ki visi tako, da je njegovo težišče pod pritrdiščem. Kvader na vodoravnih tleh je v stabilni legi, če leži na eni od stranskih ploskev. Torej ima 6 stabilnih leg, ki pa niso enako stabilne. Najbolj stabilna je lega, pri kateri je težišče kvadra najnižje (če kvader leži na največji ploskvi). Če kvader zasukamo okrog njegovega spodnjega roba, se njegovo težišče dvigne (črtkana krivulja na sliki 4.22). Vidimo, da graf potencialne energije v tej stabilni legi nima vodoravne tangente, tudi drugi odvod ni pozitiven.



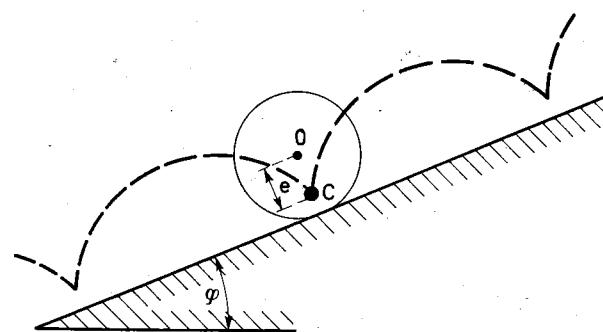
Slika 4.20



Slika 4.21



Slika 4.22



Slika 4.23

ven. Poleg teže moramo namreč upoštevati tudi normalno silo tal, ki je nasprotno enaka teži kvadra, tako da je rezultanta vseh delujocih sil nič, kar je pogoj za ravnovesno stanje.

Homogen valj se sam od sebe kotali navzdol po klancu, njegovo težišče se spušča proti najbližji stabilni legi. Drugače je, če valj ni homogen (recimo, da ima vgrajeno svinčeno palico), tako da njegovo težišče ni na osi. Med kotaljenjem po klancu se težišče takšnega ekscentričnega valja giblje po poševno nagnjeni cikloidi (črtkana črta na sliki 4.23). Če strmina klanca ni prevelika, ima valj na klancu več stabilnih ravnovesnih leg, v katerih kljub klancu miruje (zakotitev navzgor ali navzdol pomeni dvig težišča). Teh stabilnih leg ni, če je strmina klanca (to je tangens naklonskega kota) večja od  $e/R$ , kjer je  $e$  oddaljenost težišča valja od središča (osi),  $R$  pa polmer valja.

**Primeri labilnih leg:** kroglica na vrhu kroglaste kapice ali na konici, kocka – ki stoji na oglu ali robu, tako da je njen težišča tik nad podporo, staja telovadca itd.

## Trki

Med gibanjem lahko telesa trčijo drugo ob drugo, pri čemer se v splošnem spremenita hitrost in smer njihovega gibanja, obenem se tudi deformirajo. Trk teles je v splošnem zelo zapleten, saj lahko sodeluje različno število teles. Tu bomo obravnavali t. i. **binarni trk**, to je **trk dveh teles**.

Trk se prične v trenutku, ko se telesi dotakneta. Črta, ki gre skozi dotikalische teles in je pravokotna na njuno stično ravnino, je **črta trka**. Pravimo, da je trk teles **centralen**, če ležita težišči teles na črti trka, npr. trk biljardnih krogel (slika 4.24a). Večinoma pa telesa niso simetrično oblikovana in črta trka ne gre skozi njihova težišča, trk je zato **necentralen**, npr. trk jajčastih teles (slika 4.24b).

O **premem trku** govorimo, če se telesi gibljeta pred trkom in po njem v smeri črte trka (slika 4.25a), npr. trk vozičkov na ravnom tiru. Sicer je trk **poševen** (slika 4.25b), telesi se gibljeta (pred in po trku) vsako v svoji smeri, ki se ne ujema s črto trka. Necentralni trki so vedno poševni, centralni pa so lahko premi ali poševni, odvisno od smeri gibanja teles pred trkom.

Telo z maso  $m$  se giblje s hitrostjo  $v_1$  in zadene ob telo z maso  $m_2$ , ki ima hitrost  $v_2$ . Pri tem prvo telo učinkuje na drugo s silo  $F_{12}$ , drugo pa obenem učinkuje nazaj na prvo s silo  $F_{21} = -F_{12}$  (po Newtonovem zakonu o medsebojnem učinkovanju teles). Zaradi teh medsebojnih sil telesi spremenita hitrost in se obenem deformirata. Možno je, da se telesi ob trku celo razbijeta ali se spojita v novo telo. Notranji sili medsebojnega učinkovanja teles opravita precejšnje delo, zaradi česar se ob trku dogajajo opazne energijske spremembe, povezane npr. s spremembami hitrosti teles, njihovo sestavo in zgradbo (možne so celo kemične reakcije). V tem poglavju nas bo zanimala le sprememba kinetične energije teles ob trku.

Ne glede na vrsto in izid trka predpostavimo, da se **skupna masa teles ob trku ne spremeni**:

$$(m_1 + m_2) \text{ pred trkom} = (m_1 + m_2) \text{ po trku} \quad (4.33)$$

S trkom se masa teles niti ne poveča niti ne zmanjša. Ta predpostavka ne drži za trke izredno majhnih in hitrih atomskih delcev, katerih masa se lahko ob trku poveča ali zmanjša (na račun energijskih sprememb).

## Energijske razmere pri trku

Recimo, da hitrejše telo  $m_1$  s hitrostjo  $v_1$  zadene ob počasnejše telo  $m_2$ , ki se pred trkom giblje s hitrostjo  $v_2$ . Hitrejše telo zadene ob počasnejše in ga začne potiskati pred seboj. Počasnejše telo se zaradi vztrajnosti upira in pritiska nazaj. Posledica tega medsebojnega učinkovanja je, da se hitrejše telo giblje počasneje, počasnejše pa hitreje, obenem se telesi deformirata. To poteka toliko časa, dokler se telesi ne gibljeta enako hitro, npr. s hitrostjo  $v_d$  (slika 4.26). Tedaj je deformacija teles največja in telesi sta nekako zlepjeni ter se gibljeta s skupno hitrostjo  $v_d$ . V tej prvi fazi trka je hitrejše telo izgubilo nekaj kinetične energije ( $m_1 v_1^2/2 - m_1 v_d^2/2$ ), ki se je delno porabilo za povečanje kinetične energije počasnejšega telesa (od  $m_2 v_2^2/2$  na  $m_2 v_d^2/2$ ), delno pa za deformacijo teles ( $W_0$ ):

$$\begin{aligned} m_1 v_1^2/2 - m_1 v_d^2/2 &= m_2 v_d^2/2 - m_2 v_2^2/2 + W_0 \text{ ali} \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 &= (m_1 + m_2) v_d^2 + 2W_0 \end{aligned}$$

Del kinetične energije hitrejšega telesa se v prvi fazi trka naloži kot deformacijska energija v notranjost teles (telesi se deformirata, notranje spremenita, njuna notranja energija se spremeni).

V drugi fazi trka se začne vložena deformacijska energija  $W_0$  sproščati, deformacija teles se začne zmanjševati. Če je deformacija prožna (elastična), dobita telesi zopet prvotno obliko (in notranje stanje) in vsa deformacijska energija  $W_0$  se spremeni nazaj v kinetično energijo, ki si jo telesi razdelita. Ta je **prožni** ali **elastični trk**.

V splošnem deformacija teles ni povsem prožna in telesi sta po končanem trku še nekoliko deformirani, kar pomeni, da se le del maksimalne deformacijske energije  $W_0$  vrne v obliki kinetične energije, ostane pa ostane v telesih kot povečana notranja (deformacijska) energija. Telesi se po trku sicer ločita in se gibljeta vsak s svojo hitrostjo ( $v'_1$  in  $v'_2$ ), vendar je njuna skupna kinetična energija manjša, kot je bila pred trkom. Pravimo, da je trk v splošnem **delno prožen**. Maksimalna deformacijska energija  $W_0$  se razdeli na tri dele:

$$W_0 = (m_1 v'_1^2 - m_1 v_d^2)/2 + (m_2 v'_2^2 - m_2 v_d^2)/2 + W_d \quad (4.34)$$

$W_d$  je **deformacijska energija**, ki po trku ostane v obeh deformiranih telesih.

Seštejemo zgornji energijski enačbi in dobimo **energijsko enačbo delno prožnega trka**:

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v'_1^2 + m_2 v'_2^2 + 2W_d \quad (4.35)$$

**Vsota kinetičnih energij teles po trku je manjša kot pred trkom;** razlika vsot kinetičnih energij je enaka deformacijski energiji, ki ostane v notranosti deformiranih teles.

Skrajni primer delno prožnega trka je **popolnoma neprožni ali neelastični trk**. Pri tem trku se deformacija teles, do katere pride ob koncu prve faze trka, ne popravi in telesi se tudi po trku gibljeta »zlepjeno« s

skupno hitrostjo  $v_d$ , ki jo imata v trenutku največje deformacije. Celotna deformacijska energija ostane v notranjosti teles:  $W_d = W_0$ . Pri prožnem trku pa je  $W_d = 0$ .

### Ohranitev gibalne količine pri trku

Med trkom učinkujeta telesi drugo na drugo s silama  $\mathbf{F}_{12}$  in  $\mathbf{F}_{21}$ , ki sta notranji sili sistema obeh teles. Poleg njiju v splošnem učinkujejo na telesi tudi zunanjne sile, npr. teža, upor, trenje. Vendar sta notranji sili v času trajanja trka večinoma mnogo močnejši od zunanjih sil in lahko vpliv zunanjih na izid trka zanemarimo. Pri trku sta pomembni le notranji sili, ki telesi deformirata in obenem spremenita njuni gibalni količini. Vemo pa, da notranje sile ne morejo spremeniti celotne gibalne količine sistema teles (gl. str. 53). Torej se **skupna gibalna količina teles pri trku ne spremeni: vektorska vsota gibalnih količin teles po trku je enaka kot pred trkom**. Čeprav smo to trditev že dokázali za splošen sistem teles, si dokaz za trk teles oglejmo še enkrat.

Prvo telo  $m_1$  učinkuje na drugo telo  $m_2$  s silo  $\mathbf{F}_{12}$  in med trkom (ki traja  $\Delta t$  časa) spremeni njegovo gibalno količino z  $m_2\mathbf{v}_2$  na  $m_2\mathbf{v}'_2$ , tako da je sunek sile  $\mathbf{F}_{12}$  enak spremembji gibalne količine (gl. 2.5):

$$m_2\mathbf{v}'_2 - m_2\mathbf{v}_2 = \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}_{12} dt$$

Obenem drugo telo s silo  $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$  spremeni gibalno količino prvega z  $m_1\mathbf{v}_1$  na  $m_1\mathbf{v}'_1$ :

$$m_1\mathbf{v}'_1 - m_1\mathbf{v}_1 = \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}_{21} dt = - \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}_{12} dt = - (m_2\mathbf{v}'_2 - m_2\mathbf{v}_2)$$

ali

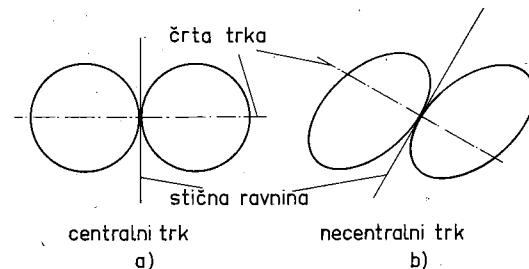
$$\boxed{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2} \quad (4.36)$$

Pri trku se gibalna količina posameznih teles spremeni, toda njuna vektorska vsota se ohraňuje. Ohranitev gibalne količine velja za vse trke, tako za centralne ali necentralne, preme ali poševne, kot za prožne ali ne-prožne.

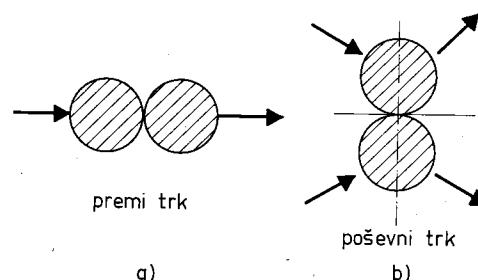
Poleg gibalne količine teles se pri trku **ohranja** tudi **hitrost masnega središča teles**, saj vemo (gl. str. 55), da notranje sile ne morejo vplivati na gibanje masnega središča sistema teles. **Masno središče teles se neodvisno od trka giblje enako hitro**, ne glede na to, ali telesi trčita ali ne, ter kako trčita.

Zakon o ohranitvi gibalne količine teles pri trku (gl. 4.36) lahko izpeljemo tudi iz zahteve, da mora energijski zakon (gl. 4.35) veljati v vsakem inercialnem koordinatnem sistemu, v katerem opazujemo trk teles in merimo njuni hitrosti pred trkom in po njem. Splošno velja, da so **fizikalni zakoni enaki** v vsakem inercialnem koordinatnem sistemu, da so torej **invariantni glede na inercialni koordinatni sistem**.

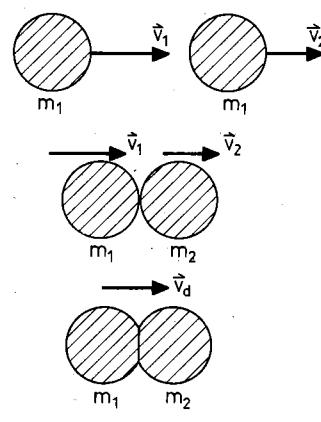
Vzemimo, da imamo inercialna koordinatna sistema, ki se drug glede na drugega gibljeta s stalno hitrostjo  $\mathbf{v}_0$ . Hitrosti teles pred trkom in po njem so  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}'_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  in  $\mathbf{v}'_2$ , če jih merimo v prvem sistemu, in  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}'_1$ ,  $\mathbf{w}_2$  in  $\mathbf{w}'_2$  v drugem. Medsebojno so povezane z enačbo (1.54):  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{w}'_1 = \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}_0$  itd. Ker mora energijski zakon veljati v enaki obliki v obeh koordinatnih sistemih, se enačba (4.35) v drugem sistemu glasi:



Slika 4.24



Slika 4.25



Slika 4.26

$$\begin{aligned} m_1 w_1^2 + m_2 w_2^2 &= m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 + 2W_d \text{ ali} \\ m_1(v_1 - v_0)^2 + m_2(v_2 - v_0)^2 &= m_1(v_1' - v_0)^2 + m_2(v_2' - v_0)^2 + 2W_d \end{aligned} \quad (4.35a)$$

Razumljivo je, da je deformacijska energija  $W_d$  enaka v obeh koordinatnih sistemih. Enačbo (4.35) odštejemo od enačbe (4.35a), upoštevamo enačbo (4.33) o ohranitvi mase teles pri trku in dobimo enačbo:  $(m_1 v_1 + m_2 v_2)v_0 = (m_1 v_1' + m_2 v_2')v_0$ , ki mora veljati ne glede na hitrost  $v_0$  koordinatnega sistema. To dosežemo, če izenačimo oklepaja:  $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$ , kar je enačba zakona o ohranitvi gibalne količine teles pri trku. Deformacijska energija  $W_d$  izpade iz računa, torej ta zakon velja za vse vrednosti  $W_d$ , to je ne glede na prožnost ali neprožnost trka.

### Neprožni trk

Po neprožnem trku se telesi »zlepita« in se gibljeta naprej s skupno hitrostjo, npr.  $\mathbf{v}$  ( $v_1' = v_2' = v_d = v$ ). To se zgodi pri trku lepljivih, testenih kep ali če se telesi ob trku sprimeta. Izrek o ohranitvi gibalne količine (gl. 4.36) ima v tem primeru obliko:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \quad (4.36a)$$

Vidimo, da se po neprožnem trku zlepjeni telesi gibljeta v smeri začetne skupne gibalne količine. Zaradi matematične preglednosti vzemimo, da drugo telo pred trkom miruje ( $v_2 = 0$ ). Po trku se telesi gibljeta s hitrostjo:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 m_1 / (m_1 + m_2) \quad (4.36b)$$

v smeri gibanja vpadnega telesa.

Pri neprožnem trku se del kinetične energije izgublja na račun deformacijske energije  $W_d$  ( $= W_0$ ), ki ostane v telesih v obliki notranje energije (telesi se npr. segretata). Poglejmo, kolikšen del začetne kinetične energije vpadnega telesa ( $W_k = m_1 v_1^2 / 2$ ) se spremeni v deformacijsko energijo:

$$\begin{aligned} W_d &= W_k - W'_k = m_1 v_1^2 / 2 - (m_1 + m_2) v^2 / 2 \\ W_d &= W_k m_2 / (m_1 + m_2) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Čim večja je masa mirujočega telesa v primerjavi z maso vpadnega, tem več začetne kinetične energije se izgubi v deformirnem telesu kot notranja energija. Če npr. telo zadene ob masiven zid ( $m_2 \gg m_1$ ), je  $W_d \approx W_k$ , se vsa kinetična energija porabi za deformacijo (seveda, saj telesi po trku mirujeta); telo se prilepi ob zid in obmiruje. Pač pa je deformacijska energija zanesljivo majhna, če vpadno telo  $m_1$  zadene ob izredno lahko telo: za  $m_1 \gg m_2$  je  $W_d \approx 0$ .

### Primeri:

- Balistično nihalo** je nitno (matematično) nihalo, viseče na dolgih nitkah, tako da je njegov nihajni čas  $t_0$  velik; uporabljamo ga za merjenje gibalne količine izstrelkov in drugih hitro gibajočih se teles (slika 4.27). V mirujoči klado nihala (masa  $M$ ) izstrelimo kroglico, katere gibalno količino  $G = mv$  želimo izmeriti. Kroglica se zarine v klado in se v njej ustavi (neprožen trk),

nakar se klada s kroglico premakne s hitrostjo  $v = G/(m + M)$  (gl. 4.36b). Nihalo zaniha iz ravnoesne lege in se odkloni za amplitudo  $x_0$ , ki jo izmerimo, nakar niha naprej harmonično z nihajnim časom  $t_0$ . Največja hitrost ima v trenutku, ko zaniha skozi prvotno ravnoesno lego:  $v_0 = x_0 \omega = x_0 \cdot 2\pi/t_0$  (gl. 1.32). Ta hitrost je praktično enaka hitrosti  $v$ , ki jo nihalo dobi takoj po trku, če je le čas trajanja trka majhen v primerjavi z nihajnim časom  $t_0$  nihala, tako da je nihalo takoj po trku še v ravnoesni legi. Sledi:  $v = G/(m + M) \approx v_0 = 2\pi x_0/t_0$  ali  $G \approx 2\pi x_0(m + M)/t_0$ . Izmerimo prvi največji odklon nihala ( $x_0$ ) in s tem določimo gibalno količino  $G$  kroglice.

**2. Kroglico** (masa  $m = 50$  g) izstrelimo s hitrostjo  $v_1 = 150$  m/s v vodoravni smeri v leseni blok z maso  $M = 2$  kg, ki leži na vodoravnih tleh. Kroglica se zarine v blok. Za koliko ( $x$ ) se premakne blok, če je torni koeficient med blokom in tlemi  $k_t = 0,2$ ?

Po strelu se blok s kroglico začne gibati s hitrostjo  $v_0 = mv_1/(M + m)$ , to je s kinetično energijo  $W_k = (M + m)v_0^2/2$ . Med drsenjem se ta energija porabi za delo torne sile na poti  $x$ :  $W_k = Fx = m^2 v_1^2 / 2(M + m) = k_t(M + m)gx$   $x = m^2 v_1^2 / [2gk_t(M + m)^2] = 0,33$  m = 33 cm

**3. Mizica vzmetne tehnice** ima maso  $M = 0,5$  kg; konstanta prožnosti vzmeti je  $k = 40$  N/cm. Na mizico spustimo z višine  $h = 20$  cm svinčeno kepo z maso  $m = 2$  kg. Za koliko ( $x$ ) se pri tem stisne vzmet, če se kepa prilepi ob mizico?

Kepa prilepi do mizice s hitrostjo  $v_1 = \sqrt{2gh}$ . Po trku se mizica in kepa gibljeta s hitrostjo  $v = mv_1/(M + m)$  oziroma s kinetično energijo  $W_k = m^2 gh / (M + m)$ , ki se nato naloži v prožnostno energijo stisnjene vzmeti. Upoštevati moramo še zmanjšanje gravitacijske potencialne energije mizice in kepe med spustom za  $x$ :

$$\begin{aligned} W_k + W_p &= W_{pr} \\ m^2 gh / (M + m) + (M + m)gx &= kx^2 / 2 \end{aligned}$$

Dobimo kvadratno enačbo za neznanko  $x$ ; upoštevamo pozitivno rešitev:  $x = 4,0$  cm.

**4. Vesoljska ladja** se giblje premočrtno skozi vesolje, ki je enakomerno posejano z drobnim vesoljskim prahom. Ta zadeva ob ladjo (oz. ladja zadeva obenj) in se prileplja nanjo, tako da njena masa narašča s časom; vsako časovno enoto se poveča npr. za  $dm/dt = \alpha v$ , kjer je  $\alpha$  znan parameter. Kako se zaradi tega spremeni masa s časom ( $m$ ) in hitrost ( $v$ ) ladje?

Trk ladje in prahu je neprožen, gibalna količina ladje se ne spreminja s časom:  $G = mv = m_0 v_0$ , kjer sta  $m_0$  in  $v_0$  začetna masa ter hitrost ladje. Sledi:

$$\begin{aligned} v &= m_0 v_0 / m \quad \text{ter} \\ dm/dt &= \alpha m_0 v_0 / m \quad \text{ali} \\ mdm &= \alpha m_0 v_0 dt \end{aligned}$$

Po integraciji, upoštevaje začetni pogoj:  $m = m_0$  za  $t = 0$ , dobimo:

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{m_0^2 + 2\alpha m_0 v_0 t} \quad \text{ter} \\ v &= v_0 \sqrt{1 + 2\alpha v_0 t / m_0} \end{aligned}$$

**5. Drsalca** ( $m_1 = 60 \text{ kg}$  in  $m_2 = 20 \text{ kg}$ ) se gibljetva enako hitro ( $v_0 = 2 \text{ m/s}$ ) poševno pod kotom  $2\alpha = 60^\circ$  drug proti drugemu (slika 4.28). Ko se srečata, se sprimeta. Kolikšna je njuna skupna hitrost ( $v$ ) in v kateri smeri se gibljetva (pod kotom  $\beta$  glede na simetralo njunih začetnih smeri)?

Trk je poševeden, zato moramo enačbo (4.36) o ohranitvi gibalne količine rešiti v vektorski obliki. Najenostavnejše je, če jo zadovoljimo posebej za projekcije hitrosti v smeri simetrale in posebej za projekcije v pravokotni smeri:

$$\begin{aligned} m_1 v_0 \cos \alpha + m_2 v_0 \cos \alpha &= v(m_1 + m_2) \cos \beta \\ m_1 v_0 \sin \alpha - m_2 v_0 \sin \alpha &= v(m_1 + m_2) \sin \beta \end{aligned}$$

Drugo enačbo delimo s prvo:

$$\tan \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}, \quad \beta = 16^\circ$$

Enačbi kvadriramo in nato seštejemo:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{v_0^2}{m_1 + m_2} (m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos(2\alpha))} = \\ v &= 1,8 \text{ m/s} \end{aligned}$$

### Prožni trk

Prožno trčijo elastična ali prožna telesa, npr. biljardne krogle. V drugi fazi trka se deformacija (povzročena v prvi fazi) sprošča in ob koncu trka povsem izgine; telesi povrneta prvotno obliko in notranje stanje, vsa deformacijska energija se vrne v kinetično:  $W_d = 0$ , telesi odletita z različnimi hitrostma  $v'_1$  in  $v'_2$ . Prožni trak omogoča, da se del kinetične energije prenese z enega (hitrejšega) telesa na drugo telo (počasnejše).

Poleg izreka o ohranitvi gibalne količine uporabimo tudi izrek o ohranitvi kinetične energije (4.35 z  $W_d = 0$ ):

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (4.36)$$

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v'_1^2 + m_2 v'_2^2 \quad (4.38)$$

Najprej si oglejmo premi trk. Pred trkom in po njem se telesi gibljetva v isti črti, zato lahko vektorsko naravo gibanja opustimo. Domenimo se le, da je hitrost pozitivna, če ima smer hitrosti  $v_1$  vpadnega telesa, in negativna v nasprotnem primeru.

Recimo, da se telo  $m_1$  s hitrostjo  $v_1$  zaleti v mirujoče telo  $m_2$  ( $v_2 = 0$ ). S kolikšnima hitrostma ( $v'_1$  in  $v'_2$ ) odletita vpadno in mirujoče telo po prožnem trku? Obe strani enačb (4.36,38) delimo z maso  $m_1$  vpadnega telesa in vpeljemo parameter:

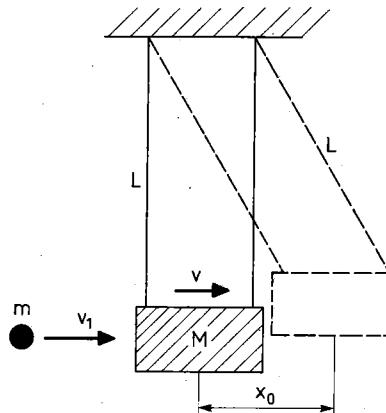
$$A = m_2/m_1$$

tako da se zgornji enačbi poenostavita v:

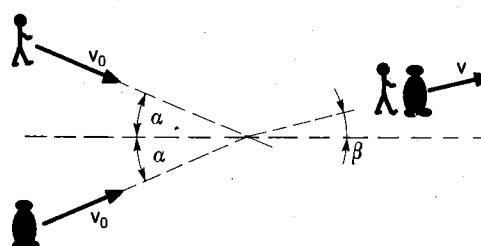
$$\begin{aligned} v'_1 &= v_1' + Av'_2 \\ v'_2 &= v_1'^2 + Av'_2^2 \end{aligned}$$

Iskani netrivialni rešitvi sta:

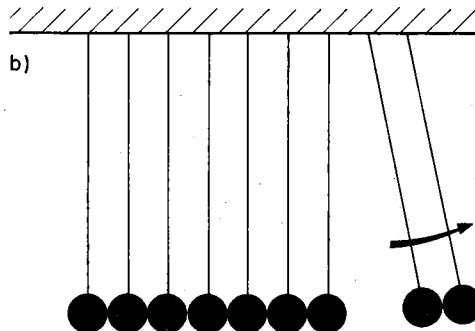
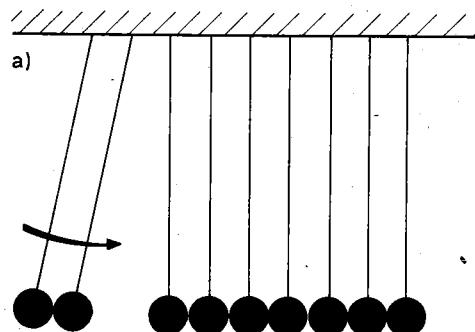
$$\begin{aligned} v'_1 &= v_1(1 - A)/(1 + A) \\ v'_2 &= v_1 \cdot 2/(1 + A) \end{aligned} \quad (4.39)$$



Slika 4.27



Slika 4.28



Slika 4.29

Vpadno telo se tudi po trku giblje naprej v vpadni smeri ( $v_1 > 0$ ), če je  $A < 1$  oziroma  $m_1 > m_2$  (če zadene ob lažje telo). Od težjega telesa ( $A > 1$ ) pa se odbije nazaj ( $v_1 < 0$ ). Če trči ob masiven zid ( $m_2 \gg m_1, A \gg 1$ ), je  $v'_1 = -v_1$  in  $v'_2 = 0$ , kar pomeni, da se odbije z enako hitrostjo nazaj, zid pa se ne premakne. Poseben primer dobimo za  $A = 1$ , če torej telo trči ob enako težko, mirujoče telo. Tedaj je  $v'_1 = 0$  in  $v'_2 = v_1$ ; vpadno telo se po trku ustavi, prvotno mirujoče telo pa odleti naprej s hitrostjo vpadnega telesa. **Telo torej izgubi vso svojo kinetično energijo, če elastično trči ob mirujoče enako težko telo; izgubljeno energijo prejme prvotno mirujoče telo in jo odnese naprej v vpadni smeri (štafetna predaja energije).** Ta pojav je značilen za prožni trk in lahko z njim preizkušamo prožnost trka.

Za ilustracijo si oglejmo vrsto enakih, dotikajočih se biljardnih krogel, ki vise na enako dolgih nitkah (slika 4.29). Če prvo kroglo v vrsti dvignemo in nato spustimo, da trči ob drugo, zadnja v vrsti odskoči z enako hitrostjo, kot vpade prva. Prva krogla s prožnim trkom preda kinetično energijo drugi (sama pa obmiruje), druga tretji itd., dokler ne prejme energije zadnja v vrsti in z njo odleti. Če dvignemo dve krogli in spustimo, odskočita ravno tako dve krogli – predzadnja in zadnja. S stališča ohranitve gibalne količine bi lahko odskočila le zadnja krogla (z dvojno hitrostjo), toda ohranitev kinetične energije to možnost izloča.

### Primeri:

**1. Kol zabijemo v zemljo tako, da spuščamo nanj pilot.** Pilot z maso  $m = 200$  kg spustimo z višine  $h = 1,5$  m. Ko pade na enako težek kol, se po prožnem trku ustavi, kol pa sune navzdol. Za koliko ( $x$ ) se kol premakne, če se tla upirajo prodiranju kola s povprečno silo  $F = 20$  kN?

Pilot prileti s kinetično energijo  $mgh$ , ki jo s prožnim trkom preda kolu. Ta se spusti za  $x$  in izgubi prejeto kinetično energijo ter gravitacijsko energijo s premanjanjem upora tal:

$$Fx = mg(h + x) \text{ ter } x = mgh/(F - mg) = 0,16 \text{ m} = 16 \text{ cm}$$

**2. Kroglici**  $m_1 = 10$  g in  $m_2 = 20$  g visita na enako dolgih nitkah, tako da se dotikata. Lažjo kroglico dvignemo za višinsko razliko  $h_0 = 27$  cm in nato spustimo, da elastično trči ob visečo kroglico  $m_2$  (slika 4.30). Za kolikšni višini ( $h_1$  in  $h_2$ ) se po trku dvigneta kroglici?

Kroglica  $m_1$  trči ob kroglico  $m_2$  s hitrostjo  $v_1 = \sqrt{2gh_0}$ ; od nje se odbije s hitrostjo  $v'_1 = v_1(m_2 - m_1)/(m_2 + m_1)$  (gl. 4.39), to je s kinetično energijo  $m_1v'_1/2 = (m_1v_1^2/2)(m_2 - m_1)^2/(m_2 + m_1)^2$ . Ta se med dviganjem spremeni v gravitacijsko potencialno energijo  $m_1gh_1$ . Dobimo:

$$h_1 = h_0(m_2 - m_1)^2/(m_2 + m_1)^2 = h_0/9 = 3 \text{ cm}$$

Mirujoča kroglica  $m_2$  odleti s hitrostjo  $v'_2 = 2v_1m_1/(m_2 + m_1)$ , to je s kinetično energijo  $m_2v'_2/2$ , in se dvigne za višino  $h_2$ , tako da je:

$$h_2 = v'_2/2g = h_0 \cdot 4m_1^2/(m_2 + m_1)^2 = 12 \text{ cm}$$

Preveri, da velja:  $m_1h_0 = m_1h_1 + m_2h_2$ .

**3. Kroglo** zalučamo z začetno hitrostjo  $v_0 = 20$  m/s navpično navzgor proti stropu na višini  $h = 10$  m. Po kolikšnem času ( $t$ ) in s kolikšno hitrostjo ( $v$ ) prileti do tal, če se od stropa odbije elastično?

Krogla prileti do stropa s hitrostjo  $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = 14,3$  m/s po času  $t_1 = (v_0 - v_1)/g = 0,6$  s in se od njega odbije z enako veliko hitrostjo navzdol. Tla doseže s hitrostjo  $v = \sqrt{v_1^2 + 2gh} = v_0$  po času  $t_2$ , ki zadošča enačbi:  $v_0 = v_1 + gt_2$  ali  $t_2 = (v_0 - v_1)/g = 0,6$  s, oziroma po skupnem času  $t = t_1 + t_2 = 1,2$  s.

**4. Elastični kroglici**  $m_1$  in  $m_2$  skupno padata proti vodoravnim tlom (slika 4.31). Pri katerem razmerju njunih mas ( $A = m_2/m_1$ ) se spodnja krogla  $m_2$  po udarcu ob tla ustavi? S kolikšno hitrostjo ( $v_1$ ) odskoči zgornja kroglica  $m_1$ ?

Kroglici prileti do tal s skupno hitrostjo  $v_0$  (slika a). Najprej trči ob tla spodnja kroglica  $m_2$ , ki se odbije navzgor z enako veliko hitrostjo  $v_0$  in takoj nato trči ob še padajočo kroglico  $m_1$  (slika b). Po trku se giblja navzgor s hitrostima  $v_1$  in  $v_2$ . Če hitrosti navzgor štejemo kot pozitivne, navzdol pa negativne, se enačbi (4.36, 38) glasita:

$$(A - 1)v_0 = v_1 + Av_2 \\ (A + 1)v_0^2 = v_1^2 + Av_2^2$$

Netrivialna rešitev tega sistema enačb je:

$$v_1 = v_0(3A - 1)/(A + 1) \\ v_2 = v_0(A - 3)/(A + 1)$$

Torej spodnja kroglica obstane na tleh ( $v_2 = 0$ ), če je  $A = 3$ . Tedaj zgornja kroglica odskoči navzgor s hitrostjo  $v_1 = 2v_0$  in se zato dvigne na štirikratno višino, s katere smo kroglici spustili.

Kaj se zgodi, če sta kroglici enako težki ali celo, če je zgornja kroglica težja od spodnje?

**5. Na kolikšni višini ( $h$ ) mora biti rob biljardne mize?** (Slika 4.32)

Biljardna krogla (polmer  $R$ ) se prikotali do roba mize v pravokotni smeri in se odbije od njega. Želimo, da se odkotali od roba z enako translacijsko in enako rotacijsko kinetično energijo, kot vpade.

Oster rob deluje na kroglo s silo  $F$ , katere sunek ( $F\Delta t$ ) spremeni gibalno količino težišča krogle od  $-mv_c$  na  $+mv_c$ , to je za  $\Delta G = 2mv_c$ . Sunek navora te sile ( $M\Delta t = Fh\Delta t$ ) pa spremeni njen vrtilno količino od  $-J_0\omega$  na  $+J_0\omega$ , to je za  $\Delta\Gamma = 2J_0\omega$  ( $J_0$  je vztrajnostni moment krogle glede na os skozi dotikalishče =  $7mR^2/5$ ). Sledi:

$$F\Delta t = 2mv_c \\ M\Delta t = Fh\Delta t = 2J_0\omega$$

Ker se krogla kotali, je  $v_c = R\omega$  (gl. 3.50), in dobimo (če drugo enačbo delimo s prvo):

$$h = J_0\omega/mv_c = (7/5)R$$

**Poševni prožni trk** je precej bolj zapleten kot premi. Ker se telesi pred trkom in po njem giblja v različnih smereh, moramo enačbo (4.36) o ohranitvi gibalne količine obravnavati kot vektorsko.

Recimo, da se telo  $m_1$  s hitrostjo  $\mathbf{v}_1$  zaleti v mirujoče telo  $m_2$ . Po prožnem trku telesi odskočita s hitrostma  $\mathbf{v}'_1$  in  $\mathbf{v}'_2$  v različnih smereh. Ker se njuna gibalna količina ohranja, je:

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{v}_1 &= m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 \quad \text{ali} \\ \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}'_1 + A \mathbf{v}'_2 \quad , \quad A = m_2/m_1 \end{aligned}$$

Zgornjo enačbo nazorno prikažemo z vektorskim diagramom. Na sliki (4.33) sta označena dva možna izida trka, pri premem odletita telesi z gibalnima količinama  $m_1 \mathbf{v}_1$  in  $m_2 \mathbf{v}_2$ , pri drugem pa z  $m_1 \mathbf{v}'_1$  in  $m_2 \mathbf{v}'_2$ . Gibalni količini teles po trku sta sicer poljubni; vendar mora biti njuna vektorska vsota enaka vpadni gibalni količini  $m_1 \mathbf{v}_1$ . Izid trka je nadalje pogojen z izrekom o ohranitvi kinetične energije (gl. 4.38), ki ima v našem primeru obliko:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1^2 &= \mathbf{v}'_1^2 + A \mathbf{v}'_2^2 = (\mathbf{v}_1 - A \mathbf{v}'_2)^2 + A \mathbf{v}'_2^2 \quad \text{ali} \\ (A+1) \mathbf{v}'_2^2 - 2 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}'_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

Zanima nas, v kateri smeri in s kolikšno hitrostjo se po trku giblje telo  $m_2$ , ki je pred trkom mirovalo. Ravninski koordinatni sistem  $x-y$  postavimo tako, da se njegovo izhodišče pokriva s skupnim izhodiščem vektorjev  $m_1 \mathbf{v}_1$  in  $m_2 \mathbf{v}'_2$ ; os  $x$  ima smer prvočne gibalne količine  $m_1 \mathbf{v}_1$  (slika 4.34). Točka  $(x, y)$  predstavlja končno točko vektorja  $m_2 \mathbf{v}'_2$  v tem koordinatnem sistemu. Velja:

$$x^2 + y^2 = (m_2 \mathbf{v}'_2)^2 \text{ ter } \mathbf{v}_1 \mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_1 \mathbf{v}'_2 x / (m_2 \mathbf{v}'_2) = \mathbf{v}_1 x / m_2$$

V enačbi (4.40) nadomestimo  $v_2$  s projekcijama  $x, y$  in dobimo:

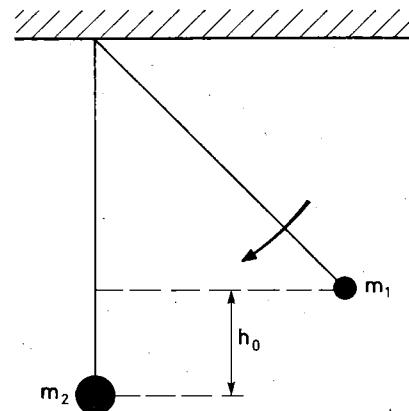
$$\begin{aligned} (A+1)(x^2 + y^2) - 2m_2 v_1 x &= 0 \quad \text{ali} \\ y^2 + (x-R)^2 &= R^2 \quad , \quad R = m_2 v_1 / (A+1) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Konice možnih vektorjev  $m_2 \mathbf{v}'_2$  torej ležijo na krogu s polmerom  $R$ , katerega središče je na osi  $x$ , oddaljeno od izhodišča za  $R$ .

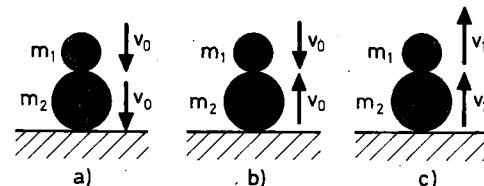
Proučimo nekaj posebnih primerov. Pri premem trku je  $y = 0$  in  $x = m_2 v'_2 = 2R$  ali  $v'_2 = 2v_1/(A+1)$ , kar že poznamo (4.39). Če sta telesi enako težki ( $A = 1$ ), je premer kroga enak začetni gibalni količini ( $2R = m_1 v_1$ ) in telesi odskočita pod pravim kotom (slika 4.35a). Slike (4.35b) je razvidno, da se vpadno telo odbije v smeri nazaj ( $\mathbf{v}'_1$  kaže v levo), če je  $2R > m_1 v_1$  ali  $2m_2 > m_1(A+1) = m_2 + m_1$  ali  $m_2 > m_1$  (če zadene ob težje telo).

Enačba (4.41), ki smo jo izpeljali s pomočjo izrekov o ohranitvi gibalne količine in kinetične energije, pove, kakšni trki so možni, vendar ne zadošča. Da ugotovimo dejanski izid trka, potrebujemo dodatne podatke, npr. smer gibanja teles glede na črto trka, obliko teles, naravo sil ob deformaciji teles ipd.

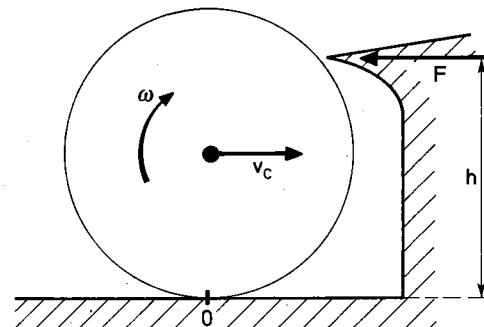
Recimo, da trčita gladki prožni kroglici. Hitrost  $\mathbf{v}_1$  vpadne kroglice oklepa kót  $\alpha$  s črto trka (slika 4.36); razstavimo jo na projekciji  $v_{1n}$  (v smeri črte trka) in  $v_{1t}$  (pravokotno na črto trka):  $v_{1n} = v_1 \cos \alpha$ ,  $v_{1t} = v_1 \sin \alpha$ . Ker sta telesi gladki in kroglasti, se pri trku spremeni le normalna projekcija hitrosti  $v_{1n}$ , tangentna  $v_{1t}$  ostane enaka. Zadeto telo  $m_2$  odleti v smeri črte trka s hitrostjo  $\mathbf{v}'_2$ , vpadno  $m_1$  pa se odbije s hitrostjo  $\mathbf{v}'_1$ , ki oklepa kót  $\beta$  s črto trka. Za tangentne projekcije hitrosti velja:  $v_{1t} = v'_{1t}$ , za normalne pa lahko uporabimo enačbe premega trka (4.39):



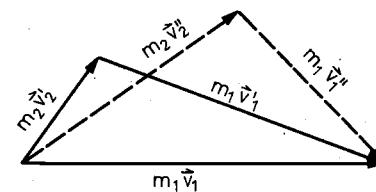
Slika 4.30



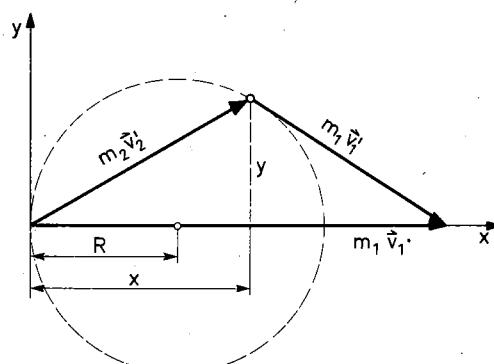
Slika 4.31



Slika 4.32



Slika 4.33



Slika 4.34

$$v'_{1n} = v_{1n}(A - 1)/(A + 1) \quad , \quad v'_{2n} = 2v_{1n}/(A + 1)$$

Sledi:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\beta &= v'_{1n}/v'_{2n} = (v_{1n}/v_{1n})(A + 1)/(A - 1) \\ \operatorname{tg}\beta &= \operatorname{tg}\alpha(A + 1)/(A - 1) \end{aligned}$$

Enaki kroglici ( $A = 1$ ) po trku odskočita pod pravim kotom:  $\beta = 90^\circ$  in  $v'_2 = v'_{1n} = v_1 \cos\alpha$ . Za  $A \gg 1$  dobimo  $\beta \approx \alpha$ , kar pomeni, da se kroglica odbije od zelo težke krogle pod enakim kotom glede na črto trka, kot vpade.

### Primer:

Krogla (masa  $m$ , polmer  $R$ ) se giblje translatorno s hitrostjo  $v$  in udari poševno ob ravno steno, tako da vpadna smer oklepa s steno kót  $\alpha$  (slika 4.37). Pod kolikšnim kotom ( $\beta$  glede na steno) se odbije?

Najprej vzemimo, da je stena idealno gladka. Na kroglico deluje le normalna sila  $N$ , ki spremeni normalno projekcijo hitrosti z  $-v\sin\alpha$  na  $+v'\sin\beta$ , tangentna projekcija pa se ne spremeni (ni sile v tej smeri):  $v \cos\alpha = v' \cos\beta$ . Izrek o ohranitvi kinetične energije v tem primeru zahteva:  $v' = v$  in zato tudi  $\beta = \alpha$ . **Kroglica se od gladke stene odbije pod enakim kotom, kot vpade.**

Drugače je, če stena ni gladka, če poleg normalne sile  $N$  učinkuje na kroglico tudi tangentna projekcija  $F$ , ki kroglico ob trku zakotali. Sunek te sile spremeni gibalno količino kroglice v tangentni smeri:

$$mv' \cos\beta = mvcos\alpha - F' \Delta t$$

Sunek njenega navora (glede na os skozi težišče) pa dá kroglici vrtilno količino:

$$\begin{aligned} M\Delta t &= F'R\Delta t = \Delta\Gamma = \Gamma = J\omega = \omega \cdot 2mR^2/5 \\ \omega &= 2,5F'\Delta t/mR = (2,5/R)(vcos\alpha - v'\cos\beta) \end{aligned}$$

Izrek o ohranitvi kinetične energije napišemo v obliku (del vpadne translacijske kinetične energije se spremeni v rotacijsko kinetično energijo odbite kroglice):

$$\begin{aligned} mv^2 &= mv'^2 + J\omega^2 \\ v^2 &= v'^2 + 0,4R^2\omega^2 = v'^2 + 2,5(vc\cos\alpha - v'\cos\beta)^2 \end{aligned}$$

Normalna projekcija hitrosti se spremeni enako kot pri gladki steni; spremeni se le smer:  $v\sin\alpha = v'\sin\beta$  ali  $v' = v\sin\alpha/\sin\beta$ . Dobimo transcendentno enačbo:

$$\begin{aligned} \sin^2\beta &= \sin^2\alpha + 2,5(\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta)^2 \quad \text{ali} \\ \sin^2(\beta - \alpha) &= 0,4(\sin^2\beta - \sin^2\alpha) \end{aligned}$$

Ki jo najenostavnejše rešimo z iteracijo. Za  $\alpha = 45^\circ$  npr. dobimo  $\beta = 66,8^\circ$ , za  $\alpha = 0$  je tudi  $\beta = 0$  (pravokotni vpad). Vidimo, da je odbojni kót večji od vpadnega (zaradi zavrtitve kroglice ob odboju).

### Delno prožni trk – koeficient prožnosti trka

V splošnem trk teles ni niti prožen niti neprožen. Telesi sicer odletita z različnima hitrostma, vendar ostaneta delno deformirani, tako da se pri trku del kinetične energije spremeni v notranjo energijo deformiranih

teles. Čim bolj je trk neprožen, tem večji del vpadne kinetične energije se izgubi.

Stopnjo prožnosti trka lahko izrazimo s pomočjo **relativne hitrosti teles** ( $\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ ) pred trkom in po njem ( $\mathbf{v}'_r = \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2$ ). Po neprožnem trku se telesi gibljeta skupno, njuna relativna hitrost po trku je torej nič:  $\mathbf{v}'_r = 0$ . Pri prožnem trku pa se spremeni le predznak relativne hitrosti, velikost pa ne. To sledi iz zakonov o ohranitvi gibalne količine in kinetične energije (gl. 4.36,38), ki ju prepišemo v obliko:

$$\begin{aligned} m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}'_1) &= m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}'_2) \\ m_1(v_1^2 - v'_1^2) &= m_2(v_2^2 - v'_2^2) \end{aligned}$$

Ker je  $v^2 - v'^2 = (\mathbf{v} - \mathbf{v}')(\mathbf{v} + \mathbf{v}')$ , dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}'_1 &= \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}'_2 \quad \text{ali} \\ \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1, \quad \mathbf{v}_r = -\mathbf{v}'_r \end{aligned}$$

**Koeficient prožnosti trka** ( $e$ ) definiramo z razmerjem absolutnih vrednosti relativnih hitrosti teles po trku in pred njim:

$$e = |\mathbf{v}_r|/|\mathbf{v}'_r| = |\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2|/|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \quad (4.42)$$

Za neprožni trk je  $e = 0$ , za prožni pa  $e = 1$ . V splošnem je trk delno prožen in je  $0 < e < 1$ . Parameter trka e izmerimo tako, da spustimo kroglasto telo z dane višine  $h$  na vodoravno podlago. Krogla pada na tla s hitrostjo  $v_1 = \sqrt{2gh}$  in se odbije navzgor s hitrostjo  $v'_1 = ev_1$  ( $v_2 = v'_2 = 0$ ) ter doseže višino  $h' = v'_1^2/2g = e^2h$  ali

$$e = \sqrt{h'/h}$$

Nekaj vrednosti: aluminij-aluminij 0,2, bron-bron 0,4, jeklo 0,7, polistirol-jeklo 0,95, slonovina (biljard) 1,00.

Deformacijsko energijo  $W_d$ , ki ostane v telesih po delno prožnem trku, izrazimo s koeficientom prožnosti trka. Enačbi (4.35,36) prepišemo v obliko:

$$\begin{aligned} m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}'_1) &= m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}'_2) \\ m_1(v_1^2 - v'_1^2) &= m_2(v_2^2 - v'_2^2) + 2W_d \end{aligned}$$

od koder izračunamo:

$$\begin{aligned} 2W_d &= m_2(\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2) = \\ &= m_2(\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)(1 + e) \quad \text{ali} \\ 2W_d &= m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}'_1)(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)(1 + e) \end{aligned}$$

Zadnjo enačbo pomnožimo z  $m_2$ , predzadnjo pa z  $m_1$  in nato enačbi seštejemo. Končni rezultat je:

$$W_d = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 (1 - e^2) \quad (4.43)$$

### Primera:

1. **Kroglica**  $m_1$  se s hitrostjo  $v$  zaleti v mirujočo kroglico  $m_2$ . Trk je premi in delno prožen; koeficient prožnosti trka je  $e$ . Pri katerem razmerju mas kroglic ( $A = m_2/m_1$ ) se vpadna kroglica po trku ustavi? Kolikšen del ( $\% \rho$ ) vpadne kinetične energije se porabi za deformacijo kroglic?

Vpadna kroglica se po trku giblje s hitrostjo  $v'_1$  v vpadni smeri, zadeta kroglica pa s hitrostjo  $v'_2$  ( $v'_2 > v'_1$ ).

$$v = v'_1 + Av'_2 \\ e = (v'_2 - v'_1)/v \quad \text{ali} \quad v'_2 = ev + v'_1$$

Rešitvi sta:

$$v'_1 = v(1 - eA)/(A + 1) \\ v'_2 = v(1 + e)/(A + 1)$$

Vpadna kroglica se po trku ustavi ( $v'_1 = 0$ ), če je  $e = 1/A$  ali  $m_2 = m_1/e$ .

$$W_d = m_1 m_2 v^2 (1 - e^2)/2(m_1 + m_2) \quad (\text{gl. 4.43}) \\ = W_k (1 - e^2)/(A + 1) \quad W_k = m_1 v^2/2 \\ p = W_d/W_k = (1 - e^2)/(A + 1) = e(1 - e)$$

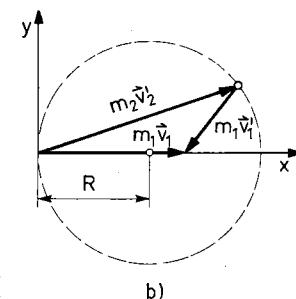
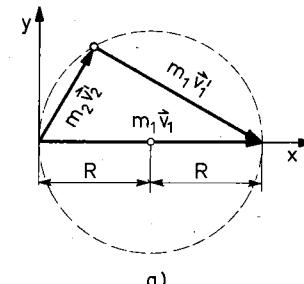
**2.** Enaki jekleni kroglici sta povezani z lahko palico (dolžina  $b = 50$  cm). Vodoravno položeno palico spustimo z višine  $h = 40$  cm nad tlemi. Leva kroglica zadene ob medeninasto podlago in se od nje delno prožno odbije ( $e_1 = 0,4$ ), desna zadene ob jekleno podlago in se ravno tako delno prožno odbije ( $e_2 = 0,7$ ). Kolikšna je hitrost težišča kroglic ( $v_c$ ) takoj po trku in s kolikšno kotno hitrostjo ( $\omega$ ) se zavrti vezna palica? (Slika 4.38)

Kroglici padeta na tla s hitrostjo  $v_0 = \sqrt{2gh}$ . Leva kroglica se odbije navzgor s hitrostjo  $v_1 = e_1 v_0$ , desna pa s  $v_2 = e_2 v_0$ . Ti hitrosti sta sestavljeni iz hitrosti težišča in iz obodne hitrosti zaradi zavrtitve palice (gl. str. 76):

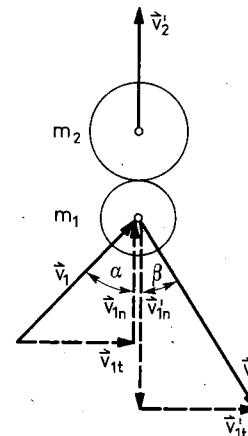
$$v_1 = v_c - (b/2)\omega, \quad v_2 = v_c + (b/2)\omega$$

Odtod izračunamo:

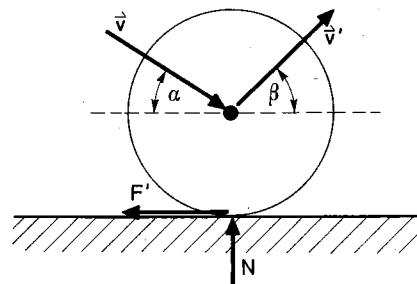
$$v_c = (v_1 + v_2)/2 = 1,4 \text{ m/s} \\ \omega = (v_2 - v_1)/b = 1,0/\text{s}$$



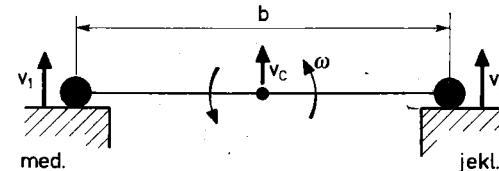
Slika 4.35



Slika 4.36



Slika 4.37



Slika 4.38

V poglavju premo gibanje (str. 14) smo obravnavali nihanje kot primer premega gibanja; obravnavali smo ga s kinematičnega stališča, iskali smo časovne funkcije odmika telesa iz ravnoesne lege, njegove hitrosti in njegovega pospeška. V tem poglavju bomo predstavo o nihanju poglobili in posplošili in se zanimali tudi za energijske spremembe.

Telo lahko niha le okrog stabilne ravnoesne lege (gl. str. 98). Nanj mora učinkovati konservativna sila, ki ga veže na to lego, npr. sila prožnosti pri vžmetnem nihalu, teža pri težnem itd. Med nihanjem opravlja konservativna sila delo, ki ga obravnavamo kot spremembo potencialne energije telesa. Kako telo niha, je odvisno od tega, kako se **potencialna energija telesa** spreminja z odmikom ( $x$ ) iz ravnoesne lege.

Na sliki (5.1) je skiciran splošen potek potencialne energije  $W_p(x)$  telesa v odvisnosti od odmika  $x$  iz stabilne ravnoesne lege. V sami ravnoesni legi ( $x = 0$ ) je **minimum** potencialne energije; običajno vzamemo:  $W_p(0) = 0$ . Kakršenkoli odmik telesa iz te legi pomeni povečanje potencialne energije.

Nihajoče telo (nihalo), ki je prepuščeno samo sebi, se slej ko prej pomiri in obmiruje v stabilni ravnoesni legi, v kateri je njegova potencialna energija najmanjša. Če telo izmaknemo iz te legi (npr. za amplitudo  $x_0$ ), moramo opraviti delo, potreбno za povečanje potencialne energije telesa od 0 na  $W_p(x_0)$  (da prenamo konservativno silo, ki nasprotuje odmiku telesa iz ravnoesne lege). Potrošeno delo  $W_p(x_0)$  obdrži telo v obliki povečane potencialne energije in to je zaloga energije, s katero se prične nihanje:

$$W = W_p(x_0) \text{ začetna energija nihajočega telesa.}$$

Med približevanjem ravnoesni legi se potencialna energija zmanjšuje, kinetična pa povečuje. Če zanemarimo energijske izgube zaradi nekonservativnih sil (trenje, upor), se kinetična energija poveča za toliko, kolikor se zmanjša potencialna, tako da se vsota kinetične in potencialne energije ne spremeni – je enaka začetni energiji nihala ( $W$ ). Pri odmiku  $x$  se telo giblje s hitrostjo  $v$ . Velja:

$$mv^2/2 + W_p(x) = W_p(x_0) = W \quad (5.1)$$

V ravnoesni legi ( $x = 0$ ) se potencialna energija zmanjša na nič:  $W_p(0) = 0$  in tedaj ima telo največjo kinetično energijo  $mv_0^2/2$ , pri čemer je  $v_0$  hitrost, s katero telo švigne skozi ravnoesno lego:

$$mv_0^2/2 = W_p(x_0) = W \quad (5.2)$$

V ravnoesni legi je vsa energija nihala naložena v obliki kinetične. S to energijo se telo začene skozi ravnoesno lego in se začne na drugi strani oddaljevati od nje, pri čemer se njegova potencialna energija povečuje in kinetična zmanjšuje, dokler se nihalo pri  $x = -x_0$  ne ustavi in je spet vsa njegova energija v obliki potencialne itd. **Med nihanjem se torej potencialna energija spreminja v kinetično** (ko se telo približuje ravnoesni legi), **kinetična pa v potencialno** (ko se telo oddaljuje od nje). To medsebojno prelivanje energije iz ene oblike v drugo se dogaja s točno določeno frekvenco ( $\omega$ ), ki je **lastna frekvenca nihala** in je značilna za nihalo.

## 5.

# NIHANJE

Nihanje nihala lahko na sliki **potencialnega lonca** (5.1) predstavimo z vodoravno (črtkano) črto na »višini«  $W$  in rečemo, da nihalo niha v potencialnem loncu na »višini«  $W$ , s čimer izrazimo njegovo energijo. Čim večja je njegova energija  $W$ , tem večja je amplituda nihanja ( $x_0$ ).

Način nihanja nihala (kako se odmik  $x$  spreminja s časom) je odvisen od oblike potencialnega lonca, od tega, kako se potencialna energija  $W_p$  spreminja s krajem v soseščini stabilne ravnovesne lege. Na strani 16 smo obravnavali posebno vrsto nihanja, t. i. **harmonično nihanje**, pri katerem je odmik  $x$  sinusna ali kosinusna funkcija časa:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t) \quad (\text{gl. 1.29})$$

Za takšno nihanje velja:

$$v = dx/dt = x_0 \omega \cos(\omega t) = v_0 \cos(\omega t), \quad v_0 = x_0 \omega$$

ali

$$v^2 = v_0^2(1 - x^2/x_0^2) = \omega^2(x_0^2 - x^2) \quad (\text{gl. 1.27})$$

oziroma:

$$\begin{aligned} mv^2/2 &= (m/2)\omega^2(x_0^2 - x^2) \quad \text{ali} \\ mv^2/2 + (m\omega^2/2)x^2 &= (m\omega^2/2)x_0^2 \end{aligned}$$

Primerjava te enačbe s splošno energijsko enačbo nihanja (5.1) pokaže, da imamo **harmonično nihanje**, če je **potencialna energija kvadratna funkcija odmika**:  $W_p(x) = (m\omega^2/2)x^2$  (5.3)

Tedaj je največja hitrost  $v_0$ , s katero nihalo zaniha skozi ravnovesno lego, dana z enačbo:

$$mv_0^2/2 = W_p(x_0) = (m\omega^2/2)x_0^2 \quad \text{ali}$$

$$v_0 = x_0 \omega$$

**Največja hitrost je premo sorazmerna z največjim odmikom**, kar je značilno za harmonično nihanje.

**Telo v paraboličnem potencialnem loncu niha harmonično**. Če se potencialna energija spreminja s kvadratom odmika iz stabilne ravnovesne lege, je nihanje harmonično. Vzmetno nihalo je že te vrste (vsaj v mejah prožnosti deformacije vzmeti).

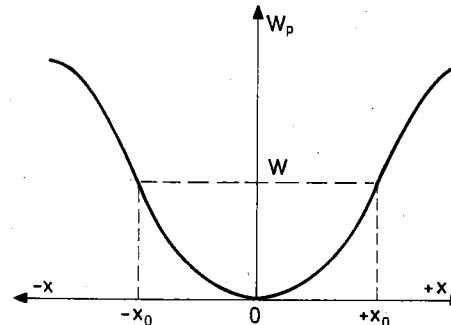
## Nihala

V splošnem je potencialna energija nihala poljubna funkcija odmika. Če je ta odvisnost kolikor toliko pohlevna, da obstajajo prvi in višji odvodi po odmiku, lahko  $W_p(x)$  izrazimo s potenčno (Taylorjevo) vrsto:

$$\begin{aligned} W_p(x) &= W_p(0) + \frac{x}{1!} (dW_p/dx)_0 + \frac{x^2}{2!} (d^2W_p/dx^2)_0 + \\ &\quad \frac{x^3}{3!} (d^3W_p/dx^3)_0 + \dots \end{aligned} \quad (5.4)$$

Ker je v ravnovesni legi  $W_p(0) = 0$  in  $dW_p/dx = 0$  (gl. 4.31), se zgornja vrsta poenostavi v:

$$W_p(x) = \frac{x^2}{2} (d^2W_p/dx^2)_0 + \frac{x^3}{6} (d^3W_p/dx^3)_0 + \dots$$



Slika 5.1

Pri majhnih odmikih  $x$  telesa iz ravnoesne lege lahko člene z  $x^3, x^4, \dots$  zanemarimo v primerjavi s prvim členom (z  $x^2$ ) in v tem približku je potencialna energija kvadratna funkcija odmika:

$$W_p(x) \approx \frac{1}{2} (d^2 W_p/dx^2)_0 x^2 \quad (5.3)$$

Sledi, da **vsako nihalo pri majhnih odmikih** (to je v neposredni okolini stabilne ravnoesne lege) **niha harmonično**.

**Drugi odvod potencialne energije po odmiku** (ta je pozitiven, ker se nanaša na stabilno ravnoesno lego, gl. 4.32a) **določa lastno frekvenco nihala** (gl. 5.3):

$$\omega^2 = (1/m)(d^2 W_p/dx^2)_0 \quad (5.6)$$

Čim plitvejši je potencialni lavec (manj zakrivljena jama), tem manjša je lastna frekvence nihala v tem lencu.

### Vzmetno nihalo

sestavlja telo (masa  $m$ ), prvezano na lahko prožno vzmet. Obravnavali smo ga na strani 44 in v poglavju o prožnostni energiji (str. 97). Če je to nihalo na vodoravnih podlagi, tako da niha v vodoravni smeri (slika 2.31), je njegova potencialna energija prožnostna energija vzmeti (gl. 4.29):

$$W_p = kx^2/2$$

kjer je  $k$  konstanta prožnosti vzmeti. Torej vzmetno nihalo niha harmonično (ne glede na odmik  $x$ ) z lastno frekvenco (gl. 5.6):

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad (\text{gl. 2.26})$$

Telo, viseče na prožni vzmeti, katere drugi konec je pritrjen na strop (slika 2.29), ravno tako niha harmonično z lastno frekvenco  $\omega = \sqrt{k/m}$ , le da njegova ravnoesna lega ni pri  $x = 0$  temveč pri  $x = x_1 = mg/k$  (gl. str. 43).

### Primer:

Telo z maso  $m = 200$  g pritrdimo na visečo prožno vzmet ( $k = 20$  N/m), ki visi s stropa. Spustimo ga z višine, na kateri vzmet ni ne raztegnjena, ne skrčena. S kolikšno amplitudo in frekvenco niha?

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{k/m} = 10/\text{s} \\ x_0 &= x_1 = mg/k = 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

Ko se telo spusti do ravnoesne lege  $x_1 = mg/k$ , je njegova kinetična energija največja ( $mv_0^2/2$ ) in enaka:

$$\begin{aligned} mv_0^2/2 &= mgx_1 - kx_1^2/2 = (mg)^2/2k \quad \text{ali} \\ v_0 &= g\sqrt{m/k} = g/\omega = \omega x_0 \\ x_0 &= g/\omega^2 = mg/k = x_1 \end{aligned} \quad (\text{gl. 1.28})$$

### Sučno (polžasto) nihalo

je sestavljeno iz telesa z vztrajnostnim momentom  $J$ , ki se lahko vrvi okrog stalne osi (vpete v ležaje). Na isti osi je pritrjena sučna (polžasta) vzmet (slika 5.2). Da se ta vzmet zasuče za kót  $\varphi$ , je potreben navor:

$$M = D\varphi$$

ki je premo sorazmeren s kotom zasuka.  $D$  je **sučna konstanta** vzmeti; odvisna je od debeline in velikosti vzmeti ter od njenih elastičnih lastnosti (gl. 6. 23). Navor  $M$  opravlja med sukanjem vzmeti delo (gl. 4.5):

$$A = \int M d\varphi = D \int \varphi d\varphi = D\varphi^2/2$$

ki se nalaga v prožnostno energijo zasukane vzmeti:

$$W_{pr} = D\varphi^2/2 \quad (5.7)$$

(Primerjaj podoben izraz za prožnostno energijo vijačne vzmeti, gl. 4.29). To je potencialna energija sučnega nihala, in ker se spreminja s kvadratom odmika iz ravnoesne lege (kót  $\varphi$ ), je to nihalo harmonično.

Nihanje sučnega nihala sprožimo tako, da telo z vzmetjo vred zasučemo za amplitudo  $\varphi_0$ , s čimer vložimo v vzmet prožnostno energijo  $D\varphi_0^2/2$ . Ko nihalo spustimo, se začne prožnostna energija sproščati in spremnjati v kinetično (rotacijsko)  $J\Omega^2/2$  (kotno hitrost vrtenja smo tu označili z  $\Omega$  namesto z  $\omega$  kot navadno, da oznaka ne sovпадa z lastno frekvenco nihala). Ko nihalo zaniha skozi ravnoesno lego ( $\varphi = 0$ , v kateri vzmet ni zasukana ne v eni ne v drugi smeri), ima največjo kinetično energijo  $J\Omega_0^2/2$ . Velja:

$$J\Omega_0^2/2 = D\varphi_0^2/2 \quad \text{ali}$$

$$\Omega_0 = \varphi_0 \sqrt{D/J}$$

Kar velja za vzmetno nihalo, velja tudi za sučno: odmik  $x$  nadomestimo s  $\varphi$ , hitrost  $v$  pa s kotno-hitrostjo  $\Omega$ . Torej lahko zapišemo:

$$\Omega_0 = \omega \varphi_0$$

kjer je  $\omega$  lastna frekvencia sučnega nihala:

$$\omega = \sqrt{D/J} = 2\pi/t_0 \quad \text{ali}$$

$$t_0 = 2\pi \sqrt{J/D} \quad (5.8)$$

Sučno nihalo niha tem hitreje (s tem krajšim nihajnim časom), čim manjši je vztrajnostni moment nihajočega telesa in čim večja je sučna konstanta vzmeti (čim močnejša je vzmet).

Sučno nihalo se uporablja pri žepnih in ročnih urah. Nihajni čas tega nihala je namreč precej stalen; spremeni se le, če se spremeni sučna konstanta vzmeti ali vztrajnostni moment nihalke (npr. pri večjih temperaturnih spremembah, zaradi mehanskih udarcev ali v bližini močnih magnetov, ko se spremene geometrija in elastične lastnosti nihalke in vzmeti).

S sučnim nihalom lahko **merimo vztrajnostni moment** togih teles. Nihalo je opremljeno z vodoravno okroglo

mizico, ki se vrvi skupaj z vzemljem. Izmerimo nihajni čas nihala s prazno mizico in nato še nihajni čas, ko na mizico položimo telo, katerega vztrajnostni moment želimo določiti.

### Primer:

Sučno nihalo z mizico ima vztrajnostni moment  $J = 0,005 \text{ kgm}^2$  in niha z nihajnim časom  $t_0 = 0,8 \text{ s}$ . Kolik je vztrajnostni moment telesa, ki ga položimo na mizico, če je novi nihajni čas  $t_1 = 2,5 \text{ s}$ ?

$$t_0 = 2\pi\sqrt{J_0/D}$$

$$t_1 = 2\pi\sqrt{(J_0 + J)/D}$$

Enačbi delimo, da se neznana sučna konstanta vzmeli krajša, in dobimo:

$$\frac{t_1^2}{t_0^2} = (J + J_0)/J_0 \text{ ali}$$

$$J = J_0(t_1^2/t_0^2 - 1) = 0,044 \text{ kgm}^2$$

### Težno nihalo

Nihajoče telo je obešeno tako, da se lahko vrvi okrog vodoravne osi, težišče telesa ( $C$ ) je pod pritrdiščem (osjo). Oblika telesa je poljubna, oddaljenost težišča od vrtišča  $O$  je  $d$ , vztrajnostni moment telesa glede na os skozi  $O$  je  $J$  (slika 5.3).

Potencialna energija je tu gravitacijska potencialna energija, ki je določena z višino težišča. V stabilni ravnovesni legi je težišče najnižje – tik pod vrtiščem (slika 5.3a). Ko nihalo zasukamo za kót  $\varphi_0$ , se težišče dvigne za  $h = d(1 - \cos\varphi_0)$  in potencialna energija nihala se poveča za

$$W_p = mgh = mgd(1 - \cos\varphi_0) \quad (5.9)$$

Vidimo, da se potencialna energija spreminja s kosinusom odmika  $\varphi_0$ , torej ni kvadratna funkcija in zato **težno nihalo v splošnem ne niha harmonično**. Kvadratno odvisnost potencialne energije od kota in harmonično nihanje dobimo le za majhne amplitudne  $\varphi_0$ , ko lahko zapišemo:  $1 - \cos\varphi_0 = 2 \sin^2(\varphi_0/2) \approx \varphi_0^2/2$  ter

$$W_p \approx (mgd/2)\varphi_0^2$$

Ko dvignjeno nihalo spustimo, zaniha skozi ravnovesno lego z največjo kotno hitrostjo  $\Omega_0$  oziroma z največjo kinetično (rotacijsko) energijo:

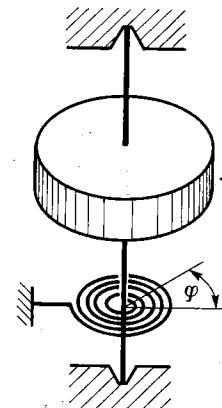
$$J\Omega_0^2/2 = (mgd/2)\varphi_0^2 \text{ ali}$$

$$\Omega_0 = \varphi_0 \sqrt{mgd/J} = \varphi_0 \omega$$

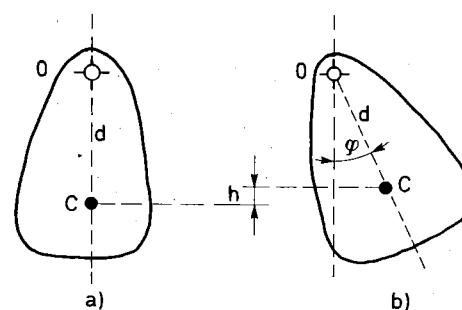
Lastna frekvence težnegra nihala pri majhnih amplitudah nihanja je:

$$\omega = \sqrt{mgd/J} \quad (5.10)$$

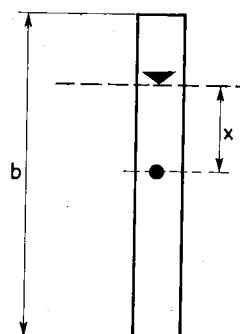
**Pri večjih amplitudah** je izraz bolj zapleten, nihanje ni več harmonično in **nihajni čas je odvisen od amplitude**. Računamo takole:



Slika 5.2



Slika 5.3



Slika 5.4

Pri odklonu  $\varphi$  ima nihalo potencialno energijo  $mgd(1 - \cos\varphi)$  in kinetično energijo  $J\Omega^2/2$ ; obe skupaj sta enaki začetni potencialni energiji:

$$\begin{aligned} mgd(1 - \cos\varphi) + J\Omega^2/2 &= mgd(1 - \cos\varphi_0) \text{ ali} \\ \Omega &= \sqrt{2\omega_0} \sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}, \quad \omega_0 = \sqrt{mgd/J} \\ \Omega &= d\varphi/dt \end{aligned}$$

Izraza za  $\Omega$  izenačimo, dobljeno enačbo preuredimo in integriramo:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \omega_0 \int_0^{t_0/4} dt &= \int_0^{\varphi_0} (\cos\varphi - \cos\varphi_0)^{-1/2} d\varphi \\ t_0 &= (2\sqrt{2}/\omega_0) \int_0^{\varphi_0} (\cos\varphi - \cos\varphi_0)^{-1/2} d\varphi \\ t_0 &= (2\pi/\omega_0) \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2(\varphi_0/2) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4(\varphi_0/2) + \dots \right] \end{aligned} \quad (5.11)$$

V splošnem je nihajni čas težnega nihala odvisen od amplitudе; je daljši, če je amplituda večja. Le pri majhnih amplitudah je neodvisen od amplitude.

### Primeri:

**1. Matematično nihalo** je najenostavnejša vrsta težnega nihala: vsa snov je približno enako oddaljena od vrtišča, npr. kroglica na koncu niti, utež na koncu lahke palice ipd.  $J = md^2$

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{g/d} \quad \text{ali} \\ t_0 &= 2\pi\sqrt{d/g} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Nihajni čas matematičnega nihala je odvisen od dolžine in od težnega pospeška. Čim daljše je nihalo, tem večji je nihajni čas. Seveda velja to le za majhne amplitude nihanja.

Z matematičnim nihalom lahko merimo težni pospešek  $g$ ; izmerimo nihajni čas danega nihala in izračunamo  $g = d(2\pi/t_0)^2$ .

Podobno kot matematično nihalo niha vodoravno položena palica (ali plošča), katere konca visita na enako dolgih nitkah, če jo poženemo tako, da niha translatorno sem ter tja.

**2. Nihajoča palica.** Palica z maso  $m$  in dolžino  $b$  (z enakomernim prerezom) je vrtljiva okrog enega konca. S kolikšnim nihajnim časom niha, če so amplitude majhne?

$$d = b/2, J = mb^2/3 \quad (\text{gl. 3.38a})$$

$$t_0 = 2\pi\sqrt{J/mgd} = 2\pi\sqrt{2b/3g} \quad (5.12a)$$

Palica niha tem počasneje (z daljšim nihajnim časom), čim daljša je.

Poglejmo, kako je nihajni čas  $t_0$  palice odvisen od legi vrtišča. Recimo, da palica niha okrog vrtišča  $O$ , ki je za  $x$  oddaljeno od sredine (težišča) palice. Pri katerem  $x$  je nihajni čas najkrajši? (slika 5.4).

$$\begin{aligned} d &= x, J = mb^2/12 + mx^2 \\ t_0 &= (2\pi/\sqrt{g}) \sqrt{x + b^2/12x} \end{aligned}$$

Nihajni čas je najkrajši (je minimum) pri tistem  $x$ , za katerega je odvod izraza pod korenom po  $x$  enak nič to je:  $1 - b^2/12x^2 = 0$  ali  $x = b/2\sqrt{3}$ .

Okrog vrtišča pri tej oddaljenosti od sredine palice niha palica z najkrajšim nihajnim časom:  $2\pi\sqrt{b/3g}$ . Pomembno je, da je nihajni čas pri tem vrtišču malo odvisen od  $x$  in se zato ne spremeni zaznatno, če se vrtišče nekoliko izrabi.

**3. Ploščica** niha sem ter tja po dnu kroglaste jamice (polmer  $r$ , slika 5.5). Ko ploščico izmagnemo iz dna in dvignemo za  $h = r(1 - \cos\varphi_0)$ , pri čemer je  $\varphi_0$  največji kotni odmak ploščice iz ravnoesne lege na dnu jamice (merjen iz središča krivine jamice), se potencialna energija ploščice poveča za  $mgh = mgr(1 - \cos\varphi_0) \approx mgr\varphi_0^2/2$  (za majhne amplitude  $\varphi_0$ ). Ko ploščica pridrsi (brez trenja) do dna jamice, ima največjo kinetično energijo  $mv_0^2/2 = mgr\varphi_0^2/2$ . Sledi:

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= v_0/r = \sqrt{g/r} \quad \varphi_0 = \omega\varphi_0 = (2\pi/t_0)\varphi_0 \\ t_0 &= 2\pi\sqrt{r/g} \end{aligned}$$

(podobno kot nitno nihalo)

S kolikšnim nihajnim časom pa se po kroglasti jamici kotali sam ter tja kroglica s polmerom  $R$ ?

Razlika v primerjavi z drsečo ploščico je v izrazu za kinetično energijo na dnu jamice. Kotaleča se kroglica ima kinetično energijo:  $mv_0^2/2 + J\Omega_0^2/2 = (mv_0^2/2)(1 + J/mR^2) = mg(r - R)\varphi_0^2/2$  ali

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{g(r - R)/(1 + J/mR^2)} \quad \varphi_0 = (r - R)\Omega_0 \\ \Omega_0 &= \sqrt{g/[(1 + J/mR^2)(r - R)]} \quad \varphi_0 = \omega\varphi_0 = (2\pi/t_0)\varphi_0 \end{aligned}$$

Za kroglico je  $J = 2mR^2/5$  in zato:

$$t_0 = 2\pi\sqrt{7(r - R)/5g} \quad (5.12b)$$

Vprašanje je, kako mora biti oblikovana jamica, da je nihanje ploščice (kroglice) v njej harmonično ne glede na velikost amplitude.

**4. Nihanje tekočinskega stebra v cevi** z obliko črke U (trenje zanemarimo). Steber homogene tekočine ima enak prerez, dolžina je  $b$ , masa na enoto dolžine stebra je  $\mu$ .

V ravnoesju sta gladini tekočine v obeh krakih cevi enako visoko (slika 5.6a). Če se gladina v desnem kraku dvigne za  $x_0$  (in v levem spusti za  $x_0$ ), se gravitacijska potencialna energija tekočinskega stebra poveča za  $\mu x_0 g \cdot x_0$ , to je za  $W_p = \mu g x_0^2$  (slika 5.6b, del tekočine iz levega kraka z dolžino  $x_0$  prenesemo na vrh desnega). Ker je potencialna energija  $W_p$  odvisna od kvadrata odmika, je nihanje harmonično. Steber tekočine zaniha skozi ravnoesno lego s hitrostjo  $v_0$ , tako da je:

$$\begin{aligned} \mu b v_0^2/2 &= \mu g x_0^2 \text{ ali} \\ v_0 &= \sqrt{2g/b} \quad x_0 = \omega x_0 = (2\pi/t_0)x_0 \\ t_0 &= 2\pi\sqrt{b/2g} \end{aligned} \quad (5.12c)$$

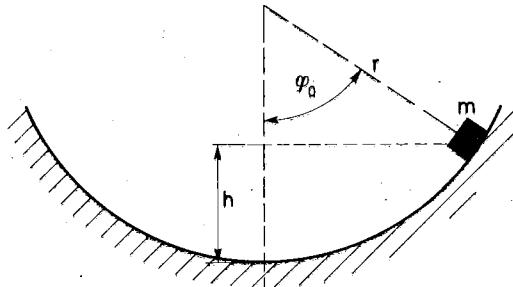
### Reducirana dolžina nihala

Izraz za nihajni čas  $t_0$  poljubnega težnega nihala, ki niha harmonično, želimo napisati v obliki, kot velja za nitno (matematično) nihalo. Sprašujemo se, na kolikšno oddaljenost od vrtišča (na reducirano dolžino nihala –  $d_r$ ) bi morali zbrati vso snov nihala, da bi dobili enak nihajni čas:

$$\begin{aligned} t_0 &= 2\pi\sqrt{J/mgd} = 2\pi\sqrt{d_r/g} \text{ ali} \\ d_r &= J/md \end{aligned} \quad (5.13)$$

Reducirana dolžina nihajoče palice (gl. 5.12a) je  $d_r = 2b/3$ , kar pomeni, da palica z dolžino  $b$  niha z enakim nihajnim časom kot nitno nihalo z dolžino  $2b/3$ .

Poisci reducirano dolžino za kroglo, ki niha okrog vodoravne osi skozi njen vrh.



Slika 5.5

### Nedušeno nihanje

Ko zunanjia sila izmakne nihalo iz ravnovesne lege in ga odkloni za amplitudo  $x_0$ , opravi delo, ki ga prejme nihalo v obliki potencialne energije  $W_p(x_0)$ . Čim več energije prejme nihalo, s tem večjo amplitudo niha, tako da je amplituda merilo za energijo nihala. Med nihanjem se potencialna energija spreminja v kinetično in obratno. Ko gre nihalo skozi ravnovesno lego, ima vso energijo v obliki kinetične. Pri največjem odmiku ( $x = \pm x_0$ , v amplitudi, kjer se nihalo ustavi in spremeni smer gibanja) pa je energija nihala v obliki potencialne. Če zanemarimo izgubo energije nihanja zaradi nekonservativnih sil (trenje, upor), je vsota kinetične in potencialne energije stalna (se ne spreminja s časom) in enaka začetni potencialni energiji:

$$W_p(x) + W_k = \text{konst.} = W_p(x_0) = W_k(x=0) \quad (5.14)$$

Nihanje nihala pomeni medsebojno spreminjanje in prelivanje potencialne in kinetične energije (ob stali vsoči). Ko je potencialna energija največja, je kinetična nič in ko je potencialna nič (v ravnovesni legi), je kinetična največja. Nihalo se po vsakem nihaju odkloni za enako amplitudo  $x_0$  in švigne skozi ravnovesno lego z enako največjo hitrostjo  $v_0 = \omega_0 x_0$ , kjer je  $\omega_0$  lastna frekvenca nihala. To se stalno ponavlja. Takšno nihanje je nedušeno. Amplituda nedušenega nihala je stalna.

Na sliki (5.7) je skicirana odvisnost potencialne energije  $W_p$  in kinetične  $W_k$  od odmika  $x$ . Vodoravna črtka na sliki predstavlja celotno energijo nihala:  $W = W_k + W_p$ , ki je stalna.

Poseben primer nedušenega nihanja je **harmonično nihanje**, pri katerem se odmik spreminja s časom po sinusni ali kosinusni funkciji (gl. str. 16):

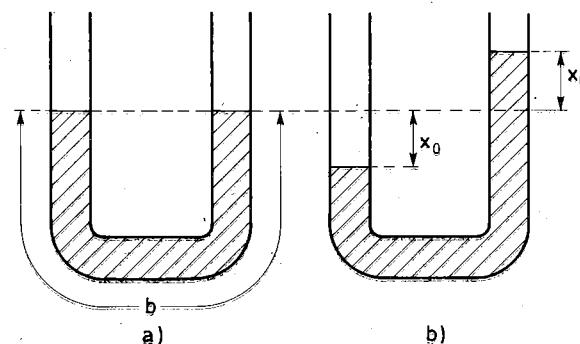
$$x = x_0 \sin(\omega_0 t)$$

$\omega_0$  = lastna frekvenca nedušenega nihala

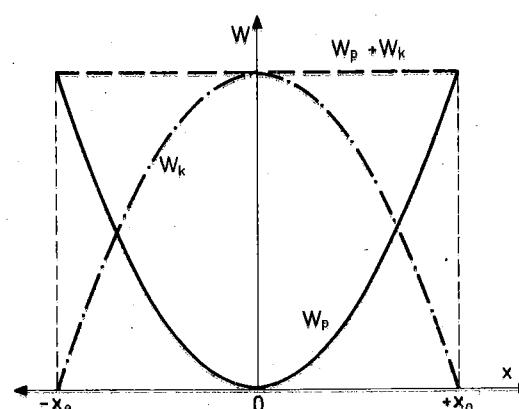
$$v = dx/dt = x_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t) = v_0 \cos(\omega_0 t)$$

Potencialna energija harmonično nihajočega nihala je kvadratna funkcija odmika (gl. 5.5):

$$\begin{aligned} W_p &= \frac{1}{2} (d^2 W_p / dx^2)_0 x^2 = (m \omega_0^2 / 2) x^2 = \\ &= (m \omega_0^2 x_0^2 / 2) \sin^2(\omega_0 t) \end{aligned}$$



Slika 5.6



Slika 5.7

Kinetična energija se spreminja s časom po enačbi:

$$W_k = mv^2/2 = (mx_0^2\omega_0^2/2)\cos^2(\omega_0 t)$$

Vsota obeh je zares neodvisna od časa:

$$\begin{aligned} W_p + W_k &= (mx_0^2\omega_0^2/2) [\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)] = \\ &= mx_0^2\omega_0^2/2 = mv_0^2/2 = W_p(x_0) \end{aligned}$$

kar je značilno za nedušeno nihanje.

**Diferencialna enačba nedušenega nihanja** podaja zvezo med odmikom  $x$  in njegovimi časovnimi odvodi, kakršna obstaja pri nedušenem nihanju. Dobimo je tako, da izračunamo pospešek:

$$a = dv/dt = -x_0\omega_0^2\sin(\omega_0 t) = -\omega_0^2 x$$

Ker je  $a = d(dx/dt)/dt = d^2x/dt^2$  (drugi odvod odmika po času), dobimo:

$$d^2x/dt^2 + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{diferencialna enačba (5.15) nedušenega nihanja}$$

Rešitev te enačbe je sinusna ali kosinusna funkcija časa z lastno frekvenco  $\omega_0$ , to je:  $x = x_0\sin(\omega_0 t)$  ali  $x = x_0\cos(\omega_0 t)$ , pri čemer je amplituda  $x_0$  poljubna.

Diferencialno enačbo nedušenega nihanja običajno izpeljemo s pomočjo Newtonovega zakona dinamike  $F = ma$ . Za vzemeljno nihalo postopamo takole:

Ko je telo z maso  $m$ , ki je privezano na prožno vzemelj s konstanto  $k$ , odmaknjeno od ravnočesne lege za  $x$ , deluje naj konservativna sila raztegnjene prožne vzmeti  $-kx$ , ki ga vleče nazaj k ravnočesni legi. Pod vplivom te sile dobi telo pospešek  $a$ :

$$\begin{aligned} ma &= -kx = md^2x/dt^2 \text{ ali} \\ d^2x/dt^2 + (k/m)x &= 0, \omega_0 = \sqrt{k/m} \end{aligned}$$

## Dušeno nihanje

Nedušeno nihanje je idealen primer, saj v resnici nikoli ne moremo odpraviti energijskih izgub zaradi nekonservativnih sil. Dejansko nihalo po vsakem nihaju izgubi nekaj svoje energije, npr. zaradi trenja ali upora, in amplituda nihanja se s časom zmanjšuje. Pravimo, da je **nihanje dušeno**. Zaradi dušenja se amplituda nihanja slej ko prej zmanjša na tako majhno vrednost, da nihanje komajda še zaznamo.

Recimo, da nihanje nihala duši **upor tekočine**, v kateri nihalo niha. Pogosto je sila upora ( $F_u$ ) tekočine premo sorazmerna s hitrostjo gibanja telesa skoznjo, npr.:

$$F_u = -\gamma v \quad (\text{gl. str. 173}) \quad (5.16)$$

S predznakom minus izrazimo dejstvo, da sila upora nasprotuje gibanju. Parameter  $\gamma$  je odvisen od velikosti in oblike telesa ter od vrste in stanja tekočine (npr. viskoznosti, temperature). V kratkem času  $dt$ , ko se telo premakne za  $dx$ , opravi sila upora negativno delo  $dA = -F \cdot dx = -\gamma v \cdot dx$ , ki zmanjša celotno energijo  $W$  nihala (vsoto kinetične in potencialne energije, gl. 5.14):

$$dW = dA = -\gamma v \cdot dx$$

Delimo s časovnim intervalom  $dt$ , da dobimo spremembu v časovni enoti:

$$\begin{aligned} dW/dt &= dA/dt = -\gamma v \cdot dx/dt = -\gamma v \cdot v = -\gamma v^2 = \\ &= -(2\gamma/m)W_k \end{aligned} \quad (5.17)$$

»Hitrost« manjšanja celotne energije nihala je premo sorazmerna s kinetično energijo. Torej nihalo najhitreje izgublji svojo energijo v ravnočesni legi in najmanj v amplitudi.

Na dušeno nihalo učinkuje poleg konservativne sile, ki omogoča nihanje (npr.  $-kx$  pri vzemeljnu nihalu), še nekonservativna sila  $-\gamma v$ , ki nihanje ovira in duši. Pod vplivom teh dveh sil telo niha s pospeškom  $a$ , tako da je:

$$\begin{aligned} ma &= -kx - \gamma v \quad \text{ali} \\ d^2x/dt^2 + (\gamma/m)dx/dt + (k/m)x &= 0 \end{aligned}$$

Pišimo:  $k/m = \omega_0^2$  (lastna frekvence nedušenega nihala) in  $\gamma/m = 2\beta$  (faktor 2 zaradi kasnejše enostavnosti).

$$d^2x/dt^2 + 2\beta dx/dt + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{diferencialna enačba (5.18) dušenega nihanja}$$

Parameter  $\beta$  se imenuje **koeficient dušenja** in je merilo za stopnjo dušenja (ima dimenzijo  $/s$ ).

Zanima nas rešitev zgornje diferencialne enačbe, torej kako se odmik  $x$  spreminja s časom, če je nihanje dušeno. Enačba se razlikuje od enačbe nedušenega nihanja (5.15) po členu s prvim odvodom odmika po času, ki je posledica dušenja. Če je ta člen zanemarljivo majhen (šibko dušenje), se  $x$  spreminja s časom kot pri nedušenem nihanju, to je sinusno s stalno amplitudo  $x_0$  in z lastno frekvenco  $\omega_0$ . Dušenje pa povzroča, da se amplituda nihanja s časom zmanjšuje (videli bomo, da eksponentno) in da se tudi frekvence nihanja zmanjša (od  $\omega_0$  na  $\omega_d$ ).

Diferencialna enačba (5.18) za funkcijo  $x(t)$  se poenostavi, če vpeljemo novo funkcijo  $y(t)$ , ki je povezana z  $x(t)$  po enačbi:

$$x(t) = \exp(-\beta t)y(t) \quad (5.19)$$

Tako izraženi  $x(t)$  dvakrat odvajamo po  $t$  in oba odvoda vstavimo v enačbo (5.18). Člen s prvim odvodom funkcije izpadne in dobimo enostavno diferencialno enačbo:

$$d^2y/dt^2 + (\omega_0^2 - \beta^2)y = 0$$

kakršna velja za nedušeno nihanje s frekvenco:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (5.20)$$

Torej se  $y$  spreminja s časom sinusno ali kosinusno s frekvenco  $\omega_d$ .

Končna rešitev diferencialne enačbe (5.18) za dušeno nihanje ima tako obliko:

$$x(t) = x_0 \exp(-\beta t) \sin(\omega_d t) \quad (5.21)$$

Graf te funkcije je na sliki (5.8); črtkani krivulji predstavljata  $\pm x_0 \exp(-\beta t)$ , to je časovno spremicanje amplitude nihanja.

**Amplituda dušenega nihala se zmanjšuje s časom eksponentno**, in to tem hitreje, čim močnejše je dušenje, čim večji je faktor dušenja ( $\beta$ ). Pri šibkem dušenju je  $\beta$  majhen in je zato amplituda nihanja praktično stalna.

Obratna vrednost koeficiente dušenja ( $1/\beta$ ) je čas, v katerem se amplituda nihanja zmanjša za faktor  $e = 2,718$ . Zmanjševanje amplitude nihanja zaradi dušenja včasih izrazimo s t.i. **logaritemskim dekrementom** ( $\Lambda$ ), ki ga definiramo kot naravni logaritem količnika amplitud nihanja po preteku nihajnega časa  $t_d = 2\pi/\omega_d$ :

$$\Lambda = \ln \frac{\exp(-\beta t)}{\exp[-\beta(t + t_d)]} = \ln \exp(\beta t_d) = \beta t_d = 2\pi\beta/\omega_d$$

$$\Lambda = 2\pi\beta(\omega_0^2 - \beta^2)^{-1/2} \quad (5.22)$$

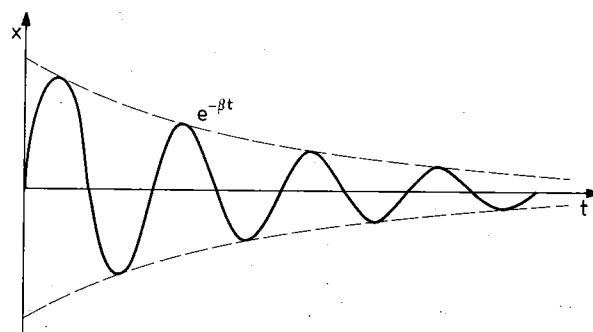
Dušenje najbolj opazno vpliva na amplitudo nihanja, ki se zmanjšuje eksponentno s časom, tako da nihalo slej ko prej preneha nihati. Nekoliko manj vpliva na frekvenco – zmanjša jo od  $\omega_0$  na  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ , tem bolj, čim močnejše je. Močno dušeno nihalo niha zelo počasi, z dolgim nihajnim časom. Če je dušenje dovolj močno, lahko nihanje celo povsem prepreči. Pri  $\beta = \omega_0$  je  $\omega_d = 0$ , kar pomeni, da za  $\beta > \omega_0$  **nihanje ni več možno**.

Ko nihalo odmaknemo za amplitudo  $x_0$  in nato izpuštimo, se začne približevati ravovesni legi, pri čemer se njegova potencialna energija sprošča. Če ni dušenja, se spreminja v kinetično energijo in nihalo pride do ravovesne lege z dovolj veliko kinetično energijo, da švigne skoznjo in se na drugi strani »dvigne« do enake amplitude  $x_0$ , s katere smo ga spustili. Pri močno dušenem nihalu pa se sproščena potencialna energija pretežno porablja za premagovanje dušilne sile in se le malo nalaga v kinetično energijo: nihalo doseže ravovesno lego s premajhno kinetično energijo. Pri  $\beta > \omega_0$  porabi dušenje praktično vso sproščeno energijo in nihalo se počasi približuje ravovesni legi, v kateri obstane; nihanja ni.

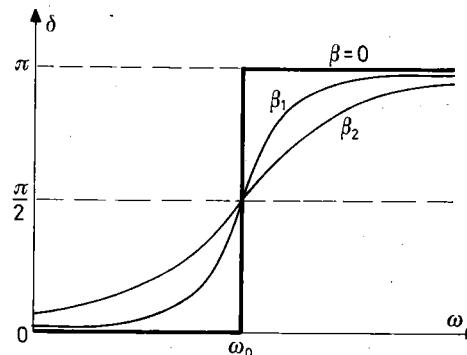
V splošnem vsako nihalo niha bolj ali manj dušeno, le da smemo obravnavati nihanje kot nedušeno, če je dušenje dovolj šibko, da se v času opazovanja amplituda praktično ne spremeni, (če je čas opazovanja majhen v primerjavi z  $1/\beta$ ).

## Vsiljeno nihanje

Lastno nihanje nihala je bolj ali manj dušeno in se slej ko prej uduši. Če želimo kljub dušenju vzdrževati nihanje s stalno amplitudo (to je nedušeno nihanje), moramo izgubljeno energijo sproti nadomeščati. Kolikor energije izgubi nihalo v nihajnjem času zaradi dušenja, toliko mu je moramo dovesti. Energijo moramo dovajati v pravih trenutkih, tako da nihanje pospešujemo. Zaradi dušenja doseže nihalo ravovesno lego s premajhno kinetično energijo. Zato moramo nihalo pospešiti, ko gre skozi ravovesno lego, in mu dovesti manjkajočo kinetično energijo. Pravilen in pravočasen dotok energije regulira samo nihalo (t. i. **samokrmiljeno nihalo**). Nihalo ima zalogo energije v obliki gravitacijske potencialne energije dvignjene uteži (npr. pri starih stenskih urah) ali v obliki prožnostne energije navite polžaste vzmeti (pri žepnih in ročnih urah ter budilkah). Pri električnih urah pa potrebno delo opravljajo električni motorji.



Slika 5.8



Slika 5.9

vija vir električne napetosti, ki poganja nihalko. Nihalo sámo v pravem trenutku »odpre« zalogu energije, da se ta sprosti za toliko, kolikor je potrebno za nedušeno nihanje z dano amplitudo.

Druga možnost, kako dobiti nihanje s stalno amplitudo, je da nihalo **stalno poganjamо z zunanjо (vsiljeno) silo**.

Recimo, da poganjamо nihalo, ki samo zase niha z lastno frekvenco  $\omega_0$ , z zunanjо silo  $F(t)$ , ki se spreminja s časom sinusno z amplitudo  $F_0$  in frekvenco  $\omega$ :

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t) \quad (5.23)$$

Pravimo, da nihalu **vsiljujemo nihanje z vsiljeno frekvenco  $\omega$** .

Na nihalo torej učinkujejo tri sile: konservativna sila, ki vleče nihalo k ravnovesni legi ( $-kx$  pri vzmetnem nihalu), nekonservativna sila, ki duši nihanje ( $-\gamma v$ ), ter zunanja, vsiljena sila  $F(t)$ . Vse tri skupaj določajo pospešek nihajočega telesa:

$$\begin{aligned} ma &= -kx - \gamma v + F(t) \\ d^2x/dt^2 + (\gamma/m)dx/dt + (k/m)x &= (F_0/m)\sin(\omega t) \\ d^2x/dt^2 + 2\beta dx/dt + \omega_0^2 x &= (F_0/m)\sin(\omega t) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Dobili smo nehomogeno **diferencialno enačbo vsiljenega nihanja** za odmik  $x(t)$ . Nehomogeni člen te enačbe (to je člen, ki ne vsebuje iskane funkcije  $x$  ali njenih odvodov) na desni strani enačbe vsebuje gonilno silo  $F(t)$ . Matematika nas uči, da je splošna rešitev nehomogene diferencialne enačbe, to je funkcija  $x(t)$ , sestavljena iz splošne rešitve ustrezne homogene enačbe (če namesto nehomogenega člena na desni strani enačbe postavimo nič) in iz t. l. partikularne rešitve, ki je povezana neposredno z nehomogenim členom:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (5.25)$$

Rešitev homogenega dela enačbe,  $x_h(t)$ , že poznamo, to je namreč rešitev za dušeno nihanje (5.21):

$$x_h(t) = x_0 \exp(-\beta t) \sin(\omega_0 t)$$

Ta rešitev predstavlja lastno nihanje nihala, ki je dušeno. Po času  $\gg 1/\beta$ , ko lastno nihanje izzveni, ostane le partikularna rešitev  $x_p(t)$ , ki je neposredno posledica vsiljene sile  $F(t)$ . To rešitev poiščemo z nastavkom:

$$x_p(t) = A_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t) \quad (5.26)$$

v katerem izberemo neznani konstanti  $A_1$  in  $A_2$  tako, da zadostča nehomogeni diferencialni enačbi (5.24) za vsak čas  $t$ . Nastavek (5.26) vzamemo kot rešitev  $x(t)$ , izračunamo prvi in drugi odvod po času ter vse skupaj vstavimo v enačbo (5.24). Dobimo:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)(A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t) + 2\beta \omega (A_1 \cos \omega t - A_2 \sin \omega t) = (F_0/m) \sin \omega t$$

Leva stran te enačbe je za vsak  $t$  enaka desni strani le, če se posebej ujemajo faktorji členov, ki vsebujejo  $\sin \omega t$ , in posebej členov, ki vsebujejo  $\cos \omega t$ , to je če velja:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2)A_1 - 2\beta \omega A_2 &= F_0/m \\ (\omega_0^2 - \omega^2)A_2 + 2\beta \omega A_1 &= 0 \end{aligned}$$

Odtod izračunamo:

$$\begin{aligned} A_1/A_2 &= -(\omega_0^2 - \omega^2)/2\beta \omega \text{ ter} \\ A_1^2 + A_2^2 &= (F_0/m)^2 / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2] \end{aligned}$$

Nastavek (5.26) za vsiljeno nihanje običajno napišemo v obliki:  $A \sin(\omega t - \delta)$ , to je kot sinusno nihanje z amplitudo  $A$ , ki pa v fazl zaostaja za nihanjem vsiljene sile  $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$  za kót  $\delta$ . Namesto konstant  $A_1$  in  $A_2$  torej raje uporabimo konstanti  $A$  in  $\delta$ , ki imata fizikalni pomen. Zveza med njimi je:

$$\begin{aligned} A_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t) &= A \sin(\omega t - \delta) = \\ &= A \sin(\omega t) \cos \delta - A \cos(\omega t) \sin \delta \text{ ali} \\ A_1 &= A \cos \delta \\ A_2 &= -A \sin \delta \end{aligned}$$

Drugo enačbo delimo s prvo in dobimo:

$$\tan \delta = -A_2/A_1 = 2\beta \omega / (\omega_0^2 - \omega^2)$$

Prvo in drugo enačbo kvadriramo ter nato seštejemo:

$$A_1^2 + A_2^2 = A^2 = (F_0/m)^2 / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2]$$

**Zaključek:** Če poganjamо nihalo s periodično zunanjо silo  $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ , če mu vsiljujemo nihanje s frekvenco  $\omega$ , je nihanje nihala takoj po vzbujanju še sestavljeni iz lastnega in vsiljenega nihanja. Ko lastno nihanje zaradi dušenja izzveni ( $x_h \rightarrow 0$ ), ostane le nihanje s frekvenco  $\omega$  vsiljene sile ( $x = x_p$ ):

$$x(t) = A \sin(\omega t - \delta) \quad (5.27)$$

ki ima amplitudo:

$$A = (F_0/m)[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2]^{-1/2} \quad (5.28)$$

in zaostaja za vsiljeno silo  $F(t)$  za kót  $\delta$ :

$$\tan \delta = 2\beta \omega / (\omega_0^2 - \omega^2) \quad (5.28a)$$

Nihalo sicer niha s frekvenco vsiljene sile, vendar v splošnem ne niha sočasno z njo ( $\delta \neq 0$ ). Če je  $\omega < \omega_0$  (vsiljena frekvenca manjša od lastne), je  $\delta > 0$  in nihalo zaostaja za vsiljeno silo. Pri  $\omega > \omega_0$  je  $\delta > 90^\circ$  (nihalo prehiteva vsiljeno silo). Graf odvisnosti faznega zaostanka  $\delta$  od vsiljene frekvence  $\omega$  je na sliki (5.9). Napisane so krivulje za različne stopnje dušenja ( $\beta$ ). Izstopa nedušeno nihalo ( $\beta = 0$ ): če mu vsiljujemo nihanje z  $\omega < \omega_0$ , je  $\delta = 0$  (nihalo niha sočasno – v fazl s silo). Pri  $\omega > \omega_0$  pa je  $\delta = \pi$  (nihalo udarja v nasprotno smer, kot suva sila; niha v protifazi s silo). Pri  $\omega = \omega_0$  je  $\delta = \pi/2$ , ne glede na stopnjo dušenja (za vse  $\beta$ ). Tedaj se odmik spreminja s časom kosinusno:  $x = A \cos(\omega t)$ , kar pomeni, da je vsiljena sila  $F = F_0 \sin(\omega t)$  enaka nič tedaj, ko je odmik največji (ko se nihalo ustavi v amplitudi in spremeni smer hitrosti), ter največja v ravnovesni legi ( $x = 0$ ), ko je hitrost nihala največja. Vidimo, da se pri  $\omega = \omega_0$  hitrost nihala spreminja s časom enako kot vsiljena sila, tako da sila v vsakem trenutku pospešuje nihanje. Pravimo, da je vsiljena sila tedaj v resonanci z nihalom.

Amplituda  $A$  vsiljenega nihanja je sveda premo sorazmerna z amplitudo  $F_0$  vsiljene sile, toda odvisna je tudi od koeficiente dušenja ( $\beta$ ) in predvsem od razmerja vsiljene frekvence  $\omega$  glede na lastno frekvenco  $\omega_0$  nihala. Slika (5.10) prikazuje odvisnost amplitude  $A$  od vsiljene frekvence  $\omega$  za različne stopnje dušenja ( $\beta$ ), to je prikazuje graf  $A(\omega)$  po enačbi (5.28).

Pri zelo počasnem vsiljevanju ( $\omega \ll \omega_0$ ) je  $A \approx F_0/(m\omega^2) = F_0/k$  (za vzmetno nihalo) neodvisno od stopnje dušenja. V tem območju frekvenc nihalo zvesto sledi (sočasno in s stalno amplitudo) vsiljeni sili. Ko se  $\omega$  približa  $\omega_0$ , se amplituda  $A$  vsiljenega nihanja poveča, in to tem močneje, čim šibkejše je dušenje (manjši  $\beta$ ). Če nedušenemu nihalu ( $\beta = 0$ ) vsiljujemo nihanje z njegovo lastno frekvenco ( $\omega = \omega_0$ ), se amplituda nihanja zelo (skoraj neskončno) poveča. To razumemo: ker ni energijskih izgub, se delo vsiljene sile (ki je v resonanci največje) nalaga v nihalo, katerega energija (in amplituda) se zato po vsakem nihaju povečuje. Dušenje zmanjšuje izrazitost resonance: čim večji je  $\beta$ , tem manj amplituda naraste, ko se  $\omega$  približa  $\omega_0$ . Poleg tega se maksimum amplitude pomika h krajšim frekvencam, če  $\beta$  narašča:

$$\frac{dA}{d\omega} = 0 \text{ pri } \omega = \omega_{max}$$

(odvajamo le izraz pod korenom v enačbi 5.28)

$$2(\omega_0^2 - \omega_{max}^2)(-2\omega_{max}) + 4\beta^2 \cdot 2\omega_{max} = 0 \\ \omega_{max}^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2 \quad (5.29)$$

Vidimo, da maksima amplituda  $A$  ni ( $\omega_{max}$  ne obstaja, ni realen), če je  $2\beta^2 > \omega_0^2$ . **Premočno dušenje onemogoči resonanco.**

Kako reagira nihalo, če mu vsiljujemo zelo hitro nihanje? Za  $\beta \gg \omega_0$  je  $A \approx F_0/(m\omega^2)$  in  $\operatorname{tg}\delta \approx -2\beta/\omega$ . Amplituda nihanja gre torej k nič, če  $\omega$  narašča prek vseh meja, fazna zakasnitev  $\delta$  pa se približuje  $\pi$ . **Nihalo ne more slediti zelo hitremu vsiljenemu nihanju**, zato sploh ne niha. Kolikor že niha, pa niha v protifazi s silo: nihalo udarja ravno v nasprotno smer kot sila.

Poglejmo še, kolikšna je moč vsiljene sile med vsiljnim nihanjem.

$$P(t) = F(t)v = F_0 \sin(\omega t) \cdot A \omega \cos(\omega t - \delta) \\ = F_0 A \omega [\sin(\omega t) \cos(\omega t) \cos(\delta) + \sin^2(\omega t) \sin(\delta)]$$

Ker se moč spreminja s časom, poiščemo njen povprečno vrednost  $\bar{P}$  v teku nihajnega časa  $t_0 = 2\pi/\omega$  vsiljenega nihanja (gl. 4.8):

$$\bar{P} = (1/t_0) \int_0^{t_0} P(t) dt = (F_0/2) \omega A \sin(\delta)$$

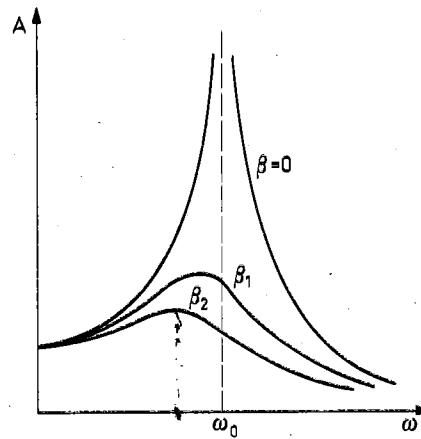
Uporabimo še enačbi (5.28 in 29) za  $A$  in  $\operatorname{tg}\delta$  ter dobimo:

$$\bar{P} = (F_0^2 \beta / m) \omega^2 / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2] \quad (5.30)$$

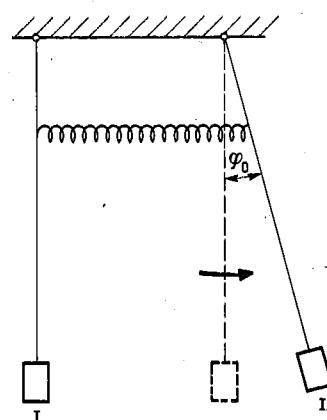
Z enačbo  $d\bar{P}/d\omega = 0$  se prepričamo, da je povprečna moč največja pri  $\omega = \omega_0$ , to je v resonanci (ne glede na stopnjo dušenja):

$$\bar{P}_{max} = \bar{P}(\omega = \omega_0) = F_0^2 / (4m\beta) \quad (5.30a)$$

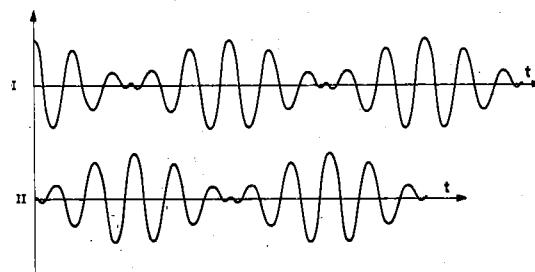
Če ni dušenja ( $\beta = 0$ ), je povprečna moč gonilne sile v resonanci ( $\omega = \omega_0$ ) zaradi neskončno velika.



Slika 5.10



Slika 5.11



Slika 5.12

Vsaka konstrukcija ali zgradba, npr. strop, stena, drog, steber itd., je nihajoči sistem z dano lastno frekvenco. V splošnem je lastna frekvence sistema tem manjša, čim masivnejši in večji je sistem (odvisna je tudi od njegovih elastičnih lastnosti). Pogosto se zgodi, da je tak sistem podvržen zunanjemu nihanju, da nanj učinkuje periodična zunanja sila. Paziti moramo, da je vsiljena frekvence ali velika ali majhna v primerjavi z lastno frekvenco sistema, da se izognemo resonanci. V resonanci namreč lahko že razmeroma šibko vsiljeno nihanje povzroči zaznatno nihanje sistema (posebno če je dušenje šibko), ki lahko sistem poškoduje ali celo uniči. Ritmični vetrovni sunki lahko izbičijo resonančno nihanje visokih in vitkih stolpov, stebrov ali visečih mostov.

## Skopljeni nihanje – utripanje

Zgodi se, da so nihala medsebojno povezana, npr. z elastičnimi vezmi, prek katerih učinkujejo drugo na drugo. Pravimo, da so nihala **skopljeni**.

Na sliki (5.11) sta narisani enaki težni nihali I in II, ki sta pritrjeni na skupni strop. Čeprav sta nihali že skopljeni prek stropa, njuno sklopitev dodatno ojačimo s prožno vzmetjo, ki jo pritrdimo na nihali (npr. na oddaljenosti  $b$  od vrtišč). Med nihanjem nihal se vzmet razteza in krči ter tako vpliva na njuno nihanje. Čim bolj je pritrdišče vzmeti na nihali oddaljeno od vrtišč (čim večji je  $b$ ), tem močneje vzmet učinkuje na nihali, tem močneje sta nihali skopljeni.

Recimo, da izmaknemo nihalo II iz ravnovesne lege (za amplitudo  $\varphi_0$ ), nihalo I pa obdržimo na mestu (sklopitvena vzmet se pri tem raztegne). Ko nihali spustimo, začneti nihat. Takoj v začetku ima energijo le izmaknjeno nihalo II, ki začne nihat z največjo amplitudo  $\varphi_0$ . Toda s svojim nihanjem nateguje vzmet in prek nje sili prvotno mirujoče nihalo I v nihanje. Posledica tega je, da se energija izmakinjenega nihala prek vzmeti prenaša na nihalo I, katerega amplituda nihanja zato narašča, medtem ko se amplituda nihala II zmanjšuje. Čez nekaj časa se nihalo II ustavi in tedaj nihalo I niha z največjo amplitudo (s  $\varphi_0$ , če zanemarimo energijske izgube). Tedaj je celotna energija nihanja naložena v nihalu I. Nato se pojavi ponovi v nasprotni smeri itd. Sklopitvena vzmet torej povzroča, da se energija nihanja preliva iz enega nihala v drugo in obratno. Videli bomo, da je frekvence takšnega prelivanja tem večja, čim močneje sta nihali skopljeni. Seveda se med prelivanjem nekaj energije tudi izgublja (zaradi nekonervativnih sil – trenja in upora zraka), zato nihali nihata dušeno in se slej ko prej ustavita.

Poglejmo, kako nihata skopljeni nihali I in II. V nekem trenutku je npr. nihalo II odmaknjeno v desno za kót  $\varphi_2$ , nihalo I pa za kót  $\varphi_1$  v enako smer. Vzmet je tedaj raztegnjena za  $x = b(\varphi_2 - \varphi_1)$ . Na nihalo II deluje navor njegove teže ( $-mgd\varphi_2$ , pri majhnih kotih) ter navor  $F_b = -kb^2(\varphi_2 - \varphi_1)$  sile prožnosti raztegnjene vzmeti. Pospešek  $\alpha_2$  tega nihala zato zadošča enačbi (3.27):

$$J\alpha_2 = -mgd\varphi_2 - b^2k(\varphi_2 - \varphi_1) = Jd^2\varphi_2/dt^2$$

Podobna enačba za nihalo I ima obliko:

$$J\alpha_1 = b^2k(\varphi_2 - \varphi_1) - mgd\varphi_1 = Jd^2\varphi_1/dt^2$$

ali:

$$d^2\varphi_1/dt^2 = -\omega_0^2\varphi_1 + D(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (5.31a)$$

$$d^2\varphi_2/dt^2 = -\omega_0^2\varphi_2 - D(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (5.31b)$$

kjer je  $\omega_0 = \sqrt{mgd/J}$  lastna frekvence posameznega težnega nihala (gl. 5.10),  $D$  pa parameter sklopitve:

$$D = b^2k/J \quad (5.32)$$

Dobljeni enačbi (5.31a, b) seštejemo in dobimo za vsoto kotov  $\varphi_1 + \varphi_2$  diferencialno enačbo:

$$d^2(\varphi_2 + \varphi_1)/dt^2 = -\omega_0^2(\varphi_2 + \varphi_1)$$

Ki je podobna diferencialni enačbi nedušenega nihanja z lastno frekvenco  $\omega_0$  (gl. 5.15). Torej vsota kotov  $\varphi_2 + \varphi_1$  niha sinusno ali kosinusno (odvisno do začetnega pogoja) s frekvenco  $\omega_0$ , npr.:

$$\varphi_2 + \varphi_1 = \varphi_0 \cos(\omega_0 t) \quad (5.33a)$$

Razlika enačb (5.31b in a) ravno tako dá diferencialno enačbo nedušenega nihanja, le da za razliko kotov  $\varphi_2 - \varphi_1$  in z lastno frekvenco  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2D}$ :

$$d^2(\varphi_2 - \varphi_1)/dt^2 = -(\omega_0^2 + 2D)(\varphi_2 - \varphi_1) = -\omega^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

in

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_0 \cos(\omega t) \quad (5.33b)$$

V obeh primerih smo vzeli enako amplitudo  $\varphi_0$ , da dobimo pravilen začetni pogoj (za  $t = 0$ ). Dobljeni enačbi seštejemo in odštejemo in dobimo rezultat:

$$\varphi_2 = (\varphi_0/2)\cos(\omega_0 t) + (\varphi_0/2)\cos(\omega t)$$

$$\varphi_1 = (\varphi_0/2)\cos(\omega_0 t) - (\varphi_0/2)\cos(\omega t)$$

ali

$$\varphi_2 = \varphi_0 \cos\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}t\right) \quad (5.34a)$$

$$\varphi_1 = \varphi_0 \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}t\right) \quad (5.34b)$$

V začetku ( $t = 0$ ) je zares:  $\varphi_2 = \varphi_0$  in  $\varphi_1 = 0$ , kakor smo bili sprožili nihali.

Običajno je sklopitev nihal šibka, tako da je  $D \ll \omega_0^2$  in frekvence  $\omega$  le malo večja od lastne frekvence  $\omega_0$  prostih nihal. Dobljeni rezultat (5.34) za  $\varphi_1$  in  $\varphi_2$  lahko potem interpretiramo kot harmonično nihanje s frekvenco  $(\omega + \omega_0)/2$ , katerega amplituda se spreminja izmenično s frekvenco  $(\omega - \omega_0)/2$ :

$$\varphi_2(t) = \varphi_{20}(t) \cos\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}t\right)$$

$$\varphi_1(t) = \varphi_{10}(t) \sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}t\right) \quad (5.35)$$

Kjer je:

$$\varphi_{20}(t) = \varphi_0 \cos\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}t\right)$$

$$\varphi_{10}(t) = \varphi_0 \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}t\right) \quad (5.35a)$$

Sklopljeni nihali sta v fazi premaknjeni za  $90^\circ$ , eno niha sinusno, drugo kosinusno. Podobno se s časom spreminja amplituda obeh nihal: ko ima eno nihalo največjo amplitudo ( $= \varphi_0$ ), je amplituda drugega nič, in obratno (slika 5.12).

Zanimivo je, da sklopljeni nihali nihata z nekoliko večjo frekvenco  $(\omega + \omega_0)/2$ , kot nihata prosti nihali ( $\omega_0$ ). Sklopitev torej pospeši nihanje, nihajni čas se zaradi sklopitve zmanjša.

Nihanje, katerega amplituda se izmenično spreminja od največje vrednosti do nič, se imenuje **utripanje** (bibanje, zujanje). Frekvenca utripanja  $\omega_u = (\omega - \omega_0)/2$  pove, kako hitro se amplituda nihanja spreminja s časom; navadno je precej manjša od frekvence samega nihanja.

Obravnavajoč vzmetno nihalo, vzamemo, da je telo  $m$  pripeto s prožno vzmetjo na zid ali strop (gl. str. 44). Toda zid se lahko premika (res je pritrjen na Zemljo, ki pa je vendarle prosta). V splošnem je torej nihajoče telo pritrjeno na drugo telo, ki tudi samo lahko niha.

Recimo, da sta telesi  $m_1$  in  $m_2$  speti s prožno vzmetjo (konstanta  $k$ ) in položeni na gladko, vodoravno podlago, po kateri se lahko premikata brez trenja. Telesi mirujeta v ravnovesnih legah, vzmet ni ne skrčena ne stisnjena (slika 5.13a). Nihanje začnemo npr. tako, da telo  $m_2$  pomaknemo v desno za amplitudo  $x_0$ , telo  $m_1$  pa obdržimo v prvotni legi. Ko telesi spustimo, začneta nihati v vodoravnini smeri. V trenutku  $t$  je npr. telo  $m_2$  pomaknjeno v desno za  $x_2$ , telo  $m_1$  pa za  $x_1$  (slika 5.13b). Vzmet je tedaj raztegnjena za  $x_2 - x_1$  in vleče telo  $m_2$  v levo s prožno silo  $k(x_2 - x_1)$ , telo  $m_1$  pa z enako veliko silo v desno. Newtonov zakon dinamike za ti telesi dà enačbi:

$$\begin{aligned} m_2 a_2 &= -k(x_2 - x_1) \\ m_1 a_1 &= k(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

ali

$$d^2x_2/dt^2 + \omega_2^2(x_2 - x_1) = 0 \quad \omega_2 = \sqrt{k/m_2} \quad (5.36a)$$

$$d^2x_1/dt^2 - \omega_1^2(x_2 - x_1) = 0 \quad \omega_1 = \sqrt{k/m_1} \quad (5.36b)$$

Drugo enačbo (5.36b) odštejemo od prve in dobimo diferencialno enačbo nedušenega nihanja za razliko  $x_2 - x_1$ :

$$d^2(x_2 - x_1)/dt^2 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)(x_2 - x_1) = 0$$

Relativni premik enega telesa glede na drugo telo označimo z:

$$u = x_2 - x_1$$

Ta zadošča diferencialni enačbi:

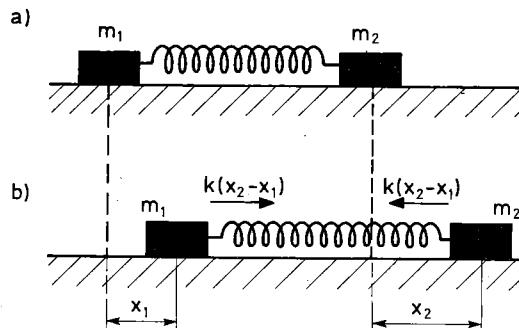
$$d^2u/dt^2 + \omega^2 u = 0 \quad (5.37)$$

Vidimo, da telesi nihata drugo glede na drugo harmonično z lastno frekvenco:

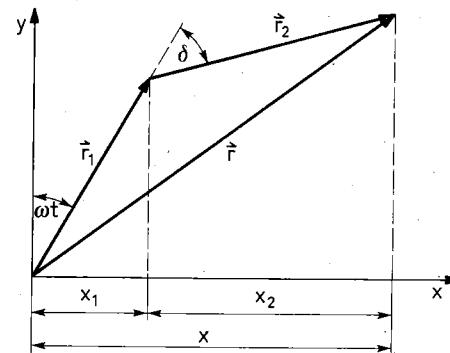
$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \sqrt{k(m_1 + m_2)/m_1 m_2} = \sqrt{k/\mu} \quad (5.37)$$

Kjer je  $\mu$  t. i. **reducirana masa** nihajočih teles; dana je z enačbo:

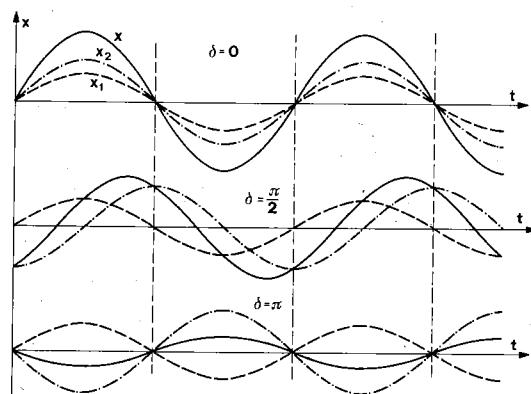
$$\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2) \quad \text{ali} \quad 1/\mu = 1/m_1 + 1/m_2 \quad (5.38)$$



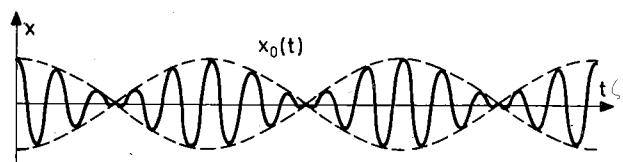
Slika 5.13



Slika 5.14



Slika 5.15



Slika 5.16

Reducirana masa je manjša od mase posamičnih nihajočih teles (od tod ime reducirana), zato je **lastna frekvence sklopljenih teles večja od ustreznih frevenc prostih teles**. S pomočjo reducirane mase lahko nihanje dveh sklopljenih teles obravnavamo kot nihanje enega samega telesa (glede na drugo). Če je npr. telo  $m_1$  zid, je  $m_1 \gg m_2$  in  $\mu \approx m_2$ ; dobimo navadno nihanje telesa  $m_2$  glede na nepomično okolico.

Da pomika  $x_1$  in  $x_2$  sklopljenih nihajočih teles ustreza našemu začetnemu pogoju  $x_1 = 0$   $x_2 = x_0$  (za  $t = 0$ ), izberemo rešitev diferencialne enačbe (5.37) v obliki:

$$u = x_2 - x_1 = x_0 \cos(\omega t) \quad (5.39)$$

To rešitev vstavimo v (5.36b):

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \omega_1^2 x_0 \cos(\omega t)$$

in dvakrat integriramo, upoštevaje začetni pogoj  $x_1 = 0$  in  $dx_1/dt = 0$  za  $t = 0$ . Dobimo rezultat:

$$x_1 = \omega_1^2 x_0 / \omega^2 - (\omega_1/\omega)^2 x_0 \cos(\omega t) = (\mu/m_1)x_0 - (\mu/m_1)x_0 \cos(\omega t) \quad (5.40a)$$

$x_2$  izpeljemo neposredno iz enačbe (5.39):

$$x_2 = \omega_1^2 x_0 / \omega^2 + (\omega_2/\omega)^2 x_0 \cos(\omega t) = (\mu/m_1)x_0 + (\mu/m_2)x_0 \cos(\omega t) \quad (5.40b)$$

Telesi nihata okrog novih ravnovesnih leg, ki sta premaknjeni za  $x_0\mu/m_1$  v smeri začetnega premika; nihata sicer sočasno, vendar udarjata v nasprotno smer (ko eno telo zaniha v levo, zaniha drugo v desno, in obratno). Težje telo niha z manjšo amplitudo kot lažje; vsota obeh amplitud je enaka začetni amplitudi  $x_0$ .

Premisli, kako je z energijo nihajočih teles.

Podobno kot telesi  $m_1$  in  $m_2$  z vzmetjo (slika 5.13) npr. nihata atoma v dvoatomni molekuli.

Sklopimo lahko tudi različne vrste nihal, npr. vzmetno in polžasto (sučno). Ko se vzdolžna vijačna vzmet raztegne, se pri tem tudi nekoliko zasuče okrog vzdolžne osi. Vzdolžno nihanje vzmeti je tako sklopljeno s sučnim nihanjem, ki vpliva nazaj na vzdolžno nihanje itd. **Sklopitev nihanj se izrazi, če sta lastni frekvenci posamičnih nihanj enaki.** Frekvenco sučnega nihanja reguliramo tako, da ima telo na koncu vzmeti prečko, po kateri drsita uteži. Premikajoč uteži (in spremenljajoč vztrajnostni moment, gl. 5.8), izenačimo lastni frekvenci vzdolžnega (linearnega) nihanja vzmeti in sučnega nihanja in tako dosežemo najbolj učinkovito sklopitev.

Žepna ura lahko niha kot težno nihalo, če jo obesimo na verižico. Njeno nihanje je sklopljeno s sučnim nihanjem polžaste vzmeti v njej. Ta sklopitev je pomembna, če sta lastni frekvenci obeh nihanj izenačeni. Tedaj težno nihanje ure učinkuje na njen tek. (Kako? Ali ura zaradi tega prehiteva ali zaostaja?)

## Sestavljanje nihanj

Pogosto se zgodi, da na nihalo hkrati učinkujejo različna nihanja, ki imajo različne frekvence, amplitude in faze ter so v različnih smereh. Zanima nas, kakšno je

rezultirajoče nihanje, kako se posamezna nihanja sestavljajo v skupno nihanje.

Najprej vzmemimo, da imajo posamezna nihanja enako frekvenco in da učinkujejo v enaki smeri.

## Sestavljanje enakosmernih nihanj

Recimo, da sestavljamo enakosmerni nihanji  $x_1 = r_1 \sin(\omega t)$  in  $x_2 = r_2 \sin(\omega t + \delta)$ , ki imata enako frekvenco  $\omega$ , razlikujeta pa se v amplitudi in fazi; drugo nihanje prehiteva prvo za fazno razliko  $\delta$ . **Odmik x ki je posledica rezultirajočega nihanja, je algebraična vsota odmikov  $x_1$  in  $x_2$  posameznih nihanj:**

$$x = x_1 + x_2 = r_1 \sin(\omega t) + r_2 \sin(\omega t + \delta) \quad (5.41)$$

To zapisemo kot sinusno nihanje s frekvenco  $\omega$  in amplitudo  $r$ , ki prehiteva prvo nihanje za fazno razliko  $\varphi$ :

$$x = r \sin(\omega t + \varphi) \quad (5.41a)$$

Primerjajoč oba izraza za  $x$  (izenačimo člene s faktorjem  $\sin \omega t$  in posebej člene s faktorjem  $\cos \omega t$ ), dobimo amplitudo  $r$  in fazno razliko rezultirajočega nihanja:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= r_2 \sin \delta / (r_1 + r_2 \cos \delta) \quad \text{ter} \\ r^2 &= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \delta \end{aligned} \quad (5.41b)$$

Za  $\delta = 0$  je  $\varphi = 0$  in  $r = r_1 + r_2$  (če sta enakosmerni nihanji sočasni, brez fazne razlike, se njuni amplitudi enostavno seštejeta). Pri fazni razliki  $\delta = \pi$  (nihali udarjata v nasprotnih smereh, nihata v protifazi) je  $\varphi = \pi$  in  $r = r_1 - r_2$ .

Tovrstno sestavljanje nihanj predstavimo grafično z vektorskim seštevanjem amplitudnih vektorjev  $r_1$  in  $r_2$  (slika 5.14). Iz srednje šole se spomnimo (gl. tudi str. 22), da lahko nihanje predstavimo kot projekcijo (npr. na os x) amplitudnega vektorja  $r$ , ki kroži v ravnini x-y s stalno kotno hitrostjo  $\omega$ . Smer prvega vektorja  $r_1$  oklepa v trenutku  $t$  z osjo y kót  $\omega t$ , smer drugega  $r_2$  pa kót  $(\omega t + \delta)$ . Vektorska vsota  $r_1 + r_2$  da amplitudni vektor  $r$  nastalega nihanja; ta oklepa z osjo y kót  $(\omega t + \varphi)$  (gl. sliko 5.14).

Na sliki (5.15) so skicirani časovni grafi posameznih odmikov  $x_1$  in  $x_2$  ter sestavljenega nihanja  $x$  za tri fazne razlike  $\delta = 0, \pi/2$  in  $\pi$ . Za vsak trenutek  $t$  seštejemo (oziroma odštejemo, odvisno od predznaka) odmika  $x_1$  in  $x_2$ , ki ju zahtevata posamezni nihanji, v rezultirajoči odmiki  $x$ .

S sestavljanjem enakosmernih nihanj z enakimi frekvencami vedno dobimo (ne glede na fazno razliko med njimi) sinusno nihanje z enako frekvenco. Povsem drugačno nihanje pa nastane, če sestavljamo nihanja z različnimi frekvencami.

Najprej proučimo primer, da se frekvenci  $\omega_1$  in  $\omega_2$  posameznih nihanj le malo razlikujeta ( $\omega_1 \approx \omega_2$ ), njuni amplitudi in fazi pa sta enaki. Rezultat je nihanje:

$$\begin{aligned} x &= r_1 \sin(\omega_1 t) + r_2 \sin(\omega_2 t) = \\ &= 2r_1 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \end{aligned} \quad (5.42)$$

Ki ga lahko predstavimo (ker sta frekvenci  $\omega_1$  in  $\omega_2$  skoraj enaki) kot sinusno nihanje s frekvenco  $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ :

$$x = x_0(t) \sin(\omega t) \quad (5.42a)$$

Amplituda nastalega nihanja  $x_0(t)$  ni stalna, marveč se spreminja s časom kosinusno s frekvenco  $\omega_u = (\omega_1 - \omega_2)/2$ :

$$x_0(t) = 2r_1 \cos(\omega_u t) \quad (5.42b)$$

Podobno nihanje smo spoznali pri sklopi tv enakih nihal (str. 119); imenujemo ga **utripanje**. Značilno zanj je, da amplituda izmenično narašča in pada (slika 5.16). To se dogaja tem počasneje (frekvence utripanja  $\omega_u$  je tem manjša), čim bliže sta si frekvenči  $\omega_1$  in  $\omega_2$ , ki ju sestavljamo.

Utrianje izkorisčamo, ko uglašujemo glasbeni instrument, npr. kitaro. Istočasno zabrenkamo struno ter sprožimo kontrolni ton (npr. glasbene vilice ali tonski generator). Ko je frekvence tona, ki ga oddaja struna, blizu frekvenči kontrolnega tona, slišimo počasno utripanje (zujanje).

Kadar se frekvenči enakosmernih nihanj, ki jih sestavljamo, opazno razlikujejo, v splošnem ne dobimo več nihanja (periodičnega, ponavljajočega se gibanja). Edinoče, če so **frekvenčne posameznih sestavnih nihanj celoštevilčni mnogokratniki najmanjše frekvence**, nastane sicer nihanje, ki pa ni sinusno (harmonično).

Na sliki (5.17) sestavljamo nihanj  $x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t)$  in  $x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t)$ , pri čemer je  $\omega_2 = 2\omega_1$ . Rezultat je periodično gibanje  $x$ , ki se ponavlja s frekvenco  $\omega_1$  oziroma z nihajnim časom  $t_0 = 2\pi/\omega_1$ , vendar po obliki ni sinusno (čeprav smo ga bili sestavili iz sinusnih nihanj). Če še dodajamo sinusna nihanja s frekvenčami, ki so mnogokratniki najmanjše frekvence  $\omega_1$ , npr. s frekvenco  $\omega_3 = 3\omega_1$ ,  $\omega_4 = 4\omega_1$  itd., se spreminja le oblika sestavljenega nihanja, njegova perioda  $t_0$  (nihajni čas) pa je enaka. Poleg sinusnih (ali namesto njih) lahko uporabimo tudi kosinusna. Pogoj je le, da so posamezne frekvenčne celoštevilčni mnogokratniki najmanjše frekvence  $\omega_1$ .

Pokaže se, da lahko s **sestavljanjem sinusnih in/ali kosinusnih nihanj, katerih frekvenčne so celoštevilčni mnogokratniki najmanjše frekvence  $\omega_1$** , sestavimo poljubno oblikovano periodično gibanje (nihanje), ki se ponavlja s periodo  $t_0 = 2\pi/\omega_1$ .

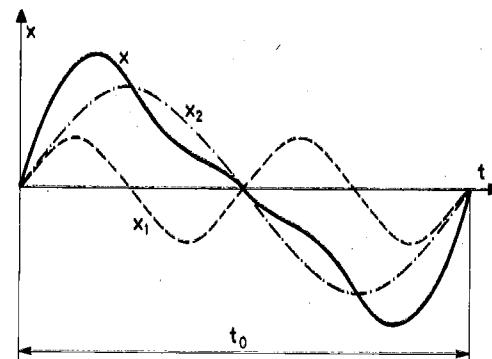
**Najmanjša frekvenca  $\omega_1$** , ki podaja nihajni čas nihanja ( $t_0$ ), se imenuje **osnovna frekvenca nihanja**. Njeni celoštevilčni mnogokratniki:

$$\omega_n = n\omega_1, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (5.43)$$

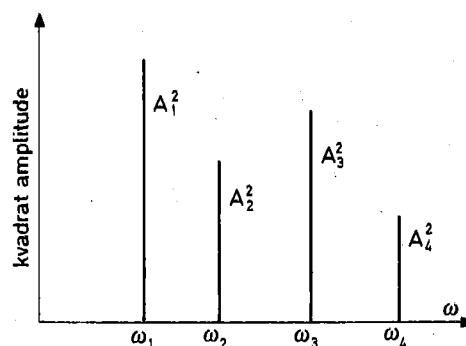
so **višje harmonične frekvenčne**. Čim več višeharmoničnih frekvenčnih je prisotnih, tem bolj se nihanje razlikuje od harmoničnega (sinusnega ali kosinusnega).

Velja tudi obratno:

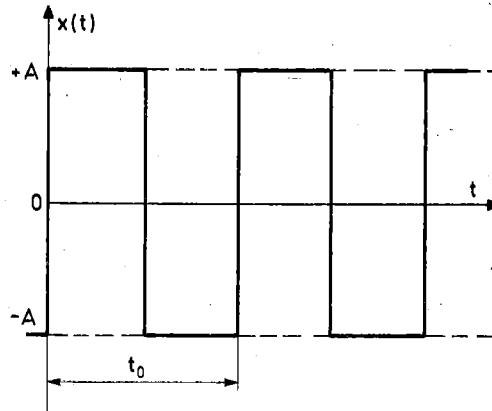
**Poljubno periodično funkcijo  $x(t)$** , ki se npr. ponavlja s periodo  $t_0$ , lahko predstavimo kot **vsoto harmoničnih (sinusnih in/ali kosinusnih) nihanj** z osnovno frekvenco  $\omega_1 = 2\pi/t_0$  in višje harmoničnimi frekvenčnimi frekvenčnimi  $\omega_n = n\omega_1$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ). Čim bolj se funkcija  $x(t)$  razlikuje od harmonične (sinusne ali kosinusne), tem več višje harmoničnih dodatkov je potrebnih za njen popis. Pravimo, da je splošno nihanje  $x(t)$  sestavljeno iz osnovnega nihanja in iz višje harmoničnih nihanj.



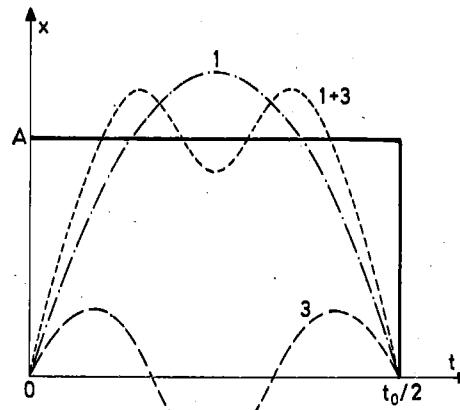
Slika 5.17



Slika 5.18



Slika 5.19



Slika 5.20

Različna nihanja z enako periodo  $t_0$  se razlikujejo v tem, katera in kako močna višjeharmonična nihanja jih sestavljajo. Včasih nastopajo le sinusna nihanja ali le kosinusna, lahko so prisotne vse višje harmonične frekvence ali npr. le sodi (ozioroma lihi) mnogokratniki osnovne frekvence itd. Ko raziskujemo neko nihanje, raziskujemo njegovo frekvenčno sestavo, t. i. **spekter nihanja**. Zanimajo nas frekvence in amplitude posameznih višjeharmoničnih nihanj, ki sestavljajo obravnavano nihanje. Navadno podamo kvadrate amplitud posameznih harmoničnih nihanj (osnovno in višje harmonična), ki to nihanje sestavljajo (kvadrate zato, ker je energija nihanja sorazmerna s kvadratom amplitute).

Recimo, da je nihanje s periodo  $t_0$  sestavljeno iz osnovnega nihanja z amplitudo  $A_1$  ter iz višjeharmoničnih nihanj z amplitudami  $A_2, A_3$  in  $A_4$ . Spekter tega nihanja je skiciran na sliki (5.18). Na absciso nanašamo frekvenco, na ordinatu pa kvadrat amplitude posameznih harmoničnih nihanj. Spekter našega nihanja sestavlja štiri **spektralne črte**, ki so na frekvenčni osi enako razmaknjene med seboj. Višina posamezne črte je merilo za utež, s katero je posamezno harmonično nihanje zastopano v celotnem nihaju.

Razstavljanje periodične funkcije (nihanja) na harmonična nihanja se imenuje **harmonična ali Fourierova analiza nihanja**. Vrsta harmoničnih nihanj, ki predstavlja neharmonično nihanje, je **Fourierova vrsta**. V splošnem jo sestavljajo tako sinusni kot kosinusni členi.

Fourierova vrsta za periodično funkcijo  $x(t)$  s periodo  $t_0$  ima v splošnem obliko:

$$x(t) = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(2\omega_1 t) + A_3 \sin(3\omega_1 t) + \dots + B_1 \cos(\omega_1 t) + B_2 \cos(2\omega_1 t) + B_3 \cos(3\omega_1 t) + \dots$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_1 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\omega_1 t) \quad (5.44)$$

kjer je  $\omega_1 = 2\pi/t_0$ . Neznani parametri  $A_n$  in  $B_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) so odvisni od oblike funkcije  $x(t)$ . Če je npr.  $x(t)$  čisto harmonično nihanje s frekvenco  $\omega_1$  in amplitudo  $x_0$ , je  $A_1 = x_0$ ,  $A_2 = A_3 = \dots = 0$  in  $B_n = 0$  za vse  $n$ .

Pri znani funkciji  $x(t)$  določimo parameter  $A_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) oz.  $B_m$  tako, da levo in desno stran enačbe (5.44) pomnožimo z ustreznim sinusnim (oz. kosinusnim) faktorjem  $\sin(m\omega_1 t)$  in integriramo od 0 do  $t_0$ . Dobimo:

$$\int_0^{t_0} x(t) \sin(m\omega_1 t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{t_0} \sin(n\omega_1 t) \sin(m\omega_1 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^{t_0} \cos(n\omega_1 t) \sin(m\omega_1 t) dt$$

V tabelah integralov najdemo, da velja:

$$\int_0^{2\pi} \sin(n\varphi) \sin(m\varphi) d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{za } n \neq m \\ \pi & \text{za } n = m \end{cases}$$

ter

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\varphi) \sin(m\varphi) d\varphi = 0 \text{ za vse } n \text{ in } m$$

V zgornjih vsotah so torej členi z  $n \neq m$  nič in ostane le člen z  $n = m$ . Dobimo:

$$A_m = (2/t_0) \int_0^{t_0} x(t) \sin(2\pi m t/t_0) dt \quad (5.45a)$$

Podobno izračunamo (da enačbo 5.44 množimo s  $\cos(m\omega_1 t)$ ):

$$B_m = (2/t_0) \int_0^{t_0} x(t) \cos(2\pi m t/t_0) dt \quad (5.45b)$$

### Primer:

Poišči Fourierovo vrsto za stopničasto nihanje s slike (5.19).

$$x(t) = \begin{cases} +A & \text{za } 0 < t < t_0/2 \\ -A & \text{za } t_0/2 < t < t_0 \end{cases}$$

Ker ima funkcija  $x(t)$  v intervalu  $(0, t_0/2)$  drugačno obliko kot v intervalu  $(t_0/2, t_0)$ , razbijemo integral (5.45) na dva dela:

$$A_m = (2A/t_0) \left[ \int_0^{t_0/2} \sin(2\pi m t/t_0) dt - \int_{t_0/2}^{t_0} \sin(2\pi m t/t_0) dt \right] = \\ = (4A/t_0) \int_0^{t_0/2} \sin(2\pi m t/t_0) dt = (2A/\pi m) [1 - (-1)^m]$$

Torej je  $A_m$  za sode  $m$  enak nič, za lihe pa  $4A/\pi m$ . S podobnim računom ugotovimo, da je  $B_m = 0$  za vse  $m$ . Fourierova vrsta za stopničasto nihanje ima potem takem obliko:

$$x(t) = (4A/\pi) [\sin(\omega_1 t) + (1/3)\sin(3\omega_1 t) + (1/5)\sin(5\omega_1 t) + \dots] \\ \omega_1 = 2\pi/t_0$$

Na sliki (5.20) so za prvo polovico periode  $t_0$  označeni prispevki osnovnega nihanja s frekvenco  $\omega_1$  in amplitudo  $4A/\pi$  (krivulja 1), prvega višjeharmoničnega nihanja s frekvenco  $3\omega_1$  in amplitudo  $4A/3\pi$  (krivulja 3) in njuna vsota (krivulja 1+3) v primerjavi s končnim stopničastim nihanjem (zvlečena krivulja), ki nastane, če upoštevamo še vse dodatne višjeharmonične prispevke.

### Naloga:

Poišči Fourierovo vrsto za žagasto nihanje s slike (5.21).

$$\text{Rezultat: } x(t) = (8A/\pi^2) [\sin(\omega_1 t) - (1/3^2)\sin(3\omega_1 t) + (1/5^2)\sin(5\omega_1 t) - \dots]$$

### Sestavljanje pravokotnih nihanj

Zanima nas, kakšno gibanje nastane, če sestavimo harmonični nihanji v pravokotnih smereh. Recimo, da opazujemo gibanje svetle sledi elektronskega žarka na zaslouni katodne cevi – osciloskopa (slika 5.22). Na poti do zaslona potuje elektronski žarek skozi prostor med navpičnima odklonskima ploščama (ki ga odklanjata v vodoravnih smerih) in med vodoravnimi ploščama (ki ga odklanjata v navpičnih smerih). Na plošče priključimo izmenični napetosti z različnimi amplitudama in frekvencama. Zaradi napetosti na navpičnih ploščah niha lisa na ekranu v vodoravnih smerih ( $x$ ) izmenično s frekvenco  $\omega_x$ , zaradi napetosti na vodoravnih ploščah pa v navpičnih smerih ( $y$ ) s frekvenco  $\omega_y$ . Kako lisa potuje po ekranu, če sta priključeni obe napetosti hkrati?

Drug primer: Težni nihali nihata v navpičnih ravninah, ki sta pravokotni druga na drugo. Vsako nihalo je opremljeno z refleksnim zrcalcem. Svetlobni žarek vpada na prvo zrcalce, se od njega odbija do drugega in od tega na oddaljen navpični zaslon. Če niha le prvo nihalo, niha sled žarka na zaslonu v vodoravni smeri s frekvenco tega nihala. Zaradi nihanja drugega nihala pa niha žarek po zaslonu v navpični smeri. Ko nihata obe nihali hkrati, pleše žarek po zaslonu sem ter tja po krivulji, ki se v splošnem spreminja s časom. Frekvenci posameznih nihal npr. spremojamo tako, da premikamo uteži, ki sestavljata nihali.

Naša naloga je, da ugotovimo, kakšno gibanje v ravnini  $x$ - $y$  dobimo, če sestavimo harmonično nihanje v smeri osi  $x$  z amplitudo  $x_0$  in frekvenco  $\omega_x$  ter harmonično nihanje v smeri osi  $y$  z amplitudo  $y_0$  in frekvenco  $\omega_y$ . V splošnem se ti nihanji razlikujeta v fazi, npr.:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \sin(\omega_x t) \\ y &= y_0 \sin(\omega_y t - \delta) \end{aligned} \quad (5.46)$$

Podoben primer smo obravnavali v poglavju ploskovno gibanje (str. 21), kjer smo sestavljali harmonični nihani z enako frekvenco ( $\omega_x = \omega_y = \omega$ ) in amplitudo ( $x_0 = y_0 = r$ ); eno nihanje je bilo sinusno, drugo kosinusno ( $\delta = \pi/2$ ). Videli smo, da je rezultat takšnega sestavljanja kroženje s polmerom  $r$ . Ta primer rešimo še enkrat, vendar v bolj splošni obliki: frekvenci sta enaki,  $\omega_x = \omega_y = \omega$ , amplitudi in fazi pa različni.

Da dobimo povezavo med koordinatama  $x$  in  $y$ , torej da dobimo enačbo tirnice  $y(x)$  za nastalo gibanje, izločimo čast  $t$ . Iz prve enačbe (5.46) izračunamo:  $\sin(\omega t) = x/x_0$  in vstavimo v drugo:

$$\begin{aligned} y &= y_0 \sin(\omega t) \cos(\delta) - y_0 \cos(\omega t) \sin(\delta) = \\ &= (y_0/x_0) x \cos(\delta) - y_0 \sin(\delta) \sqrt{1 - x^2/x_0^2} \quad \text{ali} \\ & (y/y_0)^2 + (x/x_0)^2 - 2(x/x_0)(y/y_0) \cos(\delta) = \sin^2(\delta) \end{aligned} \quad (5.47)$$

kar je enačba splošne elipse (slika 5.23). Pod vplivom dveh pravokotnih harmoničnih nihanj z enakima frekvencama se telo v splošnem giblje po elipsni tirnici; gibanje je periodično z obhodnim časom  $t_0 = 2\pi/\omega$ .

V posebnih primerih dobimo (gl. sliko 5.24):

$$\delta = 0 \quad \text{nihanje po premici } y = (y_0/x_0)x \quad (\text{slika 5.24a})$$

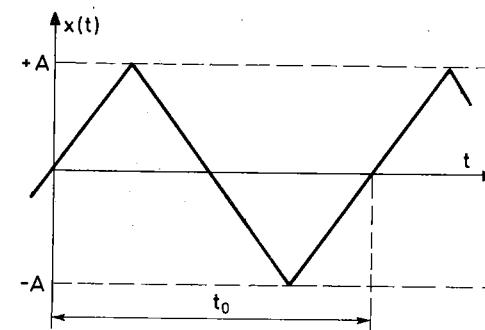
$$\delta = \pi/2 \quad \text{kroženje po elipsi } (y/y_0)^2 + (x/x_0)^2 = 1, \text{ katere glavni osi sovpadata s koordinatnima osema} \quad (\text{slika 5.24b})$$

$$\delta = \pi \quad \text{nihanje po premici } y = -(y_0/x_0)x \quad (\text{slika 5.24c})$$

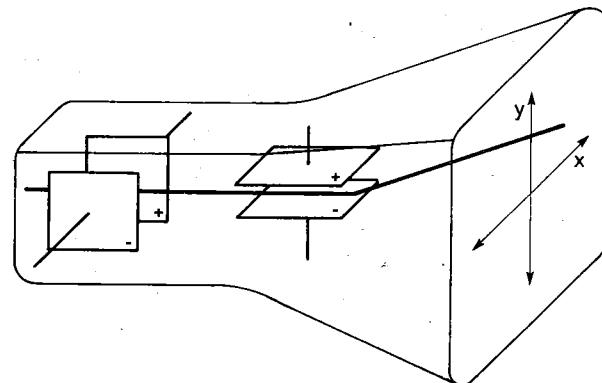
Če sestavljamo harmonična nihanja z različnima frekvencama (gl. 5.46), v splošnem ne dobimo več periodičnega gibanja. Gibanje je sicer omejeno na notranjost pravokotnika s stranicama  $2x_0$  in  $2y_0$ , vendar se tirnica gibanja spreminja s časom (ni stacionarna). To pomeni, da v splošnem ne moremo eliminirati časa in dobiti eksplicitno enačbo tirnice  $y(x)$ . Pokaže se, da dobimo periodično gibanje edinole, če sta frekvenci pravokotnih nihanj v razmerju celih števil,  $\omega_x : \omega_y = 1:2, 2:3, 7:5$  itd. ali v splošnem:

$$\omega_x = n\omega, \omega_y = m\omega \quad (5.47)$$

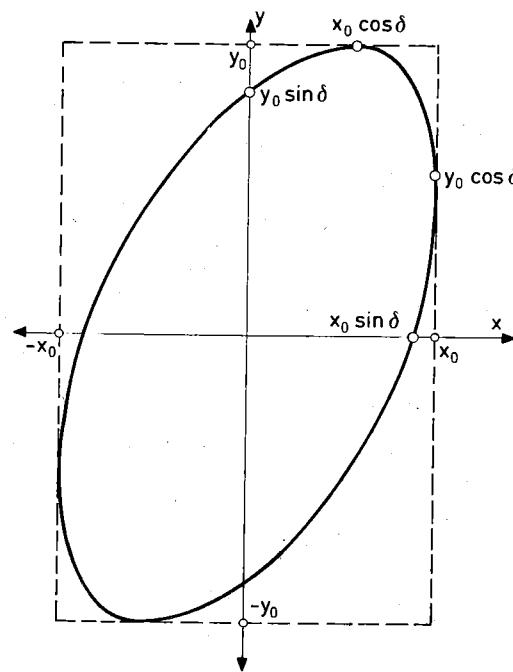
Kjer sta  $n$  in  $m$  celi števili, ki nimata skupnega faktorja.



Slika 5.21



Slika 5.22



Slika 5.23

Sestavljanje takšnih nihanj dà periodično gibanje, ki se ponavlja z obhodnim časom  $t_0 = 2\pi/\omega$  ( $\omega$  je največji skupni faktor frekvenc  $\omega_x$  in  $\omega_y$ ).

**Primera:**

1. Poišči enačbo krivulje, po kateri se periodično giblje telo pod vplivom dveh pravokotnih nihanj:  $x = x_0 \sin(\omega t)$  in  $y = y_0 \sin(2\omega t)$ . Kolikšen je obhodni čas?

$$\begin{aligned}y &= 2y_0 \sin(\omega t) \cos(\omega t) = 2y_0(x/x_0) \sqrt{1 - x^2/x_0^2} \text{ ali} \\y^2 &= 4y_0^2(x^2/x_0^2)(1 - x^2/x_0^2) \\t_0 &= 2\pi/\omega\end{aligned}$$

Graf te krivulje je na sliki (5.25a). Koordinata  $y$  doseže ekstremno vrednost  $\pm y_0$  za  $x = \pm x_0/\sqrt{2}$ .

**Naloga:** Reši ta primer, če je  $\delta = \pi/4$ . Graf rešitve je na sliki (5.25b).

2. Sestavimo nihanji  $x = x_0 \cos(2\omega t)$  in  $y = y_0 \sin(3\omega t)$ . Kakšno gibanje dobimo? Kolikšen je obhodni čas?

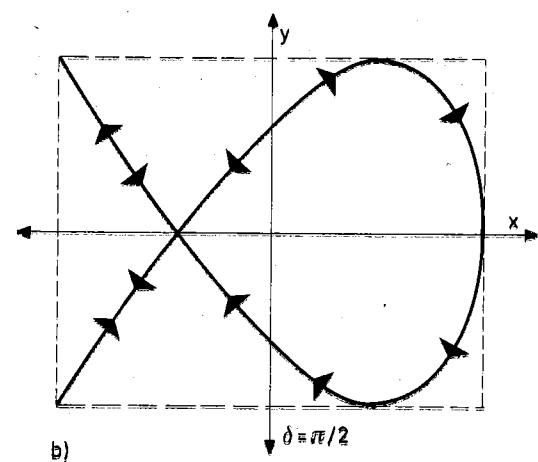
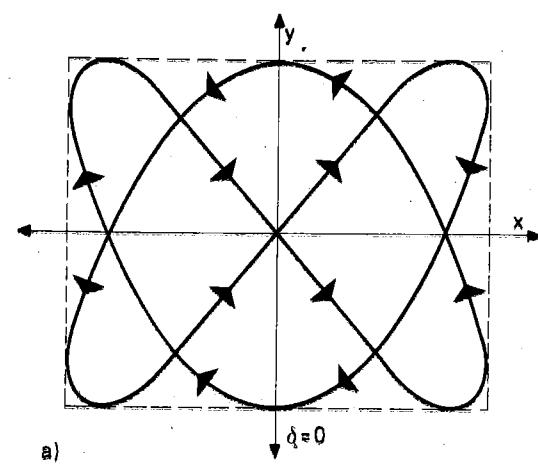
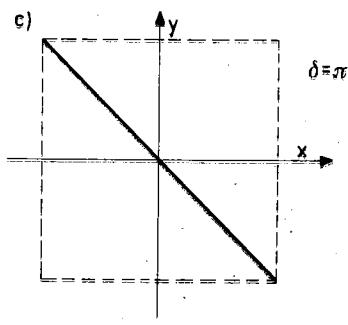
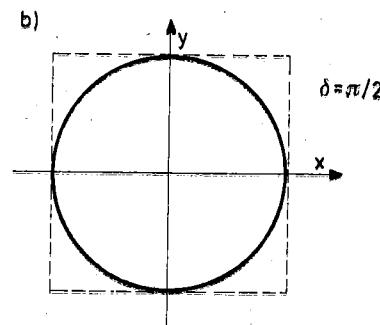
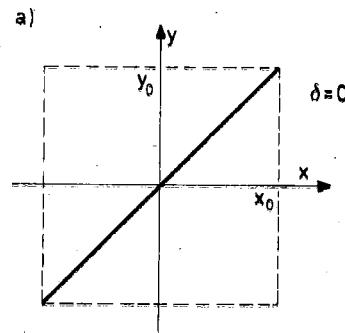
$$\begin{aligned}\frac{x}{x_0} &= \cos(2\omega t) = \cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t) \\ \cos(\omega t) &= \sqrt{(1 + x/x_0)/2}, \sin(\omega t) = \sqrt{(1 - x/x_0)/2} \\ \frac{y}{y_0} &= \sin(2\omega t + \omega t) = \sin(2\omega t)\cos(\omega t) + \\ &\quad \cos(2\omega t)\sin(\omega t) = \\ &\quad \sqrt{1 - x^2/x_0^2} \sqrt{(1 + x/x_0)/2} + (x/x_0) \sqrt{(1 - x/x_0)/2}\end{aligned}$$

Po kvadrirjanju dobimo:

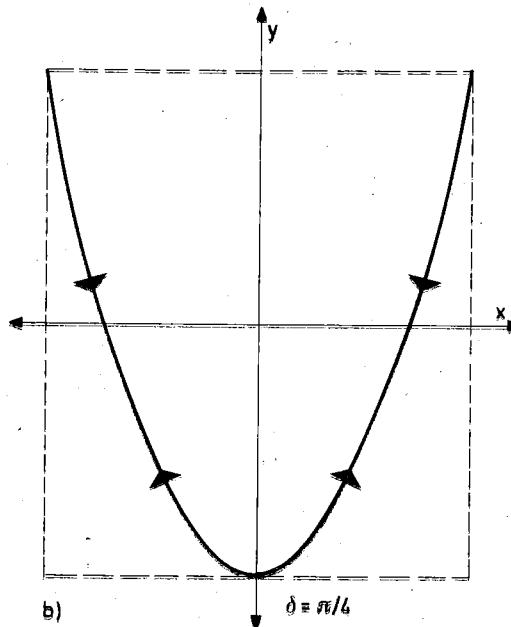
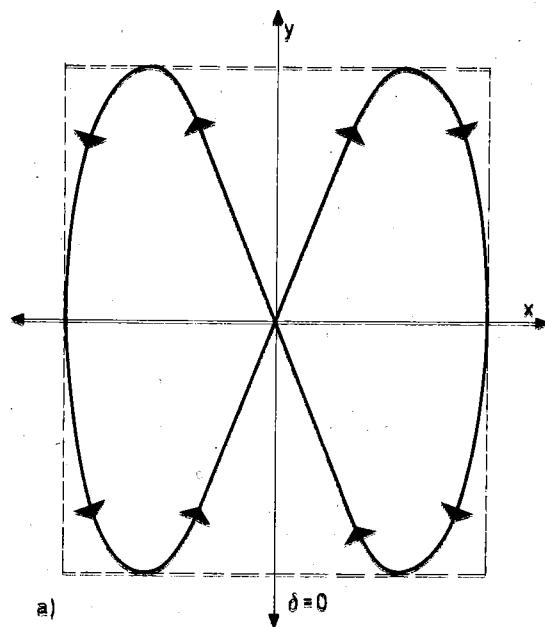
$$y^2/y_0^2 = 0,5(1 - x/x_0)(1 + 2x/x_0)^2$$

Graf te funkcije je na sliki (5.26b). Obhodni čas je  $t_0 = 2\pi/\omega$

**Naloga:** Poišči enačbo krivulje za primer, da sta zgoraj navedeni sočasni, to je za  $x = x_0 \sin(2\omega t)$  in  $y = y_0 \sin(3\omega t)$  (slika 5.26a).



Slika 5.24



Slika 5.25

O značilnostih snovi v posameznih agregatnih stanjih (ali fazah) smo razpravljali v poglavjih o zgradbi trdnin, kapljevin in plinov. Zdaj nas zanimajo termodinamski pojavi, ki spremljajo spremembe aggregatnega stanja snovi, to je pojavi ob faznih spremembah. Zanima nas, kako se topotno ali termodinamsko stanje snovi spremeni (npr. kako se spremeni notranja energija snovi), ko npr. kaplevina preide v plin (izpari), trdnina v kaplevino (se stali), ali v obratni smeri, ko plin preide v kaplevino (kondenzira, se utekočini) in kaplevina v trdnino (se strdi).

Značilno za te pojave je, da se **temperatura snovi ne spremeni** (fazna sprememba je **izotermni proces**). Ob fazni spremembi se predvsem **spremeni zgradba snovi**, s čimer je povezana sprememba potencialne energije molekul. Ob izparitvi kaplevine se npr. molekule razbeže v plinsko stanje, volumen snovi se močno poveča (poveča se povprečna razdalja med molekulami) in poviša se potencialna energija molekul zaradi medmolekularnih sil (gl. slika 7.1). Sledi, da se med izparitvijo kaplevine ob nespremenjeni temperaturi **poveča notranja energija snovi**.

Stalitev trdnine in izparitev kaplevine pomeni povečanje notranje energije snovi. Tovrstne spremembe so zato možne le, če dovedemo topoto, ki krije povečanje notranje energije snovi. V ta namen dovedena topota (npr. talilna topota, izparilna topota) se običajno imenuje **latentna topota** (ker se naloži v potencialni del notranje energije snovi in se ne demonstrira navzven s povišano temperaturo). Pri obratni fazni spremembi (npr. pri utekočinjenju plina, strditvi kaplevine) se notranja energija snovi zmanjša in snov odda latentno topoto (kondenzacijsko, strjevalno topoto).

Fazne spremembe snovi izkorisčamo tudi za skladiščenje topote.

Osnovne značilnosti prehajanja kaplevine v plinsko stanje si najprej oglejmo v molekularni sliki hlapenja.

### Hlapenje

Kaplevina prehaja v plinasto stanje ne le z vrenjem pri vrelišču, temveč tudi s hlapenjem pri poljubni temperaturi. Hlapenje se razlikuje od vrenja predvsem v tem, da je manj burno in da se dogaja le na prosti gladini kaplevine, vrenje pa poteka po njeni celotni notranosti.

Voda v odprttem kozarcu hlapí, mokro perilo se suši s hlapenjem, enako vlažna zemlja. Hlapenje je posebno izrazito, če ima prosta gladino veliko površino in če je zrak nad kaplevino suh (da ne vsebuje hlapov kaplevine). Poleg tega je pri višji temperaturi intenzivnejše.

V kaplevini so molekule močno zgošcene. Kljub intenzivnemu termičnemu gibanju se molekule ne razbeže, ker jih medmolekularne sile drže v kupu. Zaradi pogostih trkov med termičnim gibanjem se kinetična energija posamičnih molekul nekontrolirano in skokovito spreminja (povečuje ali zmanjšuje). Zato se zgodi, da nekatere molekule s površja kaplevine slučajno premejo ob trku dovolj veliko kinetično energijo v smeri ven iz kaplevine, da premagajo privlačnost ostalih kaplevinskih molekul, zapustijo kaplevino in se »preselijo« v plinsko stanje. Izhlapijo predvsem molekule z veliko kinetično energijo. Teh je pri višji temperaturi več.

## 9. FAZNE SPREMEMBE

Če je nad kapljevino zaprt prostor, se zaradi izhlapevanja povečuje delni tlak ( $p_v$ ) kapljevinske pare v zraku nad kapljevino. Izhlapele molekule pohajkujejo med drugimi plinskim (predvsem zračnimi) molekulami in termično trkajo, bodisi z molekulami lastne vrste ali z drugimi. Po nekaj trkih se zgodi, da izhlapela molekula spet zaide nazaj v kapljevino (kjer jo zajamejo kapljevinske molekule). Število vračajočih se molekul je sorazmerno z gostoto izhlapelih molekul v ozračju nad kapljevino, to je z delnim tlakom  $p_v$  kapljevinske pare. Bolj ko izhlapevanje napreduje, bolj se povečuje število vračajočih se molekul. Slepko prej se zato doseže **stacionarno stanje**, ko se **število** (v enoti časa) **izhlapelih molekul izenači s številom** (v enakem času) **vračajočih se molekul**; tedaj se izhlapevanje navzven ustavi (čeprav molekule še vedno burno prehajajo iz enega stanja v drugo).

Seveda se izhlapevanje nemoteno nadaljuje, če je nad kapljevino odprt prostor, tako da se izhlapele molekule razbeže v okolico (posebno če piha veter). Tu in tam se izhlapevanje ustavi tudi v odprtem prostoru, npr. ob temperaturni inverziji, ko nad gladino kapljevine »leži« mirujoč hladni zrak, ki se nasiti z vlagom.

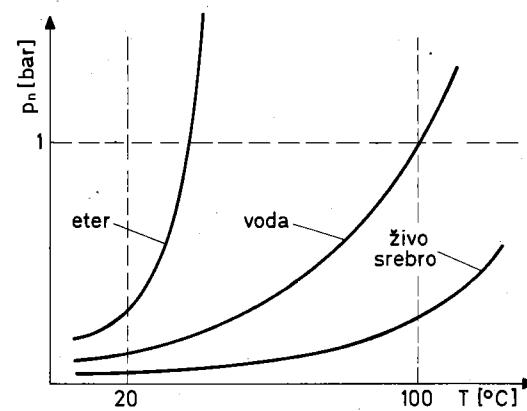
Delni tlak pare nad kapljevino v ravnovesnem stanju, ko se izhlapevanje ustavi, se imenuje **nasičeni parni tlak kapljevine** ( $p_n$ ). Ta je tem večji, čim višja je temperatura. Za vsako kapljevino posebej ugotovimo, kolik je njen nasičeni parni tlak pri različnih temperaturah (gl. slika 9.1 in tabelo za vodo na koncu knjige). Kapljevine, ki imajo pri običajnih temperaturah **velik nasičeni parni tlak**, so zelo **hlapljive**, npr. eter (okrog 130 mbar pri 20 °C), alkohol (30 mbar) itd. Slabo hlapljive kapljevine pa imajo nizek nasičeni parni tlak, npr. voda le 23 mbar (pri 20 °C), živo srebro celo 0,0016 mbar. (Slika 9.1)

Hlapijo predvsem najhitrejše molekule s površja kapljevine. Torej se zaradi hlapenja zmanjšuje povprečna kinetična energija preostalih molekul v kapljevini, kar pomeni, da se kapljevina s hlapenjem ohlaja. Če mokri stojimo na vetru, nas zebe. Veter odnaša izhlapelo vлагo in zato pospešuje hlapenje. Tekočina, shranjena v poroznih lončenih posodah, ostane v suhem vročem vremenu kolikor toliko hladna, ker prodira (kapilarno) skozi pore v steni posode, s čimer se njenova površina povečuje in povečuje se tudi njen hlapenje, ki jo ohlaja. Steklenica, ovita v moker papir, ostane prijetno hladna. Okopavanje zbitje zemlje preprečuje kapilarno pronicanje vode in njen izhlapevanje. Z etrom namazana koža se zaradi močnega izhlapevanja etra ohlaja in postane tako manj občutljiva.

### Vlažnost zraka

Zaradi hlapenja vode v oceanih, jezerih, rastlinskih listih itd. je v ozračju vedno nekaj vlage (vodne pare), zrak je bolj ali manj vlažen. **Množino vlage** v zraku (t.i. **absolutno vlažnost**) povemo ali z delnim tlakom ( $p_v$ ) vodne pare v zraku ali z **gostoto vlage** ( $\rho_v$ ), to je z maso vodne pare v  $m^3$  zraka. Ti količini sta medsebojno povezani z enačbo stanja. Če v prvem približku vzamemo, da se vodna para obnaša kot idealen plin, lahko uporabimo enačbo (8.23):

$$p_v / \rho_v = RT / (Mkg) \quad (9.1)$$



Slika 9.1

Absolutno vlažnost zraka izmerimo s pomočjo higroskopične snovi (npr.  $\text{CaCl}_2$ ,  $\text{P}_2\text{O}_5$  itd.). Vzorec merjenega zraka zapremo skupaj s stehtano množino higroskopične snovi v merilno posodo. Snov posrka vlago iz zraka. Razlika v teži higroskopične snovi pred meritvijo in po njej je teža vlage v merjenem zraku.

Voda tem močneje (hitreje) hlapi v zrak, čim bolj se delni tlak vodne pare v zraku ( $p_v$ ) razlikuje od nasičenega parnega tlaka ( $p_n$ ) pri dani temperaturi. Zaradi tega je bolj kot absolutna vlažnost pomembna t.i. **relativna vlažnost** ( $\eta$ ), ki je definirana s količnikom:

$$\eta = p_v/p_n \quad (\text{v \%}) \quad (9.2)$$

Relativna vlažnost 100% ( $p_v = p_n$ ) pomeni, da je zrak nasičeno vlažen (hlapanje se ustavi). Za  $\eta < 100\%$  je zrak še nenasičen z vlago in voda še izhlapeva (tem bolj, čim manjša je relativna vlažnost). Medtem ko je zrak z  $\eta > 100\%$  prenasičen z vlago; višek vodne pare kondenzira v vodne kapljice.

Človek se najugodnejše počuti v prostoru z relativno vlažnostjo 50–60%. Premajhna vlažnost zraka povzroča premočno izhlapevanje vlage s kože in s tem prehitro dehidracijo. Prevelika pa preveč zadržuje naravno dihanje kože, ki je povezano s hlapanjem (znojenjem).

Ker se nasičeni parni tlak manjša, če temperatura pada (hladnejši zrak obdrži manj vlage), se zgodi, da se prvotno nenasičeni zrak prenasiti z vlago, če ga dovolj ohladimo (pri višji temperaturi je npr.  $p_v < p_n$ , v ohlajenem zraku pa je lahko  $p_v > p_n$ ). **Vлага v močno ohlajenem zraku se zato kondenzira.** To se npr. zgodi v jutranjih urah, ko nastane rosa, slana itd. Vroč in vlažen zrak iz ust se v hladnem zraku orosi. Vlažen zrak, dvigajoč se ob pobočjih gora, se zaradi manjšega tlaka razteza in ohlaja; na neki višini se dovolj ohladi, da se prenasiti z vlago, ki jo nosi s seboj – nastane oblaci venec. Na notranjih stenah zidov, ki mejijo na zunanj zrak, opazimo (pozimi) na ometu potemnjene križaste sledi malte med zidaki. Malta je namreč boljši prevodnik topote kot zidaki, zato skoznjo uhaja v okolico večja gostota topotnega toka (malta je t.i. **topotni most**) in je zato omet ob malti hladnejši kot ob zidakih. Hladnejši je tudi notranji zrak tik ob steni. Če je ta dovolj vlažen (veliko ljudi v prostoru), se zgodi, da je ob malti prenasičen z vlago in se zato tam naberejo drobne vodne kapljice (skupaj s prahom). Podobne potemnjene sledi opazimo tudi na modernih prometnih znakih (na sprednji strani se vidi »silhueta« nosilnega ogrodja z zadnje strani prometnega znaka); razlaga tega pojave se dotika tudi optičnih pojavorov (gl. III. del, poglavje o odboju svetlobe).

Kondenzacijo vodne pare med ohladitvijo zraka izkoristimo za **merjenje relativne vlažnosti**. Posrebreno steklo bučko termometra v merjenem zraku počasi ohlajamo; izmerimo temperaturo (t. rosišče), pri kateri opazimo na bučki prve rosne kapljice. Tedaj je merjeni delni tlak vodne pare ( $p_v$ ) enak nasičenemu parnemu tlaku pri temperaturi rosišča (tega odčitamo iz tabel).

### Primer:

Kolikšna je relativna vlažnost zraka pri temperaturi 20 °C, če je rosišče pri temperaturi 8 °C? Nasičeni parni tlak vode pri 20 °C je 23,4 mbar, pri 8 °C pa 10,7 mbar.

$$p_n = 23,4 \text{ mbar}, \quad p_v = 10,7 \text{ mbar} \\ \eta = p_v/p_n = 10,7/23,4 = 0,46 = 46\%$$

Relativno vlažnost lahko določimo tudi posredno, izkorisčajoč dejstvo, da so lastnosti nekaterih snovi odvisne od vlažnosti. Tako npr. vlažen les nabrekne, lasje se z navlažitvijo podaljšajo. S poskušanjem so ugotovili, da je podaljšek napetega lasu precej natančno premo sorazmeren z relativno vlažnostjo zraka. To lastnost človeških las izkorisčamo pri merilcih relativne vlažnosti – **higrometrih** (seveda jih je treba predhodno umeriti).

### Izoterme realnih plinov – kritična temperatura

Izoterme (to je grafe odvisnosti tlaka od prostornine pri stalni temperaturi) idealnih plinov smo obravnavali na strani 188:  $p = NkT/V$  (enoose hiperbole). Za realne pline so te odvisnosti prav gotovo bolj zapletene. Namesto enačbe stanja idealnih plinov uporabimo npr. Van der Waalsovo enačbo (8.24):  $(p + aN^2/V^2)(V - Nb) = NkT$ , s katero vsaj približno upoštevamo medmolekularne sile in lastno prostornino molekul. Poleg te enačbe uporabljamo še druge podobne, ki morda natančneje opisujejo obnašanje realnih plinov v posameznih temperturnih območjih, vendar je Van der Waalsova enačba dovolj splošna, da lahko z njeno pomočjo raziščemo glavne značilnosti realnih plinov.

Van der Waalsovo enačbo najprej prepisemo v polinom tretje stopnje v prostornini  $V$ :

$$pV^3 - (pb + kT)NV^2 + aN^2V - abN^3 = 0$$

Za dan tlak  $p$  (in za dano temperaturo  $T$ ) dobimo za prostornino  $V$  v splošnem tri različne vrednosti (ki so lahko vse realne, ali pa dve kompleksni in ena realna). Zaradi tega imajo izoterme Van der Waalsovega plina (to je plina, ki se pokorava Van der Waalsovi enačbi) značilno kolenasto obliko (slika 9.2). Kolenasta zakrivljenost izoterme je tem manj izrazita, čim višja je temperatura. Izoterme z visokimi temperaturami so podobne izotermam idealnih plinov.

Van der Waalsove izoterme prav gotovo ne popisujejo pravilno obnašanja realnega plina v območjih, kjer recimo napovedujejo negativne tlake ali da se tlak plina med stiskanjem zmanjšuje (črtkano obrnčje na sliki 9.2, kjer je  $dp/dV > 0$ ). Možna so namreč le takšna stanja realnega plina, za katera je  $dp/dV \leq 0$  (pozitivna stisljivost), to pomeni, da tlak plina med raztezanjem pada, med stiskanjem pa narašča, ali pa je kvečjemu stalen.

Poglejmo, kako se z ugotovitvami Van der Waalsove enačbe ujemajo eksperimentalni rezultati. Plin zapremo v valj s premičnim batom. Plin stiskamo s pomikanjem bata in obenem merimo njegovo temperaturo ter tlak. Z ustreznim ohlajanjem skrbimo, da je temperatura kljub stiskanju stalna (npr.  $T_1$ ). Plin npr. začnemo stiskati v točki 1 (slika 9.3). Opazimo, da tlak

plina med stiskanjem pri stalni temperaturi  $T_1$  enakomerno narašča, kot to predvideva tudi Van der Waalsova enačba, vendar le do točke 2, nakar je tlak kljub stiskanju stalen (po enačbi bi moral še naprej naraščati in nato upadati – črtkana krivulja na sliki 9.3). Tlak ne narašča zato, ker se plin začne zgoščevati v kapljevinu. Plinu v točki 2, kjer se začne zgoščevanje (kondenzacija), pravimo **nasičena para**. Tlak nasičene pare je **nasičeni parni tlak** ( $p_n$ ). Če nasičeno paro stisnemo pri stalni temperaturi, se para začne zgoščevati pri stalnem tlaku. Tlak mešanice para-kapljevina je kljub stiskanju stalen vse dotlej, dokler se vsa para ne kondenzira v kapljevinu (točka 3 na sliki 9.3) in nastane t. i. **vrela kapljevina**. Nasičena para in vrela kapljevina imata enak tlak in enako temperaturo, razlikujeta pa se v gostoti (vrela kapljevina je veliko bolj gosta kot nasičena para). Če vrelo kapljevino še naprej izotermno stiskamo, njen tlak močno naraste (tudi po napovedi Van der Waalsove enačbe).

Vidimo, da Van der Waalsova enačba razmeroma dobro popisuje spremenjanje tlaka s prostornino za plin in kapljevinijo posebej, da pa odpove pri mešanici plinaste in kapljevinske faze. Podrobnejše teoretsko obravnavanje pokaže, da je lega točk 2 in 3 (pri dani temperaturi  $T_1$ ) določena s pogojem, da sta ploščini zakrivilih delov Van der Waalsove izoterme nad ravним delom prave izoterme in pod njim enaki. Ta pogoj torej tudi določa velikost nasičenega parnega tlaka pri dani temperaturi.

Podoben potek izoterm realnih plinov dobimo tudi pri višjih temperaturah. Pokaže se, da nasičeni parni tlak raste s temperaturo in da je ravni del izoterme (kjer obstaja zmes pare in kapljevine) tem krajsi, čim višja je temperatura izoterme. Torej se razlika med gostotama vrele kapljevine in nasičene pare z višjo temperaturo manjša. Pri dovolj visoki temperaturi (t. i. **kritični temperaturi**  $T_k$ ) se ravni del izoterme zmanjša v točko, kar pomeni, da se gostota vrele kapljevine izenači z gostoto nasičene pare in plin zvezno preide v kapljevinu (brez spremembe gostote).

Točka  $K$  v grafu  $p(V)$  (slika 9.3), v kateri plin zvezno preide v kapljevinu, se imenuje **kritična točka**. Izoterma skozi kritično točko (to je s temperaturo  $T_k$ ) je **kritična izoterna**. Ta ima v kritični točki vodoravno tangento:

$$\frac{dp}{dV} = 0 \quad \text{za } V = V_k \text{ in } T = T_k \quad (9.3)$$

Ker kritična izoterna v kritični točki nima ekstrema, je tam tudi drugi odvod tlaka po prostornini enak nič:

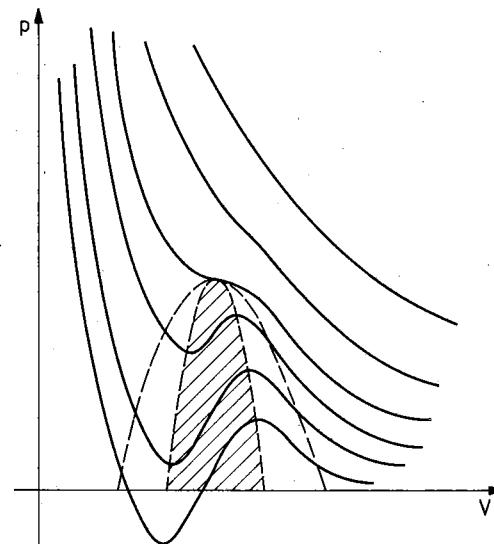
$$\frac{d^2p}{dV^2} = 0 \quad \text{za } V = V_k \text{ in } T = T_k \quad (9.4)$$

Dobljena pogoja (9.3,4) določata lego kritične točke  $K$  v grafu  $p(V)$ , ki jo navadno podamo s kritično temperaturo  $T_k$  in kritičnim tlakom  $p_k$ .

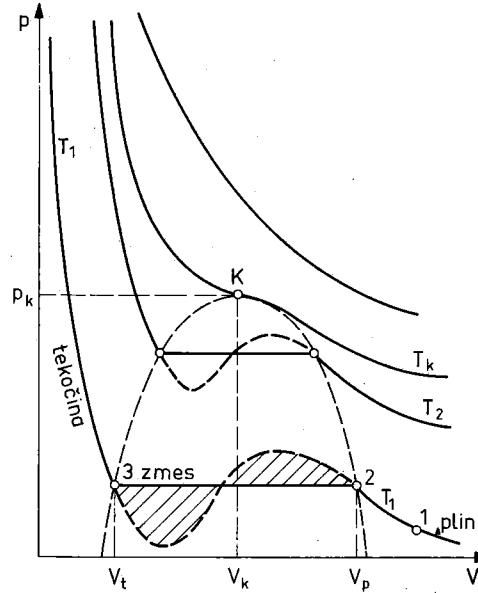
### Primer:

Poišči kritično točko za Van der Waalsov plin. Kritične količine  $T_k$ ,  $p_k$  in  $V_k$  izrazi z Van der Waalsovima konstantama  $a$  in  $b$ .

$$\begin{aligned} p &= NkT/(V - Nb) - aN^2/V^2 \\ \frac{dp}{dV} &= -NkT(V - Nb)^{-2} + 2aN^2V^{-3} \\ \frac{d^2p}{dV^2} &= 2NkT(V - Nb)^{-3} - 6aN^2V^{-4} \end{aligned}$$



Slika 9.2



Slika 9.3

Upoštevajoč enačbi (9.3,4), dobimo  $2N^2aV_k^3 = NkT_k$  ( $V_k - Nb$ )<sup>-2</sup> ter  $3N^2aV_k^4 = NkT_k(V_k - Nb)^{-3}$ , od koder izračunamo:

$$V_k = 3Nb \quad \text{ter} \quad T_k = 8a/(27bk)$$

Dobljena  $V_k$  in  $T_k$  vstavimo v Van der Waalsovo enačbo in dobimo še kritični tlak:

$$p_k = a/(27b^2)$$

Kritične parametre danega realnega plina ( $p_k$ ,  $V_k$  in  $T_k$ ) izmerimo in tako določimo Van der Waalsovi konstanti plina:

$$b = kT_k/(8p_k) \quad \text{ter} \quad a = 27K^2T_k^2/(64p_k)$$

Plin, ohlajen pod kritično temperaturo, se imenuje **para**. Paro lahko z izotermnim stiskanjem utekočimo. Plina, ki je segret nad kritično temperaturo, pa ne moremo kondenzirati v kapljevinu, četudi ga stiskamo s še tako velikim tlakom. Izoterme realnih plinov za temperature, ki so velike v primerjavi s kritično temperaturo ( $T \gg T_k$ ), so podobne izotermam idealnih plinov. Realen plin je torej podoben idealnemu, če je njegova temperatura velika v primerjavi s kritično. Takšni plini so npr. helij, vodik, kisik itd., ki jih pri navadnih temperaturah lahko obravnavamo kot idealne.

## Vrenje in kondenzacija

Bistveno za vrenje je, da nastajajo mehurčki pare v notranosti kapljevine. Kapljevina običajno vsebuje tuje delce, npr. prašne, ki jih ne moči (gl. str. 152), kar pomeni, da se ne dotika povsem njihove površine. Med prašnimi delci in kapljevinu so torej mikroskopska območja, v katera kapljevina hlapi (podobno kot hlapi s površja v okolni zrak), tako da nastajajo mehurčki pare, katere tlak je enak nasičenemu parnemu tlaku pri temperaturi kapljevine. Ker ima nastala para večji volumen kot kapljevina (iz katere para nastane), se ob nastanku parnega mehurčka kapljevina razrine. Temu nasprotuje tlak  $p$  v obdajajoči kapljevini (ta je enak vsoti zunanjega zračnega tlaka  $p_0$ , ki pritiska na gladino kapljevine, in hidrostatskega tlaka same kapljevine (slika 9.4). Če je tlak p kapljevine večji od tlaka  $p_n$  pare v mehurčku, se mehurček ne more razrasti in takoj splahne. **Vrenje se prične**, ko je kapljevina segreta na dovolj visoko temperaturo, da je **nasičeni parni tlak  $p_n$  kapljevine** (ki narašča s temperaturo), **večji od zunanjega tlaka**. Ko se parni mehurčki razrastejo, se zaradi vzgona dvignejo h gladini kapljevine. Med dviganjem prehajajo skozi zgornje, hladnejše plasti (če kapljevina še ni dovolj segreta) in splahnevajo. Zvočni šum, ki nastaja ob splahnevjanju parnih mehurčkov, je značilen za kapljevinu tik pred vrenjem. Ko ta šum utihne (to je ko mehurčki več ne splahnevajo), se začne pravo vrenje (dokler mleko na štedilniku šumi, še ne vre; vrenje se začne, ko šumenje preneha).

Mehurčki pare ne nastajajo le ob prašnih in drugih delcih v kapljevini, ampak tudi ob dnu in steni posode, saj je ta v mikroskopskem merilu dokaj hrapava, z jamicami, v katerih se začne nabirati para. Zametki

parnih mehurčkov se lahko pojavi v kapljevini celo zaradi statistično neurejenega termičnega gibanja molekul kapljevine.

## Vrelische

Obstojnost posameznih faz ali agregatnih stanj (npr. kapljevinske oziroma plinske faze) ter pogoje, pri katerih se izvrši fazna spremembra (npr. vrenje ali kondenzacija), pregledno prikažemo s t.i. **faznim diagramom**; na eno koordinatno os nanašamo tlak ( $p$ ) v snovi, na drugo pa temperaturo ( $T$ ) (slika 9.5). V diagramu narišemo graf odvisnosti nasičenega parnega tlaka  $p_n$  od temperature (zvlečena črta).

Izotermno stiskanje plina (slika 9.3) predstavimo v faznem diagramu z navpično črto (npr. črtkana črta pri temperaturi  $T_v$ ). Plin z velikim volumenom (in majhnim tlakom) stiskamo pri stalni temperaturi  $T_v$ . Tlak plina narašča do vrednosti  $p_n$  (dosežemo krivuljo nasičenega parnega tlaka); tedaj se ustali in plin se med nadaljnje stiskanje kondenzira. Šele ko je ves plin kondenziran v kapljevinu, se tlak (tokrat v kapljevini) spet povišuje. Podoben poskus napravimo pri različnih temperaturah. Vidimo, da plinska faza obstaja v območju pod krivuljo nasičenega parnega tlaka, to je za  $p < p_n$ , kapljevinska faza pa je obstojna v zgornjem območju, za  $p > p_n$ . Vzdolž krivulje (za  $p = p_n$ ) pa imamo zmes kapljevinske in plinske faze. **Tlak zmesi kapljevinske in plinaste faze je enak nasičenemu parnemu tlaku** (ta je seveda odvisen od temperature).

Fazni diagram na sliki (9.5) prekoračimo še v vodoravni smeri. Pri stalnem tlaku  $p$  spremenjamo temperaturo (npr. z dovajanjem toplote). Zaradi pritekajoče toplote se temperatura kapljevine povišuje, vendar le do krivulje nasičenega parnega tlaka, to je do temperature  $T_v$ , pri kateri je  $p = p_n$ . Tedaj se kapljevina začne uparjati (pri stalni temperaturi  $T_v$ ). Dovedena toplota se porablja za izparevanje. Temperatura je kljub dovajjanju toplote stalna toliko časa, dokler vsa kapljevina ne izpari. Šele nato, ko imamo le plinasto fazo, se temperatura spet povišuje. Pri stalnem tlaku torej velja:

$T < T_v$	kapljevinska faza
$T = T_v$	zmes kapljevinske in plinske faze
$T > T_v$	plinasta faza

Temperatura  $T_v$ , pri kateri sta **kapljevinska in plinasta faza v ravnovesju** (obstajata v zmesi), pri kateri je torej **tlak enak nasičenemu parnemu tlaku** ( $p = p_n$ ), se imenuje **vrelische kapljevine**. Pri danem tlaku je kapljevinska faza možna le, če je kapljevina ohlajena pod vrelischem, in plinasta, če je temperatura nad vrelischem. **Temperatura zmesi kapljevinske in plinaste faze je enaka vrelischu** (pri danem tlaku).

Odvisnost nasičenega parnega tlaka od temperature (zvlečena črta  $p = p_n$  v faznem diagramu na sliki 9.5) interpretiramo tudi kot odvisnost vrelische od tlaka. **Vrelische narašča s tlakom**. Čim večji je tlak nad kapljevinom, tem višja mora biti temperatura, da kapljevina vre. Nasprotno se vrelische kapljevine zniža, če se tlak nad kapljevinom zmanjša. Tako je vrelische vode pri tlaku 1 bar (npr. na morski gladini) 100 °C, na višini Triglava (kjer je tlak okrog 0,75 bar) pa le 90 °C. Če se tlak nad vodo zmanjša na 12 mbar, se vrelische zniža celo do 10 °C.

Nižanje vreliča s padanjem tlaka lepo ilustrira poskus. Odprto stekleno bučo z vodo segrevamo s plamenom. Ko začne voda vreti, odstranimo plamen in bučko zapremo. Čez nekaj časa voda v bučki preneha vreti; temperatura je  $100^{\circ}\text{C}$  in tlak v bučki je okrog 1 bar, ki je pretežno tlak nasičene pare (nastala para je izrinila večino zraka iz bučke). Nato tlak pare v bučki nenašoma zmanjšamo (bučko npr. priključimo na črpalko, ki izsesa paro iz nje, ali bučko polijemo s hladno vodo, da se nasičena para kondenzira v kapljice, slika 9.6) in voda začne spet burno vreti, kajti segreta je ( $100^{\circ}\text{C}$ ) nad vreličem pri novem, zmanjšanem tlaku v bučki. Toplotno, potrebno za vrenje, črpa iz lastne notranje energije, zato se ohlaja. Vrenje se ustavi, ko se ohladi do vreliča pri novem tlaku v bučki. Ponovno zmanjšanje tlaka sproži novo vrenje itd.

### Izparilna toplota

Iz srednje šole se spominjamo grafa, ki prikazuje spremenjanje temperature snovi med dovajanjem toplote  $Q$  (slika 9.7), to je med vodoravnim prečkanjem faznega diagrama na sliki (9.5). Temperatura kapljivine je pri stalni specifični toploti  $c_p$  linearno odvisna od toplote  $Q$  (gl. 8.54):  $Q = mc_p(T - T_0)$  ali  $T = T_0 + Q/mc_p$ . Ko temperatura doseže vreliče  $T_v$ , se ustali in ostane stalna vse dotedaj, dokler ne dovedemo celotne **izparilne toplote**  $Q_i = mq_i$ , ki je potrebna za izparitev kapljivine z maso  $m$ . Nato se temperatura nastale pare povišuje linearno z dovedeno toploto (le da bolj strmo kot pri kapljivini, ker je specifična toplota pare manjša). **Specifična izparilna toplota ( $q_i$ ) je toplota, ki izpari pri vreliču 1 kg kapljivine.** Za vodo je npr.  $q_i = 0,63 \text{ kWh/kg} (= 540 \text{ kcal/kg})$ .

Med obratnim prehodom, ko paro z odvzemanjem toplote ohlajamo, se para pri vreliču  $T_v$  začne kondenzirati. Kljub odvajanju toplote je temperatura stalna ( $T_v$ ) toliko časa, dokler vsa para ne kondenzira v kapljivino. Med kondenzacijo oddana toplota (t. i. **kondenzacijska toplota**) je enaka izparilni toploti.

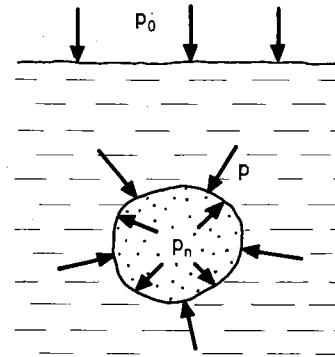
Če se opečemo z nasičeno paro  $100^{\circ}\text{C}$ , je mnogo bolj nevarno, kot če se opečemo z veliko vodo  $100^{\circ}\text{C}$  (kljub enaki temperaturi). V prvem primeru se namreč sprošča še precejšnja kondenzacijska toplota, ki nas dodatno opeče.

**Izparilna toplota**  $Q_i$ , ki se porabi za izotermni prehod iz kapljivinskega stanja v plinasto, **se deloma naloži v povečano notranjo energijo snovi** (poveča se predvsem njen potencialni del v zvezi s spremembom zgradbe snovi), deloma pa krije **delo**, ki se opravi med **povečanjem prostornine snovi** zaradi vrenja. Para ima namreč precej večjo prostornino ( $V_p$ ) kot kapljivina ( $V_t$ ), iz katere nastane (gl. slika 9.3). Iz energijskega zakona termodinamike (8.48) dobimo, da se notranja energija snovi z vrenjem poveča za:

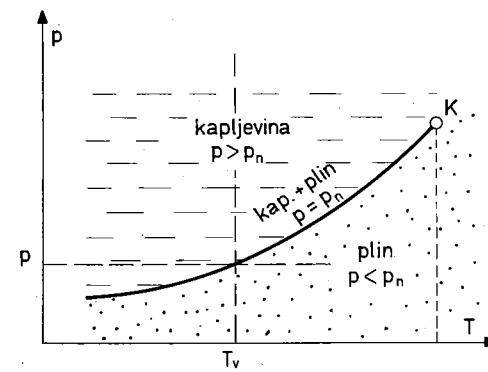
$$\Delta W_n = Q + A = Q_i - p(V_p - V_t)$$

**Primer:** Izračunaj spremembo notranje energije 1 kg vode, če ta pri  $100^{\circ}\text{C}$  zavre v paro. Specifična izparilna toplota vode je  $q_i = 0,63 \text{ kWh/kg}$ , tlak je  $p = 1 \text{ bar}$ .

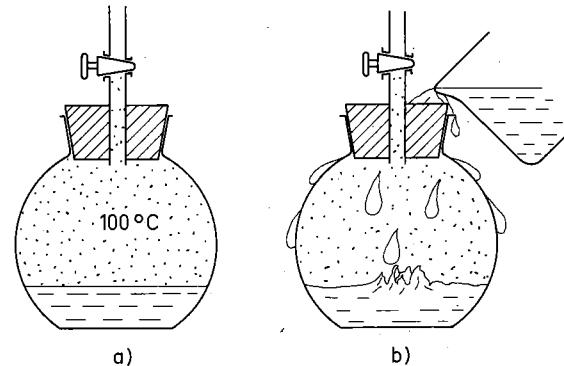
Volumen nastale pare smo izračunali v primeru na strani 186:  $V_p = 1,6 \text{ m}^3$ . Vidimo, da lahko v primerjavi z njim zanemarimo volumen vode ( $V_t = 1 \text{ dm}^3$ ).



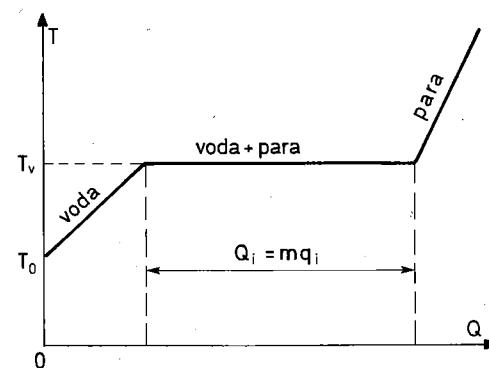
Slika 9.4



Slika 9.5



Slika 9.6



Slika 9.7

$$W_n = 0,63 \text{ kWh} - 1,6 \cdot 10^5 \text{ J} = 0,63 \text{ kWh} - 0,05 \text{ kWh} = 0,58 \text{ kWh}$$

**Izparilna toplota** je odvisna od temperature, in sicer se z višjo temperaturo manjša. S slike (9.3) je razvidno, da je razlika v prostornini pare in kapljivine ( $V_p - V_t$ , ravni del izoterme realnih plinov) pri višji temperaturi manjša. Torej nastala para potroši pri višji temperaturi manj dela ob raztegnitvi, obenem se tudi potencialna energija molekul snovi manj poveča (ker se manj poveča povprečna razdalja med njimi). Pri kritični temperaturi se izparilna toplota celo povsem izgubi ( $q_i = 0$  pri  $T = T_k$ ), kar pomeni, da je fazna sprememba v kritičnem stanju spontana (brez porabe energije). Kot primer navedimo, da je specifična izparilna toplota vode pri 0 °C enaka 0,693 kWh/kg, pri 100 °C 0,630 kWh/kg, pri 180 °C 0,557 kWh/kg in pri 374 °C 0 kWh/kg.

### Primeri:

1. Električni grelec z močjo 2 kW potopimo v 6 litrov vode, ki ima temperaturo 20 °C. Kaj dobimo in kolikšna je temperatura, če grelec gori 30 min in če se za segrevanje vode porabi 80% potrošenega električnega dela grelca?

Sprosti se toplota:

$$Q = \eta A = \eta P t = 0,8 \cdot 2 \text{ kW} \cdot 0,5 \text{ h} = 0,8 \text{ kWh}$$

Za segretje 6 kg vode z 20 °C na 100 °C se potroši toplota  $m c_p \Delta T = 6 \text{ kg} \cdot (7/6)(\text{Wh/kgK}) \cdot 80 \text{ K} = 560 \text{ Wh} = 0,56 \text{ kWh}$ . Preostalih 0,24 kWh toplotne izpari  $0,24/0,63 \text{ kg} = 0,38 \text{ kg}$  vode v paro 100 °C.

Dobimo 0,38 kg nasičene pare in 5,62 kg vrele vode, oboje pri 100 °C.

2. 10 litrov ledeno mrzle vode (0 °C) vlijemo v posodo, v kateri je 0,5 kg nasičene pare s temperaturo 100 °C. Kolikšna je končna temperatura, če se nič toplotne ne izmenja z okolico?

Ker je pare malo, mrzle vode pa veliko, se vsa para kondenzira in dobimo vodo s temperaturo  $T$ . Toplotna, ki se sprosti, ko se para kondenzira in ko se iz nje nastala vredna voda ohladi od  $T_v$  do  $T$ , se porabi za segretje vode hladne od  $T_t = 0$  °C do  $T$ :

$$m_p q_i + m_p c(T_v - T) = m_v c(T - T_t)$$

Tu je  $c = (7/6) \text{ Wh/kgK}$ ,  $m_v = 10 \text{ kg}$ ,  $m_p = 0,5 \text{ kg}$  in  $q_i = 630 \text{ Wh/kg}$ . Dobimo:

$$T = [m_p(q_i + cT_v) + m_v c T_t] / (m_p + m_v)c = 30 \text{ °C}$$

3. Nasičeno paro s temperaturo 350 °C adiabatno raztegnemo, da se ohladi na 180 °C. Koliko odstotkov pare se pri tem kondenzira?

Tovrstni problem najenostavneje razrešimo s pomočjo entropije (gl. str. 214). Ker je adiabatna raztegnitev nasičene pare (in njena kondenzacija) reverzibilna (tlak in temperatura sta enaka tako v plinasti kot v kapljivinski fazi), se entropija sistema para-vredna voda ne spremeni. Iz entropijske tabele vode (gl. str. 231) razberemo,

da ima 1 kg nasičene pare pri temperaturi 350 °C entropijo 5210 J/K, pri 180 °C pa 6586 J/K, entropija 1 kg vredne vode pri 180 °C pa je enaka 2140 J/K.

Med raztegnitvijo kondenzira x odstotkov pare, tako da je:

$$m \cdot 5210 \text{ J/K} = (1-x)m \cdot 6586 \text{ J/K} + xm \cdot 2140 \text{ J/K}$$

ter

$$x = 0,31 = 31\%$$

### Clausius-Clapeyronova enačba

povezuje spremembo nasičenega parnega tlaka kapljivine s spremembijo temperaturo oziroma spremembo vrednega kapljivine s spremembijo tlaka. Izpeljemo jo s pomočjo Carnotovega krožnega procesa (gl. str. 210).

Mislimo si Carnotov topotni stroj, ki dela med temperaturnama  $T$  in  $T-dT$ , kot delovno sredstvo pa uporablja zmes vredne kapljivine in nasičene pare. Vredni kapljivini (z maso  $m$ ) pri tlaku  $p$  in temperaturi  $T$  (točka 1 na sliki 9.8) dovajamo toploto, da izpareva, s čimer se razteza (do točke 2) in odda delo  $p(V_p - V_t)$ . Tlak pare zmanjšamo za  $dp$ , obenem se vrednega zniža za  $dT$ . Nastali spremembi sta dovolj majhni (izotermi na sliki 9.8 sta blizu skupaj), da zanemarimo spremembo prostornin  $V_p$  in  $V_t$ . Nasičeno paro s temperaturo  $T - dT$  nato izotermno stisnemo, da se kondenzira, za kar potrebujemo delo  $(p - dp)(V_p - V_t)$ , ter na koncu zaključimo krožno spremembo.

Delovno sredstvo prejme toploto  $mq_i$  pri temperaturi  $T$  in odda delo  $dA = p(V_p - V_t) - (p - dp)(V_p - V_t) = dp(V_p - V_t)$ . Izkoristek tega topotnega stroja zato znaša (gl. 8.85):

$$\eta = dT/T = dA/Q = dp(V_p - V_t)/mq_i$$

tako da je:

$$dp/dT = \frac{mq_i}{T(V_p - V_t)}$$

**Clausius-Clapeyronova enačba** (9.5)

Dobljeno enačbo enostavno integriramo, če predpostavimo, da se para obnaša kot idealen plin:  $V_p = (m/Mkg)RT/p$ , da je izparilna toplota  $q_i$  praktično konstantna v temperaturnem območju, ki nas zanima, ter da je volumen kapljivine majhen v primerjavi z volumenom pare ( $V_t \ll V_p$ ). Sledi:

$$dp/p = (Mkgq_i/R)dT/T^2$$

Po integraciji dobimo:

$$1/T = 1/T_0 - (R/Mkgq_i)\ln(p/p_0) \quad (9.6)$$

kjer sta  $T_0$  in  $T$  temperaturi vrednega pri tlaku  $p_0$  oziroma  $p$ .

### Utekočinjenje plinov

Plin lahko utekočinimo tako, da ga izotermno stisnemo pri temperaturi, ki je nižja od njegove kritične temperaturi (gl. str. 219). Z običajnim hladilnim sistemom (gl.

str. 212) lahko ohladimo plin do okrog  $-10^{\circ}\text{C}$ . Še nižje temperature dosežemo s pomočjo ogljikovega dioksida (ali žveplovega dioksida), ki stisnjen v bombi pod tlakom do 70 barov ekspandira skozi ventil, zamrzne in se ohladi do okrog  $-70^{\circ}\text{C}$ . Z zamrznjenim  $\text{CO}_2$  ohladimo eter, katerega parni tlak pri teh temperaturah je okrog 1 mbar. Etrove pare odsesamo in eter se s sublimiranjem ohladi do okrog  $-120^{\circ}\text{C}$ , kar je dovolj za utekočinjenje npr. kisika, katerega kritična temperatura je  $-118^{\circ}\text{C}$ .

Drug postopek utekočinjenja plinov je t. i. **Lindejев postopek** (slika 9.9), ki se uporablja predvsem za utekočinjenje zraka. Zrak najprej v kompresorju stisnemo do tlaka okrog 200 barov. Stisnjen in segret zrak vodimo skozi higroskopično sredstvo (ki mu odvzame vlago) in skozi hladilno kačo, kjer se nekoliko ohladi, nakar se v ekspanzijskem ventilu raztegne v večji prostor (tlak se zmanjša na okrog 15 bar), pri čemer se ohladi (približno za  $1/4^{\circ}\text{C}$  za vsak bar tlachenje razlike). Ohlajen (za okrog  $46^{\circ}\text{C}$ ) zrak nato vodimo mimo hladilne kače (kjer ohlaja prihajajoči zrak) nazaj v kompresor itd. Postopek ponavljamo toliko časa, dokler se zrak ne začne utekočinjevati. Utekočinjen zrak ima temperaturo okrog  $-190^{\circ}\text{C}$ .

## Taljenje in strjevanje

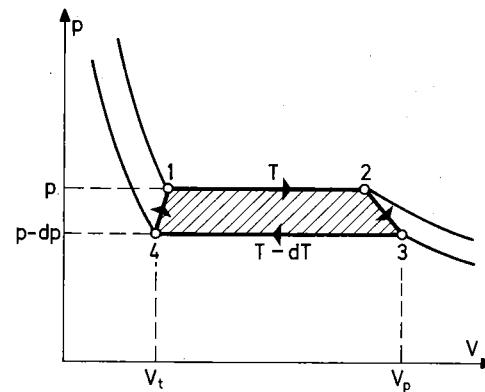
Prehod iz trdnega stanja v kapljivinsko ali obratno je povezan s spremembijo zgradbe snovi in je zato pri kristalnih trdninah bistveno drugačen kot pri amorfnih.

Amortne trdnine (npr. steklo, smola, vasek, različne plastike itd.) imajo podobno neurejeno zgradbo kot kapljevine, le da molekule ne morejo potovati skozi snov (so nekako zamrznjene). Te trdnine so pravzaprav zelo viskozne kapljevine. Zaradi tega se med segrevanjem vedno bolj mehčajo in postopoma prehajajo v kapljivinsko stanje; njihova temperatura bolj ali manj enakomerno narašča (črtkana krivulja na sliki 9.10). Pravimo, da amorfne trdnine zvezno prehajajo v kapljivinsko stanje; ni ostre meje med enim in drugim stanjem. Amorfna trdnina se ne tali, se topi (npr. kos masla v ponvi).

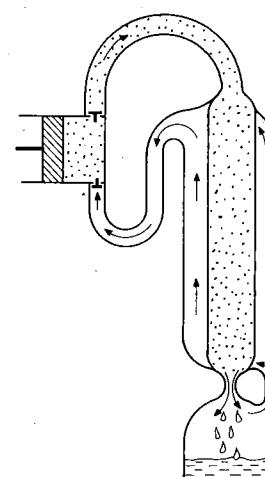
Drugač je pri kristalnih trdninah. Zanje je značilna urejena zgradba (gl. str. 129). Atomi so urejeno razvrščeni na dana mesta v kristalni mreži in lahko le nekoliko nihajo okrog ravnovesnih položajev. Če takšno snov segrevamo (dovajamo toploto  $Q$ ), se njena temperatura najprej enakomerno povečuje in atomi vedno bolj intenzivno nihajo. Pri tališču ( $T_t$ ) je kinetična energija posamičnih nihajočih atomov ravno zadostna, da se atomi sprostijo in pobegnejo, pri čemer se običajno povežejo in kot molekule preidejo v kapljivinsko stanje. Kristal se prične **taliti**. Med taljenjem se temperatura kljub segrevanju ne povisuje (zvlečena črta na sliki 9.10), pač pa se dovedena toplota (t. i. **talilna toplota**  $Q_t = mq_t$ ) porablja predvsem za povečanje potencialne energije atomov zaradi prehoda iz urejene zgradbe v neurejeno.

Ker se gostota snovi s taljenjem le malo spremeni (pri vrenju pa precej), je **specifična talilna toplota** ( $q_t$ ) navadno precej manjša od specifične izparilne toplote  $q_i$ . Za vodo je npr.  $q_t = 630 \text{ Wh/kg}$ ,  $q_i$  pa le  $93 \text{ Wh/kg}$ .

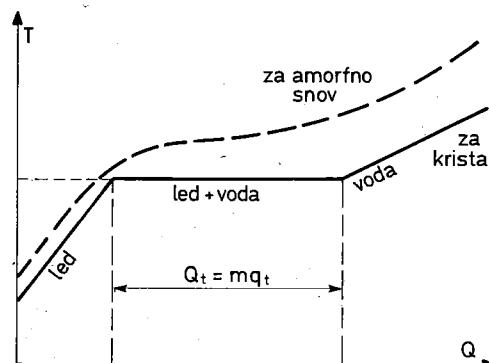
Večina snovi s taljenjem poveča prostornino, in sicer za nekaj % (do največ 7%), izjema so le led, bizmut ter



Slika 9.8



Slika 9.9



Slika 9.10

nekatere redke zemlje, ki imajo razmeroma razredčeno kristalno zgradbo in se zato s taljenjem zgostijo (kapljevinska faza ima večjo gostoto kot trdnega), led npr. za cca 9%, bizmut za 3%.

Ker so relativne spremembe prostornine snovi ob taljenju razmeroma majhne, se **tališče le malo spreminja s tlakom**, torej povsem drugače kot pri vrelischu, ki je močno odvisno od tlaka.

Odvisnost tališča od tlaka ugotovimo s podobno enačbo, kot velja za vrelisch, to je s Clausius-Clapeyronov enačbo (9.5), ki se za ta primer glasi:

$$\frac{dp}{dT_t} = \frac{mq_t}{T_t(V_{kap} - V_{trd})} \quad (9.7)$$

Tu sta  $V_{kap}$  in  $V_{trd}$  prostornini snovi (z maso  $m$ ) v kapljevinskem in trdnem stanju. Če je torej  $V_{kap} > V_{trd}$  (kar je pri večini snovi), je  $dp/dT_t > 0$  (pozitivnemu  $dp$  ustreza pozitiven  $dT_t$ ) in **tališče se z večanjem tlaka povišuje**. Za led pa velja  $V_{kap} < V_{trd}$  in zato  $dp/dT_t < 0$ : **povečan tlak zniža tališče** (zmanjšan pa poviša). Vidimo, da **povečan tlak favorizira tisto agregatno stanje, v katerem ima snov manjšo prostornino**. Povečan tlak že sam sili trdnino v taljenje in je zato ni treba tako močno segreti, da se stali (tališče je nižje). Seveda pa sprememba tališča zaradi spremenjenega tlaka ni tako opazna, kot npr. pri vrelischu. Za led npr. dobimo:  $T_t = 0^\circ\text{C} = 273\text{ K}$ ,  $m = 1\text{ kg}$ ,  $V_{kap} = 1\text{ dm}^3$ ,  $V_{trd} = 1,09\text{ dm}^3$ ,  $q_t = 93\text{ Wh/kg}$  in

$$\frac{dp/dT_t}{dT_t/dp} = -\frac{93\text{ Wh}}{273\text{ K} \cdot 0,09\text{ dm}^3} = -136\text{ bar/K} \quad \text{ali}$$

$$dT_t/dp = 0,0074\text{ K/bar}$$

Vsek bar tlacične razlike spremeni tališče ledu za 0,0074 °C. Če torej želimo tališče ledu znižati za 1 °C, moramo tlak povečati za 136 barov. Drugače kot led se obnaša npr. parafin, ki s taljenjem poveča prostornino; njegovo tališče pri normalnem zračnem tlaku je npr. 46 °C, pri 100 barih pa pri 50 °C.

S slike (9.10) razberemo, da pri danem tlaku obstaja kapljevinsko stanje, če je temperatura višja od tališča, in trdno stanje, če je nižja. Pri tališču ( $T = T_t$ ) lahko obe fazji obstajata druga ob drugi. **Zmes kapljevinske in trdne faze snovi ima temperaturo tališča**. Moker led ima npr. temperaturo 0 °C, ravno tako voda, v kateri plavajo koščki ledu.

### Primeri:

**1. Električni grelec z močjo  $P = 2\text{ kW}$  potopimo v zmes  $m_v = 2\text{ kg}$  vode in  $m_l = 4\text{ kg}$  ledu. Koliko časa mora grelec goreti, da dobimo paro s temperaturo  $T_v = 100^\circ\text{C}$ , če se nič topote ne izgubi v okolico?**

Toplotna  $Q = Pt$ , ki jo grelec odda v času  $t$ , mora najprej pri 0 °C staliti led, nato vso vodo segreti do 100 °C ter tam vso vodo izpariti:

$$Pt = m_l q_t + (m_l + m_v) c(T_v - T_t) + (m_l + m_v) q_i$$

$$Pt = 372\text{ Wh} + 700\text{ Wh} + 3780\text{ Wh} = 4,85\text{ kWh}$$

$$t = 4,85\text{ kWh}/2\text{kW} = 2,4\text{ h}$$

**2. Na kos ledu z maso  $m_l = 10\text{ kg}$  in temperaturo  $T_l = -10^\circ\text{C}$  vlijemo  $m_p = 2\text{ kg}$  nasičene pare s temperaturo  $T_v = 100^\circ\text{C}$ . Kaj dobimo in kolikšna je končna temperatura, če zanemarimo izgubo topote v okolico? Specifična topota ledu je  $c_l = 2100\text{ J/kgK}$ .**

Predpostavimo, da dobimo vodo s temperaturo  $T$ . Torej se para kondenzira in iz nje nastala voda ohladi s  $T_l$  na  $T$ , pri čemer se odda topota  $m_p q_i + m_p c(T_v - T)$ . Ta topota segreje led s  $T_l$  na  $T_t$ , ga stali in iz njega nastalo vodo segreje s  $T_t$  na  $T$ , za kar je potrebna topota  $m_l c_l (T_t - T_l) + m_l q_t + m_l c (T - T_t)$ . Sledi:

$$m_p q_i + m_p c(T_v - T) = m_l c_l (T_t - T_l) + m_l q_t + m_l c (T - T_t)$$

ter

$$T = [m_p (q_i + c T_v) - m_l c_l (T_t - T_l) - m_l (q_t - c T_t)] / (m_l + m_p)$$

$$T = 36^\circ\text{C}$$

Dobimo 12 kg vode s temperaturo 36 °C.

Če bi dobili rezultat  $T > 100^\circ\text{C}$ , naša predpostavka (da nastane voda) ne bi bila pravilna. Tedaj bi bila končna temperatura 100 °C in ostalo bi še  $x\text{ kg}$  pare, tako da bi bilo:

$$(m_p + m_l) c (T - T_v) = x q_i$$

Za  $T < 0^\circ\text{C}$  pa je končna temperatura 0 °C in ostane še  $y\text{ kg}$  ledu, tako da je:

$$(m_p + m_l) c (T_t - T) = y q_i$$

**3. Na gladini jezera nastaja plast ledu. Nad ledeno skorjo je temperatura zraka stalno enaka  $T_z = -10^\circ\text{C}$ , pod njo pa ima voda temperaturo  $T_t = 0^\circ\text{C}$ . Kolikšna je debelina ledene skorje po času  $t = 1\text{ h}$  od začetka zmrzovanja? Toplotna prevodnost ledu je  $\lambda = 2,2\text{ W/mK}$ , njegova gostota pa  $\rho = 0,92\text{ g/cm}^3$ .**

V nekem vmesnem trenutku  $t$  je skorja debela  $x$ . V naslednjem kratkem časovnem intervalu  $dt$  uide skoznojno topota  $dQ = Pdt = \lambda S(T_t - T_z)dt/x$ , zaradi česar ob spodnji strani skorje zamrzne  $dm = dQ/q_i$  vode in se debelina skorje poveča za  $dx = dV/S = dm/\rho S$ . Sledi enačba:

$$xdx = dQ/(\rho Sq_i) = \lambda(T_t - T_z)dt/(\rho q_i)$$

Po integraciji, upoštevaje začetni pogoj  $x = 0$  za  $t = 0$ , dobimo rezultat:

$$x = \sqrt{2\lambda(T_t - T_z)t/\rho q_i} = 2,3\text{ cm}$$

### Sublimacija

Kafra, naftalin in druga sredstva proti moljem na zraku slej ko prej »izginejo«, preidejo iz trdnega stanja neposredno v plinasto (brez vmesnega kapljevinskega stanja); pravimo, da **sublimirajo**. Obešeno mokro perilo na huitem mrazu zmrzne, vendar se tudi zaledenelo perilo posuši (resda v več dnevih), posebno če piha veter. Pri nizkih temperaturah tudi led sublimira. Trden jod se pri normalnem zračnem tlaku tali pri 80 °C. Če

pa ga segrevamo v posodi pod zmanjšanim tlakom (npr. nekaj stotink mbara), pa sublimira že pri običajnih temperaturah. Tudi led pri  $0^{\circ}\text{C}$  sublimira, če je tlak nad njim manjši od okrog 6 mbar. Ogljikov dioksid (ki ga shranjujemo v tekočem stanju v bombi pod tlakom okrog 100 bar) 'butne' iz odprte bombe kot plin, pri čemer se raztegne in ohladi tako močno (do  $-78^{\circ}\text{C}$ ), da se takoj strdi v trden  $\text{CO}_2$  (t. i. suhi led).

Trdnina sublimira podobno kot kapljevinasta izhlapeva z gladine. Vendar se ta prehod uveljavlji le, če je tlak zraka nad snovjo dovolj nizek. Načeloma vsaka trdnina v vakuumu sublimira. Prehod trdnine v kapljevinasto stanje je možen le, če je tlak nad snovjo dovolj velik. Tlak namreč preprečuje, da bi se molekule, ki se sproščajo z rušenjem zgradbe trdnine, razbežale v plinasto stanje. Če okolišnega tlaka ni, prehaja trdnina neposredno v plinasto stanje.

**Sublimacijska toplota**  $q_s$  (to je toplota, ki je potrebna, da 1 kg trdne snovi pri stalni temperaturi sublimira v plinasto stanje) je **vsota talilne in izparilne toplotne**, oboje vzeto pri temperaturi sublimacije:  $q_s = q_t + q_i$ . Tako je sublimacijska toplota ledu pri  $0^{\circ}\text{C}$  enaka  $93 \text{ Wh/kg} + 693 \text{ Wh/kg} = 786 \text{ Wh/kg}$ .

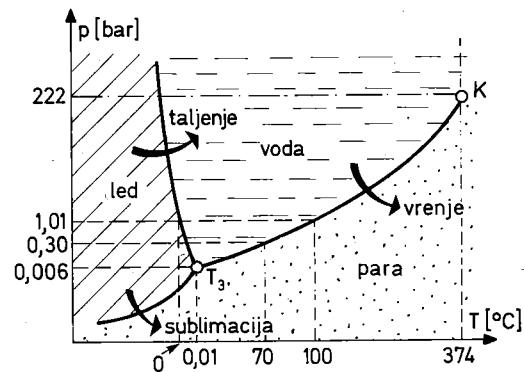
### Fazni diagram – trojna točka

Fazni diagram smo že omenili na strani 220 in sicer v zvezi z vrenjem kapljevine. Tokrat bomo njegovo uporabo razširili na vse vrste sprememb agregatnega stanja snovi. S tem diagramom pregledno prikažemo, pri katerih tlakih in temperaturah so obstojne posamezne faze ter kakšen mora biti tlak v snovi pri dani temperaturi (oziroma kakšna mora biti temperatura pri danem tlaku), da se izvrši neka fazna sprememba.

Na sliki (9.11) je skiciran fazni diagram za vodo. Krivuljo vrenja že poznamo (gl. sliko 9.5); vzdolž nje sta obstojni kapljevinasta in plinasta faza. Dodani sta še krivulji taljenja in sublimacije, ki podajata odvisnost tališča oziroma sublimacijske temperature od tlaka. Ker se tališče ledu z večanjem tlaka znižuje (gl. str. 224), je krivulja tališča nagnjena v levo (nagib je zelo majhen, na sliki je zaradi preglednosti pretiran).

Recimo, da ledu dovajamo toploto pri stalnem tlaku, npr. 1,01 bar. Temperatura ledu se povišuje (pomikamo se po vodoravni črtkani črti v desno), dokler pri  $0^{\circ}\text{C}$  ne dosežemo krivulje taljenja ( $0^{\circ}\text{C}$  je tališče ledu pri tlaku, 1,01 bar). Tu se temperatura ustali in led se prične taliti. Ko je ves led staljen, se ob nadalnjem dovajanju toplotne temperatura vode povišuje do  $100^{\circ}\text{C}$ , ko dosežemo krivuljo vrenja. Pri tlaku, 1,01 bar je torej led obstojen za temperature  $\leq 0^{\circ}\text{C}$ , tekoča voda pri  $0^{\circ}\text{C} \leq T \leq 100^{\circ}\text{C}$  in para pri  $T \geq 100^{\circ}\text{C}$ . Podoben poskus napravimo pri nižjem tlaku, npr. pri 0,30 bar. Tališče se le neznatno poviša, pač pa se vrelisčje zniža s  $100^{\circ}\text{C}$  na  $70^{\circ}\text{C}$ . Pri tem nižjem tlaku je torej kapljevininsko stanje vode obstojno le v temperaturnem območju od  $0^{\circ}\text{C}$  do  $70^{\circ}\text{C}$ . To območje se še bolj zoži, če tlak še znižamo. Pri tlaku 6 mbar se povsem zoži v točko, tako da je kapljevininsko stanje vode obstojno le pri temperaturi natanko  $0,01^{\circ}\text{C}$  (točka  $T_3$  na sliki 9.11). Pod tem tlakom kapljevininsko stanje vode ni možno, pač pa led prehaja neposredno v paro (sublimira).

Točka  $T_3$ , v kateri se sekajo krivulje taljenja, vrenja in sublimacije, se imenuje **trojna točka snovi; pove tlak in**



Slika 9.11

**temperaturo, pri katerih so vsa tri agregatna stanja snovi v medsebojnem ravnovesju.** Zmes ledu, vode in pare obstaja le pri temperaturi  $0,01\text{ }^{\circ}\text{C}$  in tlaku 6 mbar. **Kapljevinsko stanje snovi je možno le, če je temperatura višja od temperature trojne točke.** Pod to temperaturo pa trdna snov sublimira. Pri normalnih pogojih torej sublimirajo tiste trdnine, katerih temperatura in tlak trojne točke sta višja od normalne temperature oziroma normalnega tlaka.

Za primerjavo si oglejmo še fazni diagram ogljikovega dioksida (slika 9.12). Trojna točka je pri tlaku 5,0 bar in temperaturi  $-56,6\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Pri normalnih pogojih je torej obstojen plinast  $\text{CO}_2$ . Če ga pri tlaku 1,01 bar ohlajamo, se pri temperaturi  $-78\text{ }^{\circ}\text{C}$  strdi direktno v trden  $\text{CO}_2$  (suhi led). Tekoči  $\text{CO}_2$  je obstojen le pri tlakah nad 5 bar in če je temperatura manjša od  $31\text{ }^{\circ}\text{C}$  (kritična temperatura). Krivulja taljenja je tu nagnjena v desno (obratno kot pri vodi), kajti tališče se z večanjem tlaka povišuje (ker  $\text{CO}_2$  s taljenjem povečuje prostornino, gl. str. 224).

Fazni diagram poljubne snovi se v smeri visokih temperatur konča pri kritični temperaturi  $T_k$  (gl. str. 219). Pri tej temperaturi kapljevina zvezno in naenkrat (brez porabe toplote) preide v plinasto stanje. Takšen prehod je možen zato, ker imata kapljevina in plin podobno (izotropno) zgradbo. Taljenje trdnine na drugi strani pa je izrazit nezvezen (oster) prehod, saj ima trdnina urejeno (anizotropno) zgradbo, kapljevina pa neurejeno (izotropno). Zato se krivulja taljenja nadaljuje v neskončnost. Krivulja sublimacije se konča v koordinatnem izhodišču faznega diagrama (za  $p = 0$  je tudi  $T = 0$ ).

## Metastabilna stanja

S faznega diagrama razberemo, katera aggregatna stanja snovi so obstojna pri posameznih tlakih in temperaturah. Vendar stvar ni tako enostavna, kot smo jo doslej prikazali. Vodo namreč lahko ohladimo pod  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , ne da bi zamrznila, ali pa jo lahko segrejemo nad  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  (pri normalnem tlaku), ne da bi zavrela. Govorimo o podhlajeni oziroma pregreti vodi.

Da voda, ohlajena pod  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , zamrzne v led, se morajo vodne molekule razporediti v kristalno mrežo, za kar pa so kot začetek potrebna t. i. **kristalizacijska jedra** (npr. prašni delci v vodi), ob katerih se molekule začno urejati. Povsem čisto in mirno vodo lahko ohladimo tudi do  $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ , ne da bi kristalizirala. Če v podhlajeno vodo vsujemo prašne delce (ali še bolje – drobne kristalčke ledu), del vode v hipu zamrzne; pri tem sproščena talilna toplota jo segreje nazaj do  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  (slika 9.13).

Amorfne trdnine (npr. steklo) so pravzaprav podhlajene kapljevine. Tekočo maso tako hitro ohladimo, da ne utegne kristalizirati, pa zato zamrzne v izotropno trdnino. Takšno stanje je metastabilno in sčasoma prehaja v stabilno kristalizacijsko stanje (steklo se npr. staro).

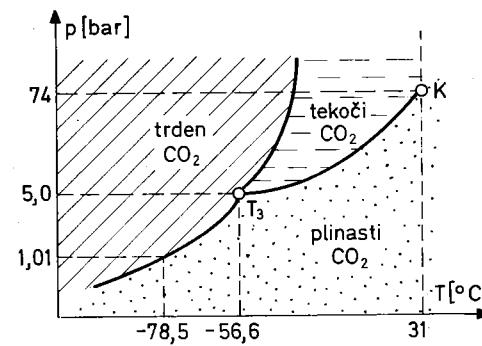
Podobno so za začetek vrenja potrebna **vrelna jedra** v kapljevini, npr. prašni delci, mehurčki zraka ali drugih plinov, ioni ter ostre konice v stenah posode. Ob teh jedrih se začno razraščati parni mehurčki, ko nastopijo pogoji za vrenje. Čisto kapljevino (ki ne vsebuje vrelnih jeder) lahko segrejemo visoko nad vrelische, pa ne more

zavreti. Če v takšno **pregreto kapljevino** vsujemo vrelna jedra (ali če kapljevino močno stresemo), hipoma in burno izpari. Toplotu za vrenje črpa iz lastne notranje energije, zato se ohladi nazaj na vrelische.

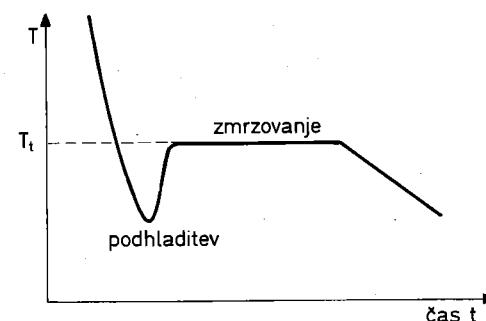
Metastabilno stanje tudi dobimo, če nasičeno paro previdno ohlajamo pod vrelische kapljevine (t. i. **prenasičena para**). Da se kondenzacija pare prične (da se molekule zberejo v kaplje), so namreč potrebna **kondenzacijska jedra** (prašni delci in ioni). Brž ko v prenasičeno paro vnesemo kondenzacijska jedra, se okrog njih naberejo kapljice.

Metastabilno stanje kapljevine – pregreto kapljevino in nasičeno paro – napovedujejo tudi Van der Waalsove izoterme realnih plinov (slika 9.14, glej tudi sliko 9.3). Če plin brez kondenzacijskih jader previdno stiskamo pri stalni temperaturi (npr.  $T_1$ ), njegov tlak naraste nad nasičeni parni tlak  $p_n$  (ki ustreza temperaturi  $T_1$ ) in se plin ne kondenzira. Podobno se dogaja na drugi strani izoterme. Če kapljevini previdno zmanjšujemo tlak (pri stalni temperaturi  $T_1$ ), ne zavre, četudi njen tlak pade pod nasičeni parni tlak.

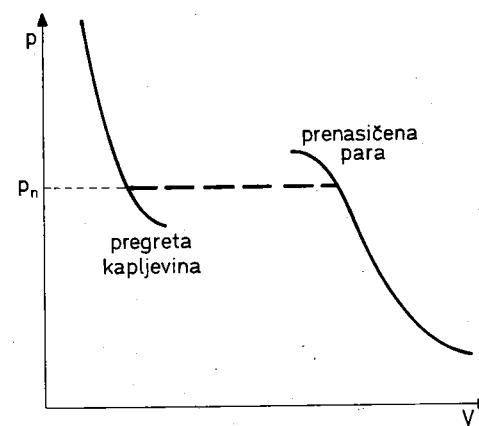
Metastabilnosti pa ni pri taljenju in sublimaciji trdnine; ta prehoda se lahko začneta brez jader.



Slika 9.12



Slika 9.13



Slika 9.14

**Statični in drsni torni koeficient**

	$k_s$	$k_t$
Sani na suhem snegu		0,02
Teflon – teflon	0,04	0,04
Usnje – naoljena kovina		0,15
– mastna kovina		0,25
– suha kovina		0,55
Jeklo – jeklo (suho)	0,78	0,42
(naoljeno)	0,2	0,1
Les – kamen		0,4
Usnje – hrastov les (vzporedno z letnicami)	0,54	0,32
Hrastov les – hrastov les (vzporedno z letnicami)	0,62	0,48
(pravokotno na letnice)	0,54	0,32
Baker – mehko železo	0,53	0,36
Aluminij – mehko železo	0,61	0,47
Mehko železo – mehko železo	0,74	0,57
Steklo – steklo	0,94	0,4
Beton – rdeča opeka		0,6–0,7

**Gostota mase**

Kovine pri 20 °C (g/cm³)	Druge trdnine pri 20 °C (g/cm³)
Aluminij	2,7
Baker	8,9
Cink	7,2
Iridij	22,4
Jeklo	7,7–7,9
Kalij	0,87
Kositer	7,3
Litij	0,53
Magnezij	1,75
Natrij	0,97
Osmij	22,5
Platina	21,4
Srebro	10,5
Svinec	11,3
Uran	19
Volfram	19,3
Zlato	19,3
Živo srebro	13,6
Diamant	3,5
Kamena sol	2,2
Kost	1,8–2,0
Led (0 °C)	0,92
Parafin	0,9
Pleksi steklo	1,2
Polivinil	1,4
Trd kavčuk	1,2
Beton – težek	2,7
– agregat	2,3
– perlit	0,5
Rdeča opeka	
– polna	1,6
– votlak	1,2
Les	
– bukev, hrast	0,8
– smreka, bor	0,6
Asfalt	2,1
Polivinilklorid	1,4
Pluta	0,05
Stiropor	0,015

Kapljevine pri 20 °C (g/cm³)	Plini pri 0 °C in tlaku 1 bar (kg/m³)
Bencin	0,67
Etilni alkohol	0,79
Glicerin	1,26
Mleko	1,03
Morska voda	1,02
Olivno olje	0,92
Petrolej	0,84
Amoniak	0,77
Dušik	1,25
Kisik	1,43
Klor	3,22
Ogljikov monoksid	1,25
Zrak	1,29
Vodik	0,045

# **TABELE SNOVNIH PARAMETROV**

**Prožnostni modul**

(MN/cm <sup>2</sup> = 10 <sup>10</sup> Pa)	
Aluminij	6–7
Baker	12
Jeklo	20–22
Kavčuk	0,0008
Pleksi steklo	0,52
Srebro	8,2
Svinec	1,5
Volfram	35
Zlato	7

**Poissonovo število**

	0,33
	0,36
	0,30
	0,37
	0,40
	0,37

Voda 0 °C	0,0756
Voda 20 °C	0,0728
Voda 40 °C	0,0696
Voda 60 °C	0,0662
Voda 100 °C	0,0589
Glicerin 20 °C	0,063
Benzen 20 °C	0,029
Kloroform 20 °C	0,027
Nafta 20 °C	0,026
Aceton 20 °C	0,024
Etilni alkohol 20 °C	0,023

**Stisljivost (1/Mbar)**

Aceton	80
Eter	160
Etilni alkohol	100
Glicerin	22
Olivno olje	60
Živo srebro	4
Voda (0 °C)	25

**Koefficient temperaturnega raztezka**  
(/K) pri 20 °C**Linearni:**

Aluminij	2,3 · 10 <sup>-5</sup>
Baker	1,7
Beton	1,2
Invar	0,09
Jeklo	1,1
Konstantan	1,7
Led	5,1
Opeka	0,5
Platina	0,89
Polivinil	7,0
Steklo (navadno)	0,85
Steklo (kremenovo)	0,06
Svinec	2,8

**Prostorninski:**

Aceton	1,4 · 10 <sup>-3</sup>
Benzen	1,1
Etilni alkohol	1,1
Glicerin	0,5
Nafta	0,9
Voda	0,2
Živo srebro	0,18

**Plini pri 20 °C in 1 bar:**

Zrak	1,82 · 10 <sup>-5</sup>
Vodik	0,89
Metan	1,10
Ogljikov dioksid	1,47
Dušik	1,76
Kisik	2,03

**Van der Waalsovi konstanti realnih plinov**

	$A = aN_A^2(10^5 \text{ J m}^3)$	$B = bN_A (\text{m}^3)$
Amoniak	4,2	0,037
Argon	1,4	0,032
Dušik	1,4	0,039
Helij	0,035	0,024
Kisik	1,4	0,032
Metan	2,3	0,027
Vodna para	5,6	0,030
Vodik	2,4	0,027

**Površinska napetost kapljevin glede na zrak**  
(N/m)

Baker (tek.) 1130 °C	1,1
Aluminij (tek.) 700 °C	0,84
Živo srebro 20 °C	0,48
Svinec (tek.) 350 °C	0,45

**Specifična toplota  $c_p$  pri 20 °C (kJ/kgK)**

Aluminij	0,88
Benzen	1,74
Baker	0,38
Cink	0,39
Etilni alkohol	2,42
Etilni eter	2,30
Fenol	1,39
Kloroform	0,94
Kositer	0,22
Led (0 °C)	2,22
Led (-20 °C)	2,01
Les	1,67
Nafta	1,77
Olje olivno	1,96
Platina	0,13
Polivinil	1,13
Svinec	0,13
Volfram	0,14
Zlato	0,13
Živo srebro	0,14
Zrak pri 0 °C in 1 bar	1,00
Voda 15 °C	4,18

**Toplotna prevodnost  $\lambda$  (W/mK)**

Srebro	420	Baker	390	Naftalin	80	149	218	320
Zlato	310	Aluminij	230	Natrij	98	113	883	4260
Cink	113	Medenina	90	Žveplo	115	53	444,6	287
Železo	50	Jeklo	45	Kositer	232	59	2070	2500
Svinec	35	Živo srebro	28	Svinec	327	223	1620	860
Kamen – granit	2,50	Beton – težek	2,0	Magnezij	650	370	1090	5240
– apnenec	1,75	– lahek	0,78	Aluminij	660	322	2057	10870
Porcelan	1,41	– perlitni	0,13	Kuhinjska sol	800	480		
Malta – cementna	1,28	Guma	0,62	Srebro	961	105	2163	2320
– apnena	0,87	Opeka – polna	0,80	Zlato	1063	63	2808	1720
– gibsna	0,58	– votlak	0,56	Baker	1080	207	2566	4730
– perlitna	0,13	Voda (0 °C)	0,55	Železo	1536	600	2860	6260
Steklo – jensko	0,96	(20 °C)	0,58	Platina	1774	100	3824	2610
– okensko	0,81	(40 °C)	0,60	Volfram	3380	190	5555	4500
– pleksi	0,19	Glicerin	0,28					
Bakelit	0,23	Olje – olivno	0,17					
Bencin	0,14	– transformator						
Les – bukev, hrast	0,20	– motorno	0,13	vode:	0	6,11	T(°C)	p <sub>n</sub> (mbar)
– smreka	0,13	Filc	0,15		5	8,72	–100	0,000013
– panel, iverka	0,14	Volna – steklena	0,050		10	12,28	–50	0,0395
Stiropor	0,041	– mineralna	0,045		15	17,05	–40	0,129
Plutovina	0,040	Usnje	0,15		20	23,38	–35	0,225
Zrak (0 °C)	0,024	Led (0 °C)	2,2		25	31,68	–30	0,383
(20 °C)	0,025	Sneg – svež	0,1		30	42,43	–25	0,637
(40 °C)	0,027	– uležan	0,6		40	73,77	–20	1,038
(60 °C)	0,028				50	123,4	–15	1,661

**Kritična temperatura in kritični tlak realnih plinov**

	T <sub>k</sub> (K)	T <sub>k</sub> (°C)	p <sub>k</sub> (bar)
Helij	5,2	–268	2,28
Vodik	33,4	–240	13,0
Neon	44,5	–229	27,3
Dušik	126,3	–147	30,0
Kisik	154,4	–119	50,4
Zrak	132,6	–140	37,7
Metan	190,7	–82,5	46,3
Ogljikov dioksid	304	+30,8	73,6
Amoniak	405,6	132	113
Freon 13	302	28,8	39
Etilni alkohol	516	243	62
Voda	647	374	221

**Parametri taljenja in vrenja snovi**

	T <sub>t</sub> (°C)	q <sub>t</sub> (kJ/kg)	T <sub>v</sub> (°C)	q <sub>v</sub> (kJ/kg)
Helij			–269	21
Vodik	–259	58	–253	460
Dušik	–210	26	–196	200
Zrak			–194	204
Kisik	–219	14	–183	213
Metan	–183	61	–159	577
Amoniak	–75	450	–34	1370
Eter	–116		+35	350
Aceton	–96	98	56	520
Kloroform	–64		61	250
Etilni alkohol	–114	104	78	840
Živo srebro	–39	11	357	300
Glicerin	–11,5	181		
Voda	0	333	100	2250
Benzol	5,4	127	80	390
Parafin	52	146		
Iod			185	330

**Nasičeni parni tlak vode**

vode:	T(°C)	p <sub>n</sub> (mbar)	ledu:	T(°C)	p <sub>n</sub> (mbar)
	0	6,11		–100	0,000013
	5	8,72		–50	0,0395
	10	12,28		–40	0,129
	15	17,05		–35	0,225
	20	23,38		–30	0,383
	25	31,68		–25	0,637
	30	42,43		–20	1,038
	40	73,77		–15	1,661
	50	123,4		–10	2,607
	60	199,2		–5	4,023
	70	311,7		–1	5,625
	80	473,6		0	6,11
	90	701			
	100	1013			
	120	1489			
	150	4760			
	180	10 027			
	200	15 550			
	250	39 780			
	300	85 900			
	350	165 400			
	374	221 200			

**Gostota nasičene pare in vrele vode pri različnih temperaturah**

T(°C)	ρ <sub>pare</sub>	(kg/m <sup>3</sup> )	ρ <sub>vode</sub>
0	0,0048		1000
50	0,083		988
100	0,598		958
150	2,55		917
200	7,87		865
250	19,9		799
300	46,3		713
330	77,2		641
350	113,5		575
370	203		450
374	307		307

**Relativna sprememba prostornine trdnine pri taljenju**

	ΔV/V (%)
Cink	7,5
Kadmij	5,5
Aluminij	5,1
Srebro	5,0

Svinec	3,8
Živo srebro	3,6
Kositer	2,8
Antimon	-0,9
Bizmut	-3,3
Železo	-6,7
Led	-8,3

**Temperatura in tlak trojne točke**

	$T_3$ (°C)	$p_3$ (mbar)
Vodik	-259	70,6
Kisik	-219	1,6
Dušik	-210	125
Žveplov dioksid	-68,8	21
Amoniak	-77,7	61
Ogljikov dioksid	-56,6	5010
Voda	0,0099	6,08

**Entropija nasičene pare in vrele vode**

$T$ (°C)	$S_{vode}$	$(J/K)$	$S_{pare}$
0	000		9154
10	151		8899
20	296		8666
30	437		8452
40	572		8256
50	704		8075
60	831		7908
70	955		7754
80	1075		7612
90	1192		7479
100	1307		7355
120	1528		7130
140	1739		6930
160	1943		6751
180	2140		6586
200	2331		6432
250	2793		6072
300	3255		5705
350	3779		5212
374	4430		4430

**A**

Absolutna ničla temperature 212  
– vlažnost 217  
adiabata 200  
adiabatna sprememba 198  
agregatno stanje snovi 216  
amplituda 15  
anizotropija 129  
atmosfera 62  
atomska enota mase 185  
Avogadrovo število 185

**B**

Barometrska enačba 156  
Bernoullijeva enačba 169  
bibanje 119, 121  
Boltzmannova konstanta 185

**C**

Carnotova krožna sprememba 210  
Carnotov toplotni stroj 210  
celica, kristalna 129  
Celzijeva temperatura 193  
centrifugalna sila 44, 50  
centripetalna sila 44  
Clausius-Clapeyronova enačba 222  
Coriolisov pospešek 27  
Coriolisova sila 50

**Č****Čas**

– bibanja 119  
– nihajni 16  
– obhodni 21

**D**

Deformacija teles 132  
delni (parcialni) tlak plina 186  
delo 84  
– navora 86  
– tlaka 196  
dina 30  
dinamični vzgon 172, 174  
– upor 174  
domet 18  
dvojica sil 70

**E**

Ekviparticijski teorem 194  
elipsoid, vztrajnostni 66  
enakomerno gibanje 9  
– kroženje 20  
energija 84  
– deformacijska 100, 146  
– kinetična 84, 88  
– notranja 194  
– potencialna 93  
– površinska 151  
– prožnostna 96  
energijski zakon termodinamike 195  
entropija 213  
entropijski zakon 214  
erg 85

**F**

Fazne spremembe 216  
fazni diagram 225

**STVARNO  
KAZALO**

fizično nihalo 111  
Fourierova analiza nihanja 122  
frekvenca 16  
– lastna 108  
– utripanja (bibanja) 119

## G

Gibalna količina 31  
gibanje 6  
– enakomerno 9  
– ploskovno 17  
– premo (linijsko) 9  
– prostorsko 6  
– termično 178  
gibanje tekočin 163  
glavne osi telesa 66  
gostota 60  
– kinetične energije 170  
– potencialne energije 170  
– sile 62  
– topotnega toka 202  
gradient temperature 202  
gravitacijska sila 32  
gravitacijsko polje 94

## H

Harmonično nihanje 14  
hidrodinamika 163  
hidrostatični tlak 154  
higrometer 218  
hitrost 7, 10  
– iztekanja tekočine 170  
– kotna 21  
– kozmična, prva in druga 36  
– obodna 21  
– relativna 24  
hitrostna porazdelitev molekul 180  
hladilni stroj 212  
hlapenje 216  
Hookov zakon 137

## I

Idealna tekočina 164  
idealni plin 184  
idealni topotni stroj 210  
indiferentna ravnoesna lega 99  
inercialni koordinatni sistem 25  
irreverzibilna sprememba 214  
izkoristek topotnega stroja 210  
izotermna sprememba 188  
izoterme idealnih plinov 188  
– realnih plinov 218  
izparilna topota 221  
izrek o ohranitvi energije 94  
– gibalne količine 54  
– vrtilne količine 82

## J

Joule 85

## K

Kalorija 196  
kalorimeter 198  
kapaciteta, topotna 197  
kapilarni pojavi 152  
kapljevine, zgradba 148  
Kelvin 181, 194

Keplerjev zakon 32  
kilomol 185  
kilopond 30  
kilowatura 87  
kinematika 6  
kinetična energija 84, 88  
kinetična teorija plinov 179  
koeficient, prožnosti trka 106  
– termičnega raztezka 190  
– trenja 38  
– upora 174  
kondenzacija 220  
kondenzacijska topota 221  
kondukcija topote 200  
konjska moč 87  
konservativna sila 92  
konvekcija 208  
koordinantni sistemi 6, 25  
kotaljenje 74  
kristali 128  
kritična točka 219  
kot 20  
kotna hitrost 21  
kotni pospešek 22  
krajevni vektor točke 6  
– težišča 54, 61  
krivinski polmer 141  
kroženje enakomerno 20  
– pospešeno 22  
krožna frekvenca 16  
krožna sprememba 196  
kubične kristalne mreže 130  
kvadratni zakon upora 174

## L

Labilna ravnoesna lega 99  
– prosta os 79  
laminarno gibanje tekočine 164  
lastna frekvenca nihala 110  
– vzemnega 110  
– težnega 111  
– sučnega (polžastega) 110  
latentna topota 216  
lega, ravnoesna 98  
linearni zakon upora 173  
Lissajoux-ove krivulje 123

## M

Magnusov pojav 175  
masa 30  
masni tok 56, 165  
masno središče 54, 61  
matematično nihalo 112  
Maxwellova porazdelitev hitrosti 181  
meja prožnosti 144  
– trdnosti 145  
met, navpični 14  
– poševni 18  
metacenter plavanja 160  
metastabilno agregatno stanje 226  
Millerjevi indeksi 130  
moč 86  
– pri vrtenju 88  
močenje kapljivine 152  
modul, prožnostni 137  
– strižni 138  
molekule 179

molekularne sile 149  
molekulska masa 185  
moment, vrtilni 68, 86  
– vztrajnostni 65  
mreža, kristalna 129

## N

Napetost, površinska 150  
– natezna 135  
– strižna 135  
– tlačna 135  
naravna konvekcija 208  
nasičen parni tlak 217, 219  
natezna napetost 135  
navor 68, 86  
– dvojice sil 70  
– teže 70  
navpični met 14  
neinercialni koordinatni sistem 25  
neobrnljive spremembe 214  
neprožna deformacija 144  
neprožni trk 102  
nestacionarno gibanje tekočine 164  
newton 30  
Newtonov zakon dinamike 30  
– gravitacije 32  
– prestopa topote 205  
nihalo, fizično 111  
– matematično 112  
– sučno 110  
– težno 111  
– vzemljeno 110  
nihanje 108  
– dušeno 114  
– harmonično 14  
– nedušeno 113  
– sestavljeni 120  
– sklopljeno 118  
– vsiljeno 115  
nutacija 82

## O

Obhodni čas 21  
obrnljive spremembe 214  
okolica 52  
os, glavna vztrajnostna 67  
– prosta 79  
osnovno lastno nihanje 121  
osnovna frekvencija nihala 121

## P

Para, nasičena 219  
paradoks, hidrodinamični 172  
parcialni (delni) tlak plina 186  
parni stroj 210  
pascal 62  
plavanje 159  
plastična deformacija 144  
plin, idealni 184  
– realni 186  
plinska konstanta 185  
plinski termometer 192  
– zakon 188  
podhlajena kapljevinna 226  
– para 226  
poise 166  
Poissonovo število 134

pol pospeška 76  
polje sile 92  
– težno (gravitacijsko) 91  
pospešek 8, 10  
– Coriolisov 27  
– kotni 22  
– radialni (centripetalni) 22  
– relativni 25  
– tangentni 22  
poševni met 18  
površinska energija 151  
– napetost 150  
Prandtlova cev 171  
precesija 82  
prečna sila 174  
pregreta kapljevinna 226  
prestava 88  
prevajanje topote 200  
prevodnost, topotna 201  
proste osi telesa 79  
prosti pad 13  
prostorninski tok 164  
prostostna stopnja 64  
prožni trk 103  
prožnost telesa 144  
prožnostna energija 96  
prožnostni modul 137

## R

Radialni pospešek 22  
ravnovesje, mehansko 70  
– togega telesa 70  
– topotno 178, 200  
ravnovesne lege 98  
raztezanje, topotno 189  
realni plini 186  
reducirana dolžina nihala 113  
relativna vlažnost 218  
– hitrost 24  
relativni pospešek 25  
resonanca 116  
reverzibilna spremembra 214  
Reynoldsovo število 176  
ročica sile 64, 68  
rosišče 218  
rotacija telesa 64

## S

Sateliti 35  
sestavljanje nihanj, enosmernih 120  
– pravokotnih 122  
sila 30  
– centrifugalna 44, 50  
– centripetalna 44  
– Coriolisova 50  
– curka 57  
– gravitacijska 32  
– konservativna 92  
– medmolekularna 149  
– nekonservativna 92  
– notranja 52  
– prožnostna 42  
– reakcijska 56  
– sistemski (vztrajnostni) 48  
– torna 38  
– zunanja 52  
sinusno nihanje 16

specifična izparilna toplota 221

– talilna toplota 223

specifična teža 63

– toplota 196

spekter nihanja 122

stabilna ravovesna lega 98

stabilna prosta os 79

stabilnost plavanja 160

stanje, topotno 178

statika 70

Steinerjev stavek 67

stisljivost, adiabatna 200

– izotermna 200

stopinja, celzija 193

– fahrenheita 194

– kelvina 194

strižna deformacija 133, 134

– napetost 135

strižni modul 138

stroj, Carnotov idealni 210

– parni 210

– topotni 209

sublimacija 224

sublimacijska toplota 225

## Š

Število, Avogadrovo 185

– Poissonovo 134

– Reynoldsovo 176

## T

Talilna toplota 223

tališče 223

tangentni pospešek 22

Taylorjeva vrsta 109

tehntica, decimalna 72

– vzvodna 71

tekočine 148

telo 52

temperatura 178, 180

– kritična 218

– trojna 226

temperaturni, gradient 202

– koeficient dolžinskega raztezka 190

– koef. prostorninskega raztezka 190

termodinamika 178

termodinamične količine 178

termometer 192

teža 34

težišče, sistema točkastih tel 54

– togega telesa 61, 70

težni pospešek 34

tlak 62

– delni 186

– hidrostatični 154

– površinski 151

– zastojni 171

– zračni 155

tok, masni 56, 164

– prostorninski 164

– topotni 201

tokovnice 164

toplota 195

topotni, stroj 209

– upor 202

torr 154

torzija 134

translacija 74

trenje, drsno 38

– notranje 166

– statično 38

trk, binarni centralni 100

– neprožni 102

– poševni 104

– prožni 103

trojna točka 225

turbulentno gibanje tekočine 164

## U

ubežna hitrost 36

učinek hladilnega stroja 212

upogib 142

upor, dinamični (kvadratni) 174

– pretočni 168

– topotni 202

– viskozni (linearni) 173

utekočinjenje plinov 222

utripanje 121

## V

Vakuum 180

Van der Waalsova enačba 186

Venturijeva cev 171

vijak 86

viskoznost 166

vlažnost 217

vrelišče 220

vrenje 220

vrtavka 82

vrtenje, togega telesa 64

vrtilna količina 80

vrtilni moment 64, 68

vsiljena konvekcija 208

vsiljeno nihanje 115

vzgon, dinamični 174

– rotacijski 162

– statični 152

vztrajnik 90

vztrajnostni moment 65

– centrifugalni 67, 79

– glavni 67

– togega telesa 65

– vpogibni 141

vztrajnostni radij 66

## Z

Zastojna točka 171

zastojni tlak 171

zgradba, kapljevin 148

– plinov 179

– trdnin 126

zunanje sile 52

## Ž

Žilavost 146