10. Osnovne lastnosti tekočin

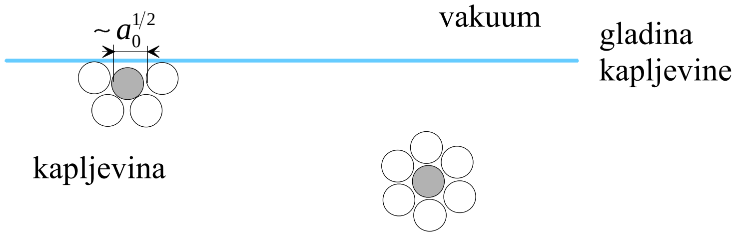
Ena od lastnosti, ki ločujejo snovi, je na kakšen način se le-te pod vplivom zunanje sile deformirajo, oziroma v kolikšni meri se snov upira deformaciji. V tem smislu lahko snovi razvrstimo od Evklidovega trdnega idealno togega telesa, katerega odpor je neskončno velik, do Pascalove tekočine, ki se sploh ne upira deformaciji. V tem poglavju obravnavamo tekočino, ki jo opišemo kot snov, ki se pod vplivom zunanjih sil kontinuirano in nepovratno deformira. Tekočina se zato pod vplivom zunanjih sil giblje.

Tekočine ne moremo deformirati na strig tako kot trdna telesa. V tekočini so strižne sile različne od nič le, če tekočina teče. V mirujoči tekočini so strižne sile vedno enake nič, medtem ko so pri trdnih snoveh strižne sile vzrok notranjim napetostim.

Tako deluje sila stene posode na tekočino tik ob steni posode vedno v smeri normale na steno, t.j. v smeri pravokotno na steno, saj bi imeli sicer vzdolž stene tekočinske tokove. V skladu s III. Newtonovim zakonom zato tekočina deluje na steno posode v nasprotni smeri, to je v smeri pravokotno na steno posode (slika1).

Slika 1: *Sila zaradi tlaka tekočine na steno posode je vedno pravokotna na steno posode.*

Med tekočine uvrščamo tako pline kot kapljevine (to je snovi, ki tvorijo kaplje). Pri plinu so povprečne razdalje med sosednjima molekulami zelo velike, tako da je negativna interacijska energija med molekulami plina po velikosti precej manjša od povprečne kinetične energije molekul. Pline je zato lahko stiskati. Pri kapljevinah (kot je na primer voda v kozarcu) pa je povprečna razdalja med molekulami približno taka kot razdalja med molekulami (atomi) v kristalu trdne snovi. Zato je gostota kapljevin precej večja kot gostota plinov, posledično pa je stisljivost kapljevin veliko manjša kot stisljivost plinov. Zato interakcijska energija med sosednjimi molekulami kapljevine ni zanemarljiva, čeprav se molekule (ali skupki molekul) kapljevine gibljejo na velikih razdaljah.



Slika 2a: *Molekula v notranjosti kapljevine je z vseh strani obdana z drugimi molekulami.*

Če v prvem približku upoštevamo le najbližje sosede (t.j. molekule, ki so v neposrednem stiku z izbrano molekulo) , je negativna interakcijska energija na molekulo v notranjosti kapljevine $-\frac{1}{2}N W_0$, kjer je N število najbližjih sosednjih molekul, W_0 pa je interakcijska energija med dvema sosednjima molekulama. Faktor $\frac{1}{2}$ uvedemo, da medsebojne interakcijske energije ne štejemo dvakrat. Interakcijska energija na molekulo kapljevine, ki se nahaja na gladini (v stiku z vakuumom), pa je po velikosti približno dvakrat manjša, torej $-\frac{1}{4}N W_0$. Vidimo torej, da je interakcijska energija na molekulo na gladini večja (t.j. manj negativna) kot pa je ustrezna interakcijska energija na molekulo v notranjosti kapljevine. Razliko med obema energijama $-\frac{1}{4}N W_0 - \left(-\frac{1}{2}N W_0\right) = \frac{1}{4}N W_0$ imenujemo **površinsko energijo molekule**. Ta je odvisna od vrste in stanja kapljevine, kot tudi vrste molekul nad gladino (če tam ni vakuuma).

Če se velikost gladine danega volumna kapljevine poveča za ΔS, moramo iz notranjosti kapljevine na gladino spraviti $\frac{\Delta S}{a_0}$ molekul, kjer je a_0 površina, ki jo na gladini zavzema ena molekula kapljevine (glejte sliko 2a). Ustrezno povečanje energije je tako:

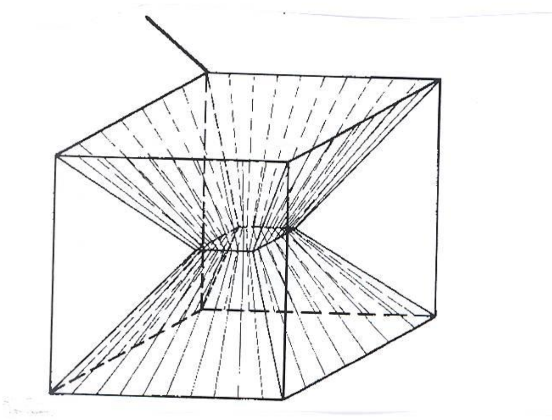
$$\Delta W_\sigma \cong \left(\frac{\Delta S}{a_0}\right)\frac{1}{4}N W_0 = \sigma\,\Delta S\,, \tag{1a}$$

kjer smo definirali površinsko napetost kot:

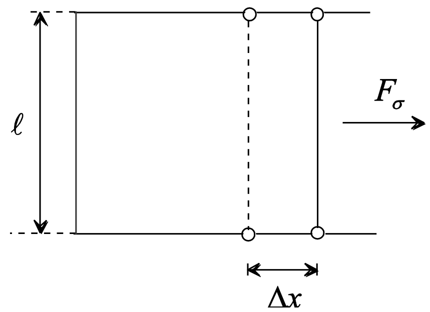
$$\sigma = \frac{N W_0}{4 a_0}\,. \tag{1b}$$

Enota za σ je J/m^2, oziroma N/m. Vidimo, da je površinska napetost σ odvisna od interakcijske energije med najbližjima sosednjima molekulama W_0, od površine na molekulo a_0, ki se nahaja na gladini, ter od števila najbližjih sosed *N*.

Ob upoštevanju veljavnosti enačbe (1a) lahko razumemo zakaj so kapljice okrogle (če ne upoštevamo gravitacijske sile). Okrogle kapljice imajo namreč pri danem volumnu najmanjšo površino, torej najmanjšo površinsko energijo W_σ.



Slika 2b: *Če potopimo žičnati okvir v obliki kocke v milnico, nastala milnična opna ustreza najmanjši možni površini (Kladnik: Visokošolska fizika).*



Slika 2c: *Na okvir napeta milnična opna.*

Če potopimo žičnati okvir z gibljivo prečko v milnico, se na okvir napne ravna opna (slika 2c). Če z zunanjo silo F_σ premaknemo prečko za Δx se površinska energija poveča za

$$\Delta W_\sigma = \sigma \Delta S = \sigma 2 \ell \Delta x \,, \tag{2a}$$

kjer smo upoštevali, da se je površina opne povečala na obeh straneh (spodaj in zgoraj). Ko gibljivo prečko premaknemo za razdaljo Δx s silo F_σ opravimo delo

$$A = F_\sigma \Delta x \ . \tag{2b}$$

Če zanemarimo izgube zaradi trenja gibljive prečke ob okvir, mora biti delo sile F_σ enako povečanju površinske energije ΔW_σ (enačba (2a)):

$$F_\sigma \Delta x = \sigma 2 \ell \Delta x \,,$$

od koder sledi:

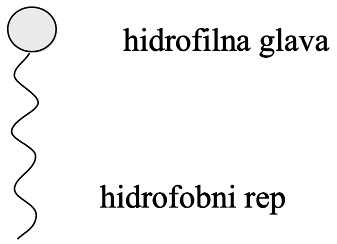
$$F_\sigma = \sigma 2 \ell \,,$$

oziroma

$$\sigma = \frac{F}{2\ell} \ . \tag{2c}$$

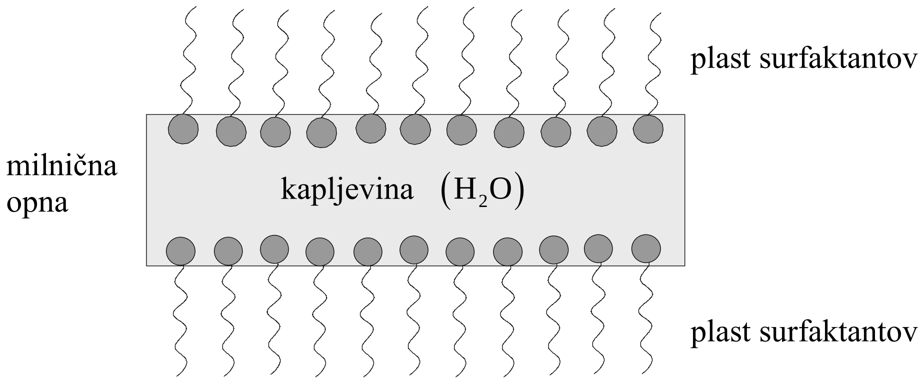
Vidimo, da je površinska napetost σ podana s silo na enoto dolžine mejne črte površine. Površinska napetost vode pri normalnih pogojih $\sigma \approx 0.07\,\mathrm{N/m}$.

Na tem mestu še omenimo, da je milnična opna dvokomponentni sistem, ki ga sestavljajo molekule kapljevine in molekule surfaktanta, ki imajo hidrofobne repe in hidrofilne glave (slika 2d).



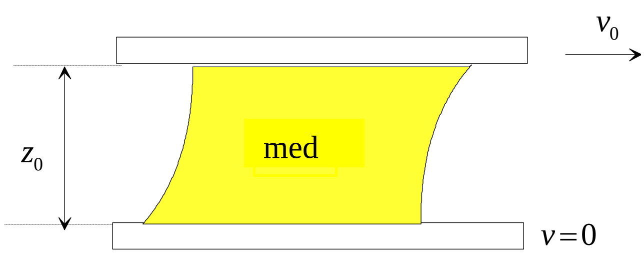
Slika 2d: *Shema molekule surfaktanta*.

Zato je energijsko ugodno, da se na obeh straneh kapljevinske opne formira enojna plast molekul surfaktanta (slika 2e), ki stabilizira opno.

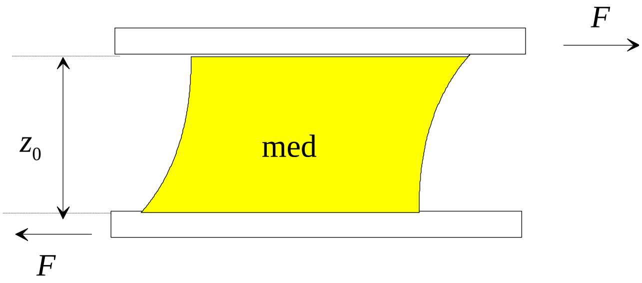


Slika 2e: *Shematični prikaz milnične opne.*

Poglejmo si sedaj še malce podrobneje kako se odziva kapljevina, če jo obremenimo na strig. Pri predavanjih tako naredimo poskus z medom med vzporednima steklenima ploščama na razdalji z_0 (slika 3a).



Slika 3a



Slika 3b

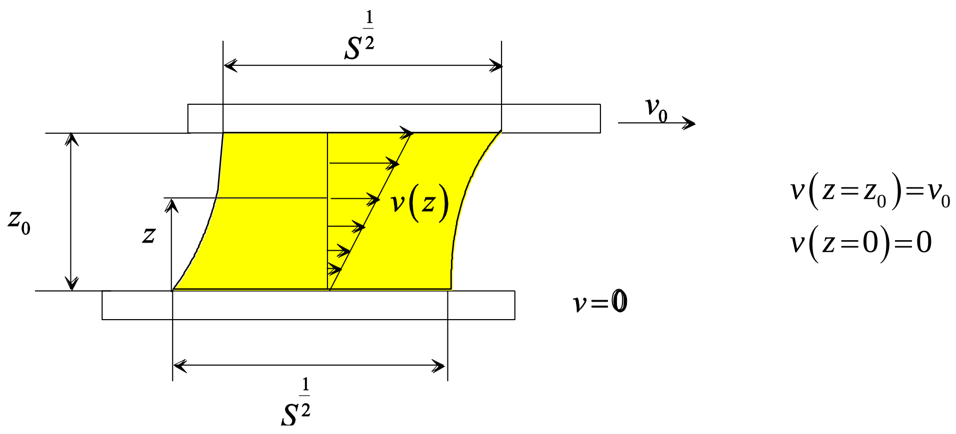
Zgornjo ploščo vlečemo s silo *F* proti desni in spodnjo z nasprotno enako silo proti levi (slika 3b). Vsota vseh zunanjih sil, ki delujejo na kapljo medu je nič, zato se težišče kaplje giblje s konstantno hitrostjo proti desni. Hitrost kapljevine narašča od spodnje plošče v smeri proti zgornji plošči.

Različne plasti kapljevine (medu) se torej gibljejo z različno hitrostjo in zato vplivajo druga na drugo. Hitrejša zgornja plast vleče počasnejšo spodnjo plast, oziroma počasnejša spodnja plast zavira hitrejšo zgornjo plast. Med plastemi delujejo strižne sile, oziroma notranje trenje med plastemi ali **viskoznost**. Notranjega trenja ni, če se vsi deli tekočine gibljejo z enako hitrostjo po velikosti in smeri.

Viskoznost je posledica sil med molekulami v sosednjih plasteh kapljevine, ki se gibljejo z različno hitrostjo ter posledica preskakovanja molekul med sosednjimi plastmi. Rezultate natančnejše analize zgoraj opisanega poskusa z medom med dvema steklenima ploščama lahko strnemo v enačbo (zakon o viskoznosti):

$$\frac{F}{S}=\eta\frac{v}{z} \quad , \tag{3}$$

kjer je *S* površina dotikališča kapljevine (medu) z zgornjo, oziroma spodnjo stekleno ploščo, $\frac{F}{S}$ je strižna napetost in $\frac{v}{z}$ strižna hitrost. Sorazmernostni koeficient η z enoto $\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}^2}$ imenujemo **viskoznost**.



Slika 4

V diferencialni obliki zapišemo zakon o viskoznosti kot:

$$\boxed{\frac{F}{S}=\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}} \quad . \tag{4}$$

11. Opis gibanja tekočin

Molekule, ki sestavljajo tekočino, v splošnem niso sferično simetrične. V toku tekočine se zato lahko zgodi, da se podolgovate molekule usmerijo vzdolž toka, zaradi česar snovne lastnosti tekočine niso več enake v vseh smereh. Take tekočine so **anizotropne**. V tem poglavju bomo obravnavali le gibanje **izotropnih** tekočin, katerih snovne lastnosti niso odvisne od smeri v prostoru.

Druga pomembna predpostavka je privzetek **kontinuuma,** ki je sprejemljiv pri zadostnem številu molekul tekočine. V kubičnem centimetru zraka pri normalni temperaturi in tlaku, je $2.7\cdot10^{19}$ molekul. Zaradi tega dejstva je praktično nemogoče, da bi gibanje tekočine opisali z gibalnimi enačbami za posamezne molekule, zato povprečimo molekularne lastnosti gibanja v okviru kontinuumskega pristopa. V ta namen definiramo makroskopsko hitrost skupka molekul $\vec{v}$:

$$\vec{v}=\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}\vec{w}_s \ , \tag{5}$$

kjer je n število vseh molekul v skupku, $\vec{w}_s$ pa hitrost s-te molekule (ki je ne poznamo). Število n mora biti pri tem zadosti veliko. Očitno je, da je pogoj velikega števila molekul izpolnjen že v tako majhnem volumnu tekočine dV, da ga v primeri s celotnim volumnom obravnavanega sistema lahko privzamemo za infinitezimalnega. Tak skupek imenujemo **delček tekočine** ali **volumski element tekočine**. Masa delčka tekočine dm je določena z vsoto mas vseh molekul v njem in je končna:

$$\mathrm{d}m=\sum_{s=1}^{n}m_s \ , \tag{6}$$

kjer je m_s masa ene molekule. Pri tem privzamemo, da je masa dm zanemarljiva v primeri z maso celotnega obravnavanega volumna tekočine. V tej sliki je tekočina sestavljena iz velikanskega števila volumskih elementov tekočine, ki zapolnjujejo ves prostor. Pri tem pozabimo na molekule, diskretno snov iz mikroskopskega vidika pa zamenjamo z zvezno snovjo, ki jo imenujemo **kontinuum**. Delček tekočine tako določa osnovni gradnik kontinuuma, katerega pomembna lastnost je gostota, definirana z razmerjem med maso delčka tekočine in njegovim volumnom:

$$\rho=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} \ , \tag{7}$$

Mehanika kontinuumov je področje, v katerem uporabljamo nekatere matematične zakonitosti kljub temu da niso izpolnjeni vsi potrebni pogoji; na primer dV v enačbi (7) ne sme iti proti nič, kajti na molekularnih razdaljah gostota zaradi praznega prostora med molekulami, ni več zvezna funkcija.

Idealno nestisljive tekočine ni, saj vsaka tekočina prenaša zvočno valovanje, t.j. mehansko valovanje (glejte poglavje 17). Vendarle pa se v primerih, ko je velikost hitrosti tekočine v dosti manjša od hitrosti zvoka v tekočini, nestisljivost tekočine upravičeno privzame. Tekočine obravnavamo kot nestisljive pri kvocientih

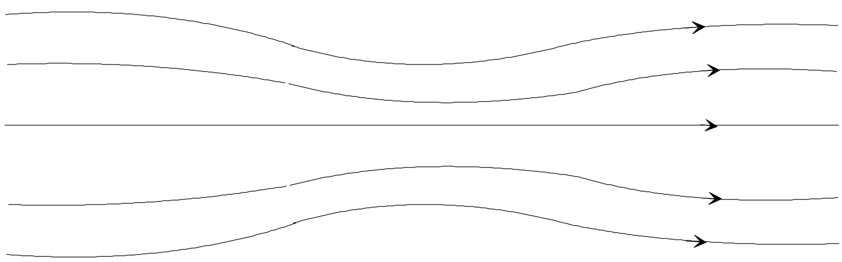
$$\frac{v}{c} \leq 0.002 \ , \tag{8}$$

kjer je c hitrost širjenja zvočnega valovanja v tekočini. V stisljivih tekočinah je odvisnost gostote od tlaka podana z **enačbo stanja**

$$\rho = \rho(p), \tag{9}$$

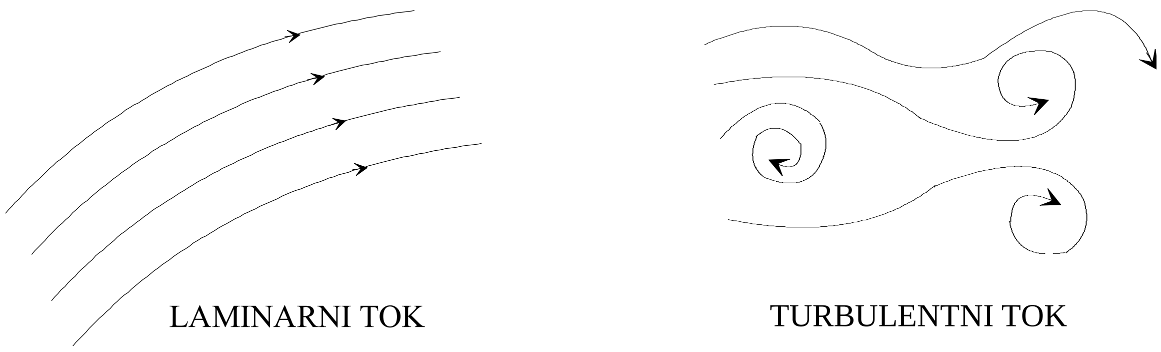
npr. enačbo stanja idealnega plina (glejte poglavje 18).

Trajektorija je krivulja, po kateri se giblje izbrani delček tekočine. Dobimo jo, če povežemo vse točke v prostoru skozi katere je šel opazovani delček v opazovanem časovnem intervalu. **Tokovnica** je krivulja, ki jo narišemo na trenutni sliki toka (glejte sliko 5), če na primer s kratkim ekspozicijskim časom slikamo tok vode z aluminijastim prahom. Delci prahu v ekspozicijskem času opravijo poti, na posnetku vidne kot kratke črtice, poravnane s smerjo vektorja hitrosti delcev v trenutku slikanja.



Slika 5: *Tokovnice.*

Tokovnico narišemo tako, da črtice gladko povežemo med seboj. Tangente na tokovnico kažejo v smer gibanja delčkov tekočine, preko katerih tokovnica poteka. Sistem tokovnic daje trenutno sliko gibanja tekočine, medtem ko sistem trajektorij daje celotno sliko gibanja. Tokovnice na isti sliki se zato ne morejo sekati, medtem ko se trajektorije lahko; isti volumski element v določenem trenutku poseduje le en vektor hitrosti, različna elementa tekočine pa v različnih časih lahko prehajata isto točko prostora. Tok tekočine, pri katerem so tokovnice urejene in gladko drsijo ena mimo druge, imenujemo **laminaren tok**. Drugačne lastnosti ima **turbulenten tok**. V njem se tokovnice krivijo v vrtince in se neprestano premeščajo.



Slika 6: *Tokovnice v laminarnem in turbulentnem toku.*

Zaradi enostavnosti pri opisovanju tekočinskega toka in izpeljavi gibalnih enačb v nadaljevanju, tok tekočine opazujemo v inercialnem kartezičnem koordinatnem sistemu.

Pri **Lagrangeovem** opisu tekočinski toka zasledujemo vsak delček tekočine. Delčke med seboj ločimo tako, da poznamo začetno lego $\vec{r}_0$ vsakega izmed njih. Lega delčka ob kasnejšem času je funkcija začetne lege in časa $\vec{r}=\vec{r}\left(\vec{r}_0,t\right)$. Podobno velja tudi za hitrost $\vec{v}=\vec{v}\left(\vec{r}_0,t\right)$ in ostale spremenljive količine, ki karakterizirajo delček tekočine, npr. gostoto $\rho=\rho\left(r_0,t\right)$. Lagrangeov opis se uporablja za opisovanje trajektorij, ki so določene z enačbo $\vec{r}=\vec{r}\left(\vec{r}_0,t\right)$.

Pri **Eulerjevem opisu** tekočinski tok opišemo s poljem vektorja hitrosti, t.j. **hitrostnim poljem**

$$\vec{v}\left(\vec{r},t\right)=\left(v_x\left(\vec{r},t\right),\ v_y\left(\vec{r},t\right),\ v_z\left(\vec{r},t\right)\right), \tag{10}$$

kjer so v_x, v_y in v_z komponente hitrosti v smeri izbranih koordinatnih osi. S hitrostnim poljem sta podani velikost in smer hitrosti v vsaki točki v območju toka ob poljubnem času, pri tem pa, za razliko od Lagrangeovega opisa, ni pomembna zgodovina delčka tekočine, ki se nahaja v določeni točki. Eulerjev opis nam da trenutno sliko tekočinskega toka, ki jo grafično prikažemo s tokovnicami. V primeru, da hitrostno polje ni vedno funkcija vseh spremenljivk $\vec{r}\left(x,y,z\right)$ in *t*, se opis toka poenostavi. če je hitrostno polje neodvisno od časa, pravimo, da je tok **stacionaren**. Če je hitrostno polje neodvisno od kraja, pravimo, da je tok **uniformen**. Tok, ki je odvisen vsaj od ene koordinate imenujemo neuniformen. Tak tok je lahko **enodimenzionalen**, če je odvisen le od ene koordinate, **dvodimenzionalen**, če je odvisen od dveh koordinat in **trodimenzionalen** v primeru odvisnosti od vseh treh koordinat v prostoru.

Tok tekočine v splošnem ni popolnoma opisan s hitrostnim poljem, zato večkrat vpeljemo še polja ostalih vektorskih ali nevektorskih količin, ki nas zanimajo: **polje tlaka** $p\left(\vec{r},t\right)$, **gostote** $\rho\left(\vec{r},t\right)$, **temperature** $T\left(\vec{r},t\right)$, **koncentracije** $c\left(\vec{r},t\right)$, . . .

Zapis količine v Eulerjevem opisu nima enake oblike kot zapis iste količine v Lagrangeovem opisu. Od Lagrangeovega na Eulerjev opis preidemo, če lege v prostoru r izrazimo s časom t ter začetnimi legami delčkov r_0, ki se ob času t nahajajo v opazovanem sistemu.

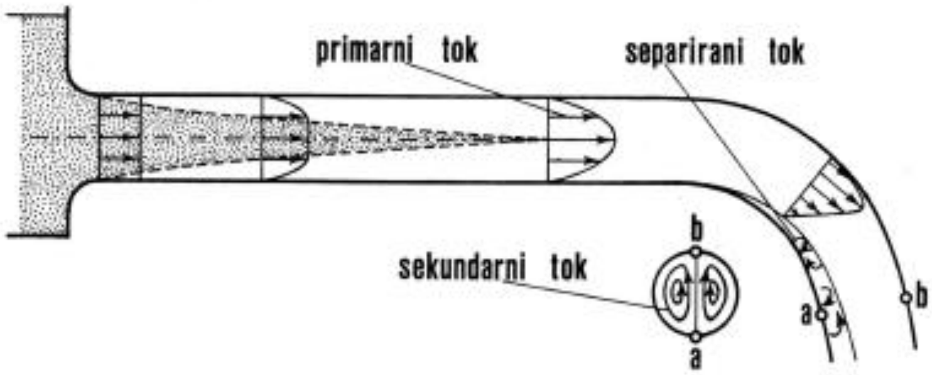
$$\vec{r} = \vec{r}\left(\vec{r}_0, t\right). \tag{11}$$

Hirost določenega delčka ob času t, ki ga v Lagrangeovem opisu karakterizira začetna lega r_0, v Eulerjevem opisu zato podamo kot

$$\vec{v} = \vec{v}\left(\vec{r}\left(\vec{r}_0, t\right), t\right). \tag{12}$$

12. Pretakanje viskozne tekočine po cevi

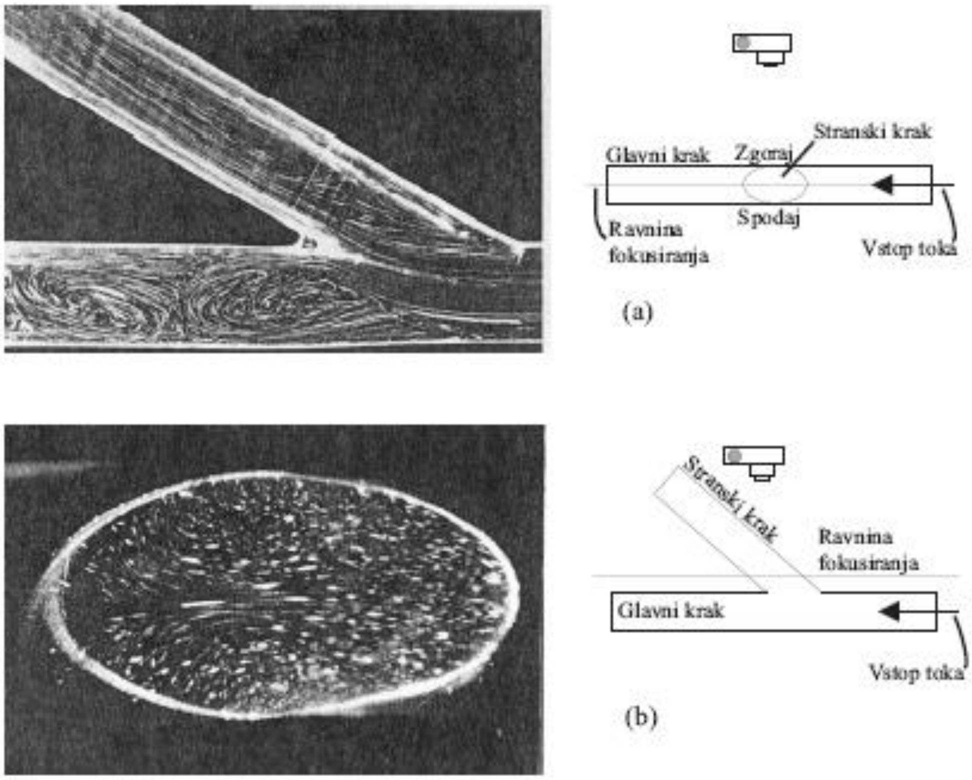
Tekočina ima ob vstopu v cev enakomeren hitrostni profil (slika 7). Zaradi viskoznosti se tekočina tik ob steni cevi prilepi nanjo. Tako se ustvari tanka mejna plast, v kateri so učinki viskoznosti pomembni (svetlo območje na sliki 7).



Slika 7:*Razvoj toka vzdolž cevi. Prisotnost temnega območja po vstopu v cev označuje področje, kjer tok še ni razvit. Sledi področje popolnoma razvitega toka, dokler ne pride do spremembe geometrije zaradi zavoja cevi. Prikazani sta tudi območji sekundarnega toka in separiranega toka zaradi spremembe geometrije cevi.*

Vzdolž toka se mejna plast širi, hitrostni profil pa spreminja, dokler ne doseže svoje končne oblike v tanki valjasti ravni cevi - paraboloida. Razdaljo, na kateri se tok popolnoma razvije, imenujemo vstopna dolžina. Na hitrostni profil toka vpliva sprememba geometrije cevi. V primeru toka skozi zavoj cevi pride do gibanja tekočine tudi prečno na smer povprečne hitrosti. Pravimo, da pride do nastanka sekundarnih in separiranih tokov. Na sliki 7 je prikazan nastanek sekundarnega toka sestavljenega iz dveh vrtincev, in separiranega toka, ki ga predstavlja počasno in neurejeno gibanje tekočine ob steni cevi. Zato v primeru toka tekočine po neravni cevi, ne moremo pričakovati paraboličnega profila.

Do spremembe hitrostnega profila pride tudi v razvejišču. Naredili so eksperiment (Huges and How, J. Biomech. Eng., 117: 224, 1995) pri katerem so 4,5% vodno raztopino NaCl z 0,1% polistirenskih mikrodelcev pretakali po razvejiščih cevi iz pleksi stekla. Na sliki 8a so prikazane trajektorije polistirenskih mikrodelcev v razvejišču s stičnim kotom 30^0. V glavnem kraku sta jasno vidna para nasprotno usmerjenih vrtincev. Hitrostni profil se spremeni tudi v stranskem kraku; vidno je območje, kjer se trajektorije zbližajo. Sklepamo, da je v tem območju prisoten upočasnjen tok ob zunanji strani kraka, ki predstavlja oviro hitrejšemu delu toka. Na sliki 8b je prikazan sekundarni tok, ki nastane v stranski cevi. Zraven fotografij je shema razvejišča, na kateri je vidna lega fotoaparata in ravnina fokusiranja.

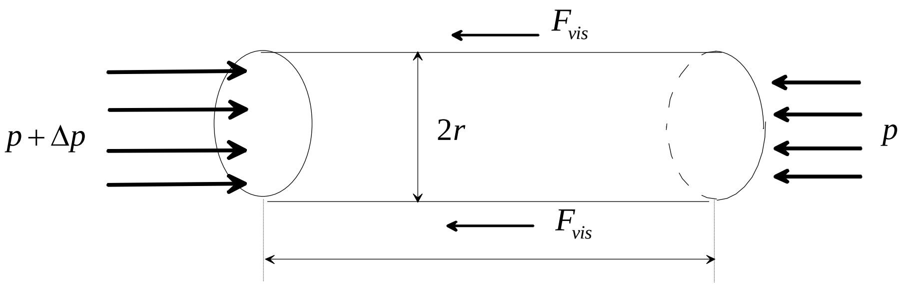


Slika 8: Fotografiji toka skozi cevno razvejišče. Struktura toka, ki nastane v glavnem in stranskem kraku razvejišča; (a) sekundarni tok v stranskem kraku. Pri obeh fotografijah je shema, ki prikazuje ravnino slikanja. Premer krakov je 8 mm, stični kot med krakoma pa 30^0 (Huges and How, 1995).

Poiseuille – Hagenov zakon

V nadaljevanju dokažemo, da je profil hitrosti pri laminarnem **razvitem** toku kapljevine skozi dolgo in tanko valjasto cev zares paraboličen (glejte še sliko 7). V cevi v mislih izločimo volumski element kapljevine v obliki valja s polmerom *r* in dolžino *l*, ki ga potiska v smeri toka sila zaradi razlike tlakov

$$\left[\left(p+\Delta p\right)-p\right]\pi r^2=\Delta p\,\pi r^2\,. \qquad (13)$$



Slika 9: *Sile, ki delujejo na valjasti element kapljevine.*

Vzdolž plašča obravnavanega valjastega elementa kapljevine, ki ima površino $S = 2\pi r \ell$ (glejte sliko 9), deluje zaviralna viskozna sila (glejte enačbo (4)):

$$F_{vis} = -\eta\left(2\pi r \ell\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}, \tag{14}$$

s katero zunanja počasnejša plast kapljevine, ki je na plašču v stiku z izbranim valjastim elementom kapljevine, zavira gibanje valjastega elementa kapljevine (slika 9). Ker se izbrani valjasti element kapljevine giblje enakomerno, mora biti potisna sila zaradi razlike tlakov Δp (enačba (13)) enaka zaviralni viskozni sili (enačba (14)):

$$\pi r^2 \Delta p = -\eta\left(2\pi r \ell\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}. \tag{15}$$

Enačbo (15) preuredimo, integriramo na levi od *r* do *R*, na desni pa od *v* do 0:

$$\frac{\Delta p}{\eta 2 \ell}\int_r^R r\,\mathrm{d}r = -\int_v^0 \mathrm{d}v, \tag{16}$$

kjer je *R* notranji polmer cevi. V enačbi (16) smo upoštevali, da je hitrost kapljevine ob notranji steni cevi enaka nič (glejte še sliki 3 in 4). Iz enačbe (16) sledi:

$$\frac{\Delta p}{\eta 2 \ell}\frac{r^2}{2}\Big|_r^R = v, \tag{17}$$

oziroma

$$\boxed{v = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}, \tag{18}$$

kjer je

$$v_0 = \frac{\Delta p R^2}{4\eta \ell}, \tag{19}$$

največja hitrost kapljevine v osi cevi pri r = 0. Vidimo, da enačba (18) podaja paraboličen profil hitrosti.

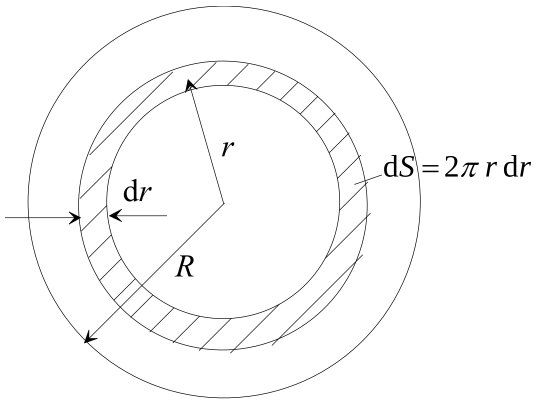
Pri pretakanju kapljevine po cevi nas običajno zanima volumski pretok

$$\Phi_v = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(Sx)}{\mathrm{d}t} = Sv\,. \tag{20}$$

Gornji izraz za volumski pretok predpostavlja, da je hitrost kapljevine (v) enaka po celotnem preseku cevi s površino S, kar v našem primeru ni res saj se hitrost kapljevine znotraj cevi spreminja (enačba (18)). Zato pretok izračunamo s pomočjo integracije pretoka skozi površine $\mathrm{d}S = 2\pi\, r\, \mathrm{d}r$ (glejte sliko 10), skozi katere se pretaka kapljevina z enako hitrostjo:

$$\Phi_v = \int \mathrm{d}\,\Phi_v = \int v(r)\,\mathrm{d}S = \int_0^R v(r)\, 2\pi\, r\mathrm{d}r = \int_0^R v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi\, r\mathrm{d}r = \frac{1}{2} v_0\, \pi\, R^2\,, \tag{21}$$

kjer smo upoštevali enačbo (18).



Slika 10

Če vstavimo v enačbo (21) izraz za v_0 (enačba (19)) dobimo:

$$\boxed{\Phi_V = \frac{\pi R^4}{8\eta\,\ell}\Delta p}\,. \tag{22}$$

Enačba (22) se imenuje **Poiseuille – Hagenov zakon.** Tok kapljevine po cevi za katerega velja Poiseuille – Hagenov zakon (enačbi (18) in (22)) imenujemo Poiseuille – Hagenov tok. Enačbo (22) lahko »po elektrotehniško« zapišemo tudi v obliki Ohmovega zakona ($I = \frac{U}{R}$):

$$\Phi_V = \frac{\Delta p}{R_V}\,, \tag{23}$$

kjer definiramo pretočni upor R_V kot:

$$R_V = \frac{8\eta\,\ell}{\pi\,R^4}\,. \tag{24}$$

Vidimo, da pretočni upor R_V narašča z naraščajočo viskoznostjo kapljevine η in naraščajočo dolžino cevi ℓ, pada pa z naraščajočim notranjim polmerom cevi *R*. Volumski pretok kapljevine skozi cev pretaka razlika tlakov med obema koncema cevi, tako kot poganja električni tok po kovinski žici razlika električnih potencialov (napetost) med obema koncema žice.

Primer: Pretakanje krvi po žilah

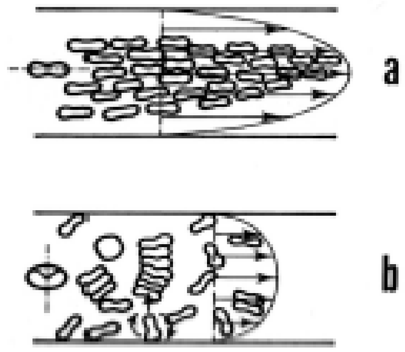
Poiseuille-Hagenov tok je posebej preprost sistem, za katerega lahko iz zakona gibanja dobimo analitična izraza za hitrostni profil (enačba (18)) in prostorninski tok (enačba (22)). Če pa opustimo nekatere omejitve, ki določajo Poiseuille-Hagenov tok (obravnavamo še drugačne oblike cevi, časovno odvisne pojave, upoštevamo razen strižnih sil zaradi viskoznosti tekočine še vplive drugih sil, obravnavamo tudi stisljive tekočine) in zapišemo zakone gibanja za obravnavani sistem, pa ponavadi ne moremo dobiti analitičnih izrazov za hitrost tekočine in ostale količine, ki nas zanimajo. V takih primerih enačbe, ki izhajajo iz zakonov gibanja za tekočino, rešimo numerično.

Pri opisu tekočinskega toka realnega sistema nas zanima, kako se teoretične napovedi ujemajo z opažanji. Obravnavamo sistem, ki je pomemben pri vzdrževanju življenjskih funkcij – krvni obtok. Črpalka krvnega obtoka je srce. Srce poganja kri v arterije, ki se delijo na manjše arterije, arteriole in preko predkapilarnih sfinktrov v kapilare, kjer poteka izmenjava snovi s tkivi. Kapilare se potem združijo v venule, majhne vene in večje vene, ki dovajajo kri v srce. Hitrost krvi je največja v velikih žilah. Z deljenjem arterij se njihov polmer manjša, njihovo število pa veča, tako da se skupni presek veča, hitrost krvi pa manjša. V aorti je povprečna hitrost krvi približno 0.2 m/s, v kapilari pa približno $3 \cdot 10^{-4}$ m/s.

Zanima nas, v kolikšni meri so za pretakanje krvi po žilah izpolnjeni pogoji, ki določajo Poiseuille-Hagenov tok (enačbi (18) in (22)). Na nekaterih mestih sicer lahko opišemo geometrijo žil kot ravno valjasto cev s stalnim presekom, upoštevati pa moramo, da je krvni obtok razvejan sistem, da žile nimajo povsod okroglega preseka, da pride do razvejišč in stikov žil ter da pride v obtoku do zavojev ali kakih drugih sprememb v geometriji.

Viskoznost krvi ni povsod v obtoku neodvisna od hitrosti krvi. Kri opišemo kot vodno raztopino nizkomolekularnih organskih in anorganskih snovi in proteinov, v kateri plavajo krvne celice in lipoproteini. Rdeče krvne celice (eritrociti) so dovolj velike in številne, da njihova prisotnost vpliva na mehanske lastnosti normalne krvi. Zaradi prisotnosti eritrocitov viskoznost normalne krvi pri dani temperaturi ni stalna, pač pa je med drugim odvisna od hitrosti gibanja krvi in prostorninskega deleža eritrocitov. Meritve kažejo, da se pri velikih hitrostih krvi eritrociti gibljejo po sredini žil (slika 11a), kjer so strižne sile med celicami in plazmo najmanjše, viskoznost krvi pa skoraj neodvisna od hitrosti krvi. Celice zaradi sil, s katerimi tekočina deluje nanje, zavzamejo prolatno (cigaretasto) obliko, kar je naznačeno z rotacijsko osjo na sliki 11a. Pri majhnih hitrostih so eritrociti bolj enakomerno porazdeljeni po preseku žile (slika 11b), njihova oblika pa je podobna krofu. Poveča se verjetnost interakcij med celicami, zato se tvorijo skupki in viskoznost naraste.

Tok skozi žile ni povsod stacionaren. Srce črpa kri v obliki pulzov, kar se prenaša tudi na žile, ki imajo zaradi svoje strukture specifične elastične lastnosti.



Slika 11: *Gibanje eritrocitov v žili pri velikih hitrostih krvi (a) in pri majhnih hitrostih krvi (b). Vidimo, da pri majhnih hitrostih krvi pride do nastanka skupkov eritrocitoov. Črtkani črti označujeta ustrezni rotacijski osi celice.*

Te se vzdolž obtoka spreminjajo, kar omogoča, da je tok skozi kapilare, kjer poteka izmenjava snovi s tkivi, kar se da počasen in stacionaren.

Ugotovimo tudi, da je tok krvi v žilah pretežno **laminaren**, kar pa ne velja v velikih arterijah in venah, pa tudi v okolici razvejišč, kjer se lahko pojavijo območja separiranih tokov in sekundarni tokovi (glejte še sliki 7 in 8), ki jih sestavljajo vrtinci. Pravimo, da je tok tam **turbulenten** (glejte še sliko 6).

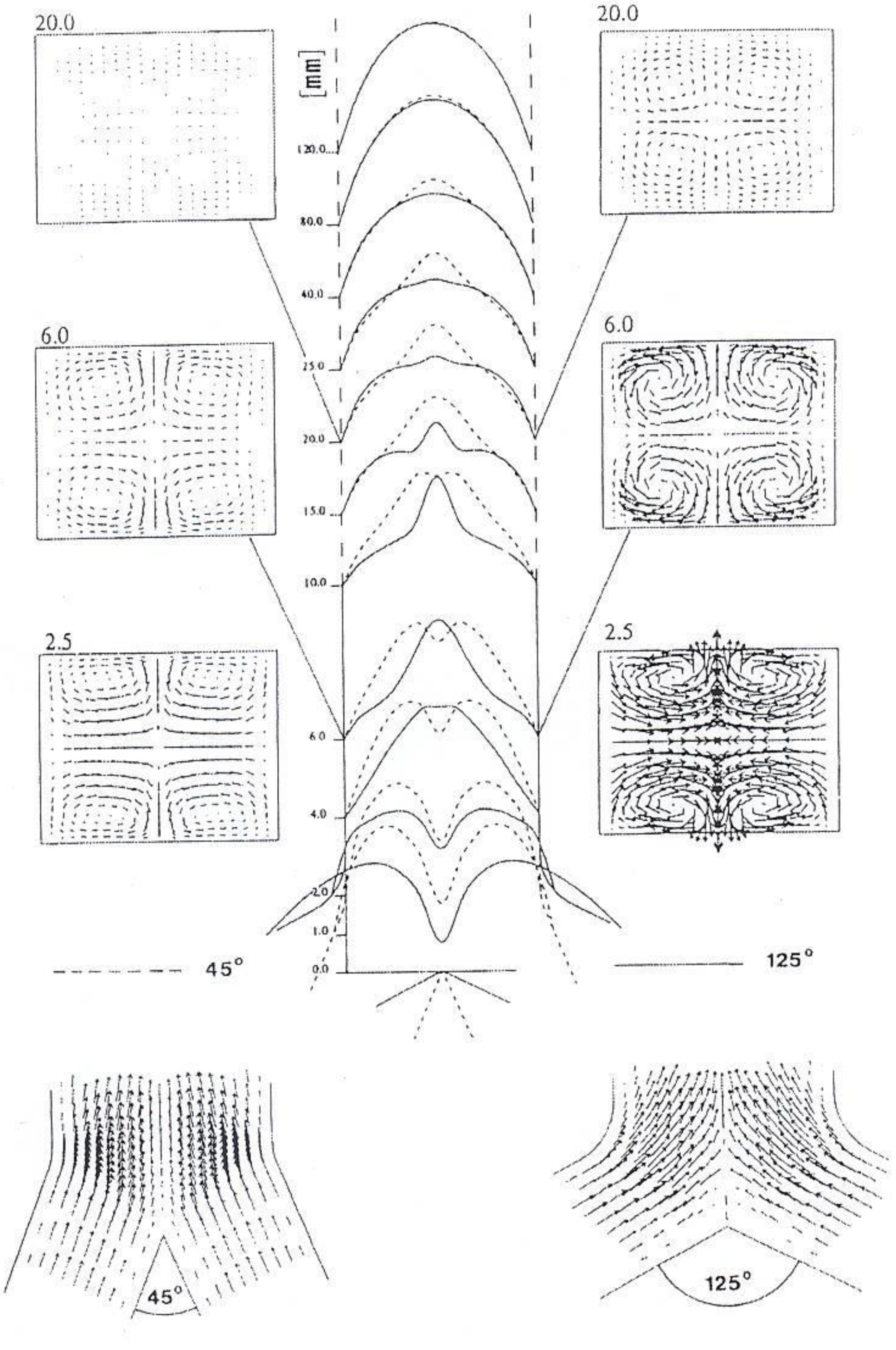
Poiseuille-Hagenov zakon (enačba (18), oziroma (22)) uporabimo, če nam zadostuje groba ocena in opis nekaterih kvalitativnih lastnosti sistema. Pove nam, da je pri uravnavanju pretoka skozi žile najbolj učinkovita sprememba dimenzije žile. Na osnovi Poiseuille-Hagenovega zakona (enačba (22)) ocenimo, da pri dani tlačni razliki Δp sprememba polmera žile r za 1% povzroči spremembo volumskega pretoka krvi Φ_v za 4%. Obratno, če neki organ potrebuje določeno količino krvi za svojo funkcijo, je tlačna razlika, ki je potrebna, da črpa to količino krvi, odvisna od polmera žil. Za določen prostorninski pretok zmanjšanje polmera žil za 1% povzroči 4% povečanje tlačne razlike. Visok arterijski tlak je navadno povezan z zoženjem žil, lahko pa vplivamo nanj tako, da s sproščanjem gladkih mišic v žilni steni povečamo polmer žil. Drug pomemben način zmanjšanja pretočnega upora (enačba (24)) žil predstavlja zmanjšanje viskoznosti krvi.

Pri obravnavanju pojavov, pri katerih je pomembno tudi turbulentno pretakanje krvi, sestava krvi v žilah, časovno odvisni pojavi in elastične lastnosti žil, izhajamo iz splošnejših zakonov gibanja za kapljevine. Izkaže se, da lahko ti pojavi vplivajo na nekatere pomembne funkcije krvnega obtoka. Ugotovili so, da v arterijah v bližini razvejišč in stikov pride do arterosklerotičnih poškodb žil in nastajanja krvnih strdkov. Strdek lahko zamaši žilo na mestu, kjer je nastal, lahko pa se tudi odtrga, potuje s krvnim obtokom in zamaši katero od življenjsko pomembnih žil. Vzrok nastanka in razvoja krvnih strdkov je le delno raziskan, dosedanja opažanja pa kažejo, da pri tem igrajo pomembno vlogo tudi mehanske lastnosti krvi in žil, ki vplivajo na tok krvi v okolici spremenjene geometrije.

Kot primer obravnavamo tok skozi vertebro-bazilarni stik (slika 12). Bazilarna arterija, ki nastane z združitvijo dveh vertebralnih arterij, preskrbuje krvni obtok možganov. Stični kot, pod katerim se arteriji združita, variira pri človeku med 10^0 in 160^0. Meritve in teoretične napovedi kažejo, da velikost stičnega kota pomembno vpliva na hitrostno polje toka krvi skozi stik.

Hitrostno polje je bilo izmerjeno na modelu izdelanem iz pleksi-stekla, ki ima podobna razmerja in velikost kot vertebro-bazilarni stik pri človeku, in izračunano za ta model z **uporabo metode končnih elementov**. Na sliki 12 sta prikazana tako dobljeno hitrostno polje in hitrostni profil primarnega toka skozi modelni vertebro-bazilarni stik pri dveh stičnih kotih: $45^0 \text{in} 125^0$. Na sliki 12 je v sredini prikazano spreminjanje hitrostnega profila primarnega toka v frontalnem prerezu skozi modelno bazilarno arterijo, spodaj je prikazano hitrostno polje tik ob stiku, ob straneh pa je prikazano hitrostno polje sekundarnega toka vzdolž modelne bazilarne arterije pri treh različnih oddaljenostih od stika. Presek modelnih arterij je pravokoten, kar pa ne predstavlja pomembnih razlik v hitrostnem polju, ki nas zanima. Dolžina puščice predstavlja velikost hitrosti, smer puščice pa smer hitrosti. Vidimo, da oblika hitrostnega profila na dovolj veliki oddaljenosti od stika postaja podobna parabolični pri obeh stičnih kotih. Na stiku pride zaradi spremembe *v* v geometriji cevi do nastanka sekundarnega toka, ki ga tvorijo štirje vrtinci. Sekundarni tok (glejte še sliko 7) zamre vzdolž primarnega toka. Pri velikih stičnih kotih je sekundarni tok močnejši in se ohranja dlje. V bližini stika nastane separirani tok, ki ima lahko tudi nasprotno smer od primarnega (glejte še sliko 7). Ta pojav je bolj izrazit pri večjem stičnem kotu.

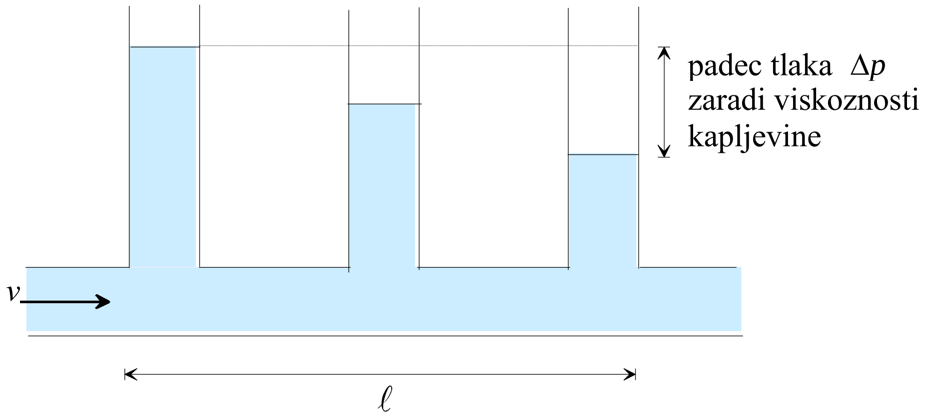
Študij aterosklerotičnih poškodb vertebro-bazilarnega stika kaže, da je več arterosklerotičnih poškodb žil pri večjih stičnih kotih, ki predstavljajo večje spremembe v geometriji. Podobne pojave so opazili tudi na mestih večjih sprememb v geometriji drugih žil, predvsem v okolici razvejišč arterij. Možnost zdravljenja pri zoženju ali zamašitvi arterije predstavlja premostitev z naravno ali pa z umetno žilno protezo. Ker je za nadaljnji razvoj arteriosklerotičnih poškodb žil in za nastajanje krvnih strdkov pomembno hitrostno polje tekočine in s tem geometrija sistema, je koristno poseg načrtovati tako, da je hitrostno polje najugodnejše.



Slika 12: *Hitrostni profil toka skozi vertebro-bazilarni stik ter hitrostni polji primarnega in sekundarnega toka za dva različna stična kota 45^0 in 125^0, kot je označeno. Polje primarnega toka je podano v frontalnem prerezu skozi sredino bazilarne arterije, polje sekundarnega toka pa v prerezu pravokotno na smer primarnega toka, pri čemer je označena oddaljenost preseka od stika (v mm). Dolžina puščice predstavlja velikost hitrosti, smer puščice pa smer hitrosti tekočine.(Ravensbergen in sod., J. Biomechanics, 29:281,1996).*

13. Bernoullijeva enačba

Iz enačbe (22) (Poiseuille – Hagenov zakon) je razvidno, da tlak v gibajoči se viskozni kapljevini pada v smeri toka kapljevine po vodoravni cevi, katere prerez se ne spreminja (slika 13). Padec tlaka Δp je večji za bolj viskozne tekočine (glejte enačbo (22)).

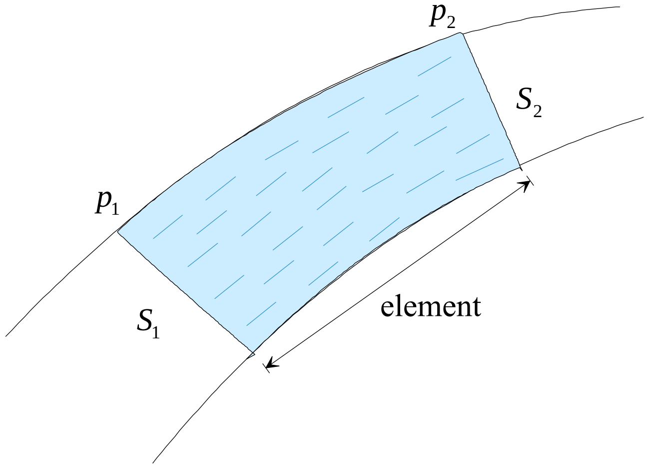


Slika 13

V kapljevini, katere viskoznost je zelo majhna ($\eta \to 0$), je padec tlaka Δp tudi zelo majhen ($\Delta p \to 0$). V limiti $\eta \to 0$ ($\Delta p \to 0$) lahko torej zanemarimo izgube zaradi premagovanja viskoznih sil in zapišemo izrek o kinetični in potencialni energiji za **element** kapljevine (slika 14) kot (glejte še sliko 15):

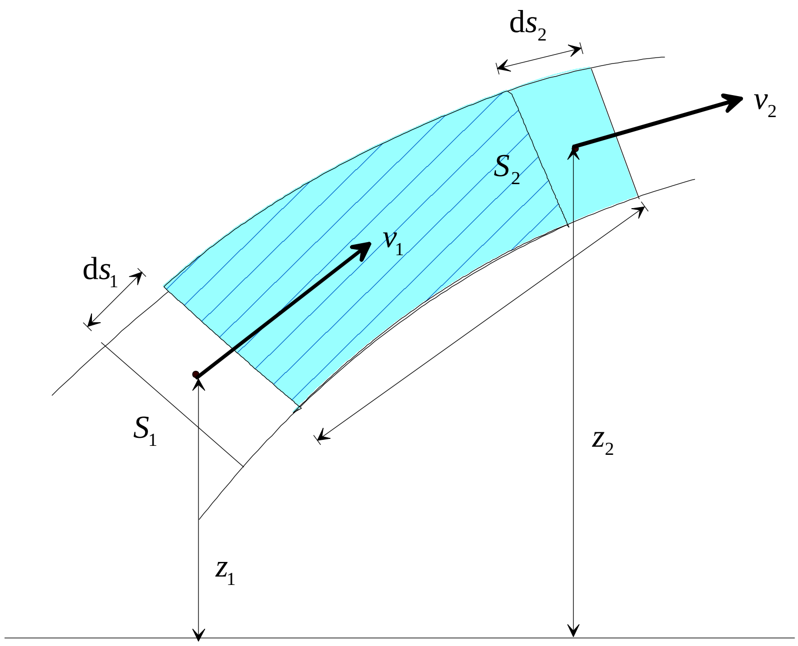
$$p_1 S_1 \, ds_1 - p_2 S_2 \, ds_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} + m_2 g z_2 - m_1 g z_1 \quad , \tag{25}$$

kjer je $p_1 S_1 \, ds_1$ delo sile $p_1 S_1$ s katero spodnja kapljevina potiska izbrani element kapljevine navzgor, $-p_2 S_2 \, ds_2$ pa je delo sile $p_2 S_2$ s katero element kapljevine odriva kapljevino nad seboj:



Slika 14

Prejeto delo $p_1 S_1 \mathrm{d}s_1$ povečuje kinetično in gravitacijsko potencialno energijo kapljevinskega elementa, oddano delo $-p_2 S_2 \mathrm{d}s_2$ pa zmanjšuje kinetično in potencialno energijo elementa. Pri stacionarnem laminarnem gibanju kapljevine se hitrost kapljevine na danem mestu ne spreminja s časom. Kinetična energija osrednjega dela elementa (črtkano na sliki 15) se tako pri premiku zgornje meje elementa za $\mathrm{d}s_2$ (spodnje meje pa za $\mathrm{d}s_1$) ne spremeni.



Slika 15

Sprememba kinetične energije in gravitacijske potencialne energije elementa pri premiku zgornje meje za $\mathrm{d}s_1$ je tolikšna kot da bi del tekočine z volumnom $S_1 \mathrm{d}s_1$ in hitrostjo v_1 na spodnjem delu elementa prenesli na zgornji del elementa, kjer ima sedaj hitrost v_2 in volumen $S_2 \mathrm{d}s_2$ (glejte enačbo (25)). Če predpostavimo, da kapljevina ni stisljiva velja:

$$S_2 \mathrm{d}s_2 = S_1 \mathrm{d}s_1 \ , \tag{26}$$

gostota kapljevine (ρ) pa je povsod enaka. Iz enačb (25) in (26) tako sledi:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_2 - \rho g z_1 , \tag{27a}$$

kjer smo upoštevali $m_1 = \rho S_1 ds_1 = m_2 = \rho S_2 ds_2$. Iz enačbe (27a) sledi:

$$\boxed{p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2} \ . \tag{27}$$

Enačbo (27) imenujemo Bernoullijeva enačba. Bernoullijeva enačba torej predpostavlja, da za stacionarni laminarni tok neviskozne in nestisljive kapljevine velja:

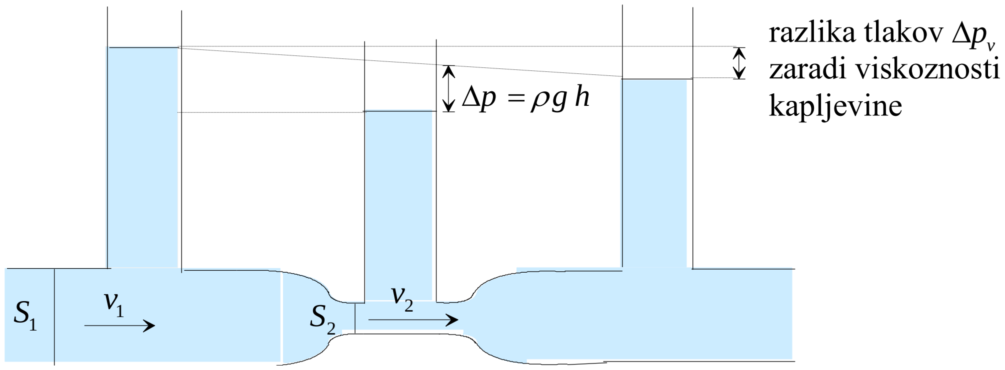
$$p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho g z=\text{konst.} \tag{28}$$

Primer uporabe Bernoullijeve enačbe: Venturijeva cev

Za primer vodoravnega pretakanja kapljevine po cevi s spremenljivim presekom iz Bernoullijeve enačbe sledi, da se tlak zmanjša na mestih, kjer se hitrost kapljevine zaradi zmanjšanega preseka cevi poveča. Omenjeni pojav si poglejmo na primeru Venturijeve cevi (slika 16), ki jo lahko uporabljamo za meritev volumskega pretoka kapljevine

$$\Phi_v=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=S\,v\,, \tag{20}$$

kjer je S površina preseka cevi in v hitrost kapljevine.



Slika 16

Na mestu, kjer se Venturijeva cev zoži in ima površino preseka S_2, se hitrost kapljevine poveča. Zaradi ohranitve volumskega pretoka po cevi velja:

$$S_1 v_1=S_2 v_2\ , \tag{29}$$

kjer sta S_1 in v_1 površina preseka cevi in ustrezna hitrost v nezožanem delu cevi. Ker je Venturijeva cev vodoravna, lahko spremembo gravitacijske potencialne energije zanemarimo ($z_1 \approx z_2$), torej:

$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2\ , \tag{30}$$

od koder sledi

$$\Delta p=p_1-p_2=\frac{1}{2}\rho v_2^2-\frac{1}{2}\rho v_1^2\ . \tag{31}$$

Iz enačbe (29) izrazimo $v_2=\dfrac{v_1 S_1}{S_2}$ in jo vstavimo v enačbo (31):

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left[\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right], \tag{32}$$

od koder sledi:

$$v_1 = \left[\frac{2\Delta p}{\rho}\frac{S_2^2}{S_1^2 - S_2^2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{33}$$

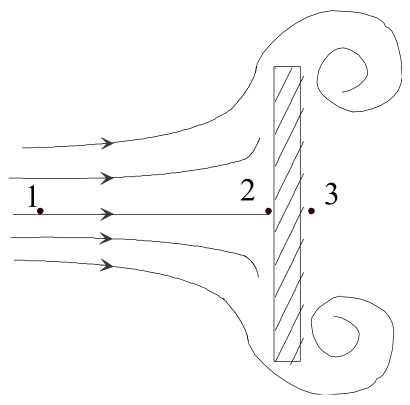
Sedaj lahko izračunamo tudi v volumski pretok skozi cev:

$$\Phi_v = S_1 v_1 = \left[\frac{2\Delta p\, S_1^2\, S_2^2}{\rho\left(S_1^2 - S_2^2\right)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{34}$$

Vidimo, da lahko s pomočjo merjenja tlačne razlike $\Delta p = \rho g h$ (slika 16) določimo volumski pretok skozi cev.

Primer uporabe Bernoullijeve enačbe: ocena velikosti zastojnega tlaka

Obravnavamo kapljevino, ki teče s hitrostjo v in zadane ob ploščato oviro, kjer se ji hitrost kapljevine zelo zmanjša (slika 17). Zaradi zaustavitve se tlak v skladu z Bernoullijevo enačbo poveča za Δp. Ob oviri se tokovnice razdelijo. Za naše izračune izberemo dve točki na osrednji tokovnici, ki se ob plošči ustavi. Z v_1 in p_1 označimo hitrost in tlak v točki 1, z v_2 in p_2 pa hitrost in tlak v točki 2. Referenčna točka 1 je postavljena tako daleč od ovire, da je kapljevina tam še nemotena ($v_1 = v,\ p_1 = p$). Predpostavimo, da je tlak v točki 3 v vrtincu za oviro tudi približno enak p. V točki 2 pred oviro, kjer kapljevina zastane pa je hitrost $v_2 \approx 0$ in tlak $p_2 = p + \Delta p$.



Slika 17: *Tokovnice ob ploščati oviri.*

Zapišimo Bernoullijevo enačbo za točki 1 in 2:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2\ , \tag{35}$$

kjer upoštevamo, da je $z_1 = z_2$. Ob upoštevanju oznak za hitrost in tlak v točkah 1 in 2 se enačba (35) transformira v:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p + \Delta p \ , \tag{36}$$

oziroma

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho v^2 \, . \tag{37}$$

Razlika tlakov med točkama 1 in 2 (Δp) je približno enaka razliki tlakov med točkama 1 in 3 (glejte še sliko 17), zato je sila kapljevine na ploščasto oviro s površino *S* približno enaka:

$$F \approx \Delta p \, S = \frac{1}{2}\rho S v^2 \, . \tag{38}$$

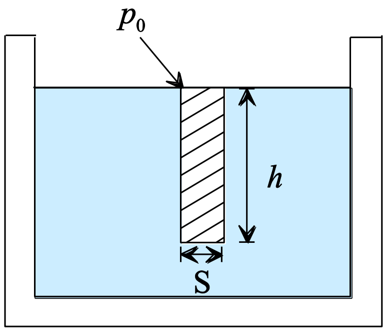
Razliko tokov Δp imenujemo zastojni tlak kapljevine (tekočine), ker je posledica zastoja kapljevine ob oviri.

14. Sile na telesa v tekočini

Sila vzgona

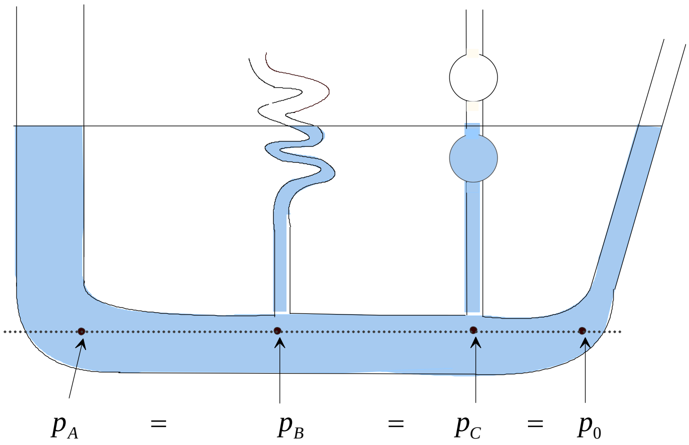
Tlak se zaradi teže kapljevine povečuje z globino. V nestisljivi kapljevini se povečuje linearno z globino. Če je tlak pri gladini p_0, je hidrostatični tlak na razdalji *h* od gladine kapljevine:

$$p = p_0 + \frac{mg}{S} = p_0 + \frac{\rho S h g}{S} = p_0 + \rho g h \, , \tag{39}$$



Slika 18

kjer *S* površina stolpca kapljevine, ρ gostota kapljevine in *g* gravitacijski pospešek. Kot smo omenili že na začetku deluje kapljevina na stene posode vedno v smeri pravokotno na površino stene posode (t.j. v smeri normale na površino). Rezultanta sile tlaka kapljevine na stene posode pa je ne glede na obliko posode vedno enaka sili teže celotne kapljevine v posodi.



Slika 19: *Tlak na določeni razdalji od gladine kapljevine je enak ne glede na obliko posode, ker stene posode prevzamejo del sile teže kapljevine.*

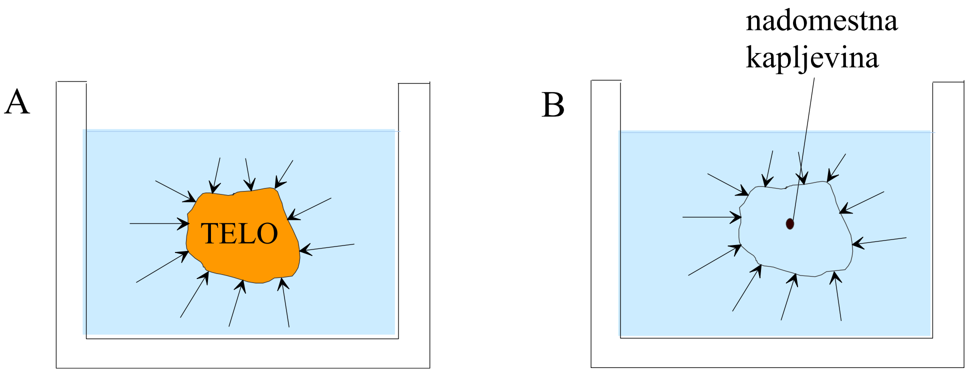
Če **potopimo** togo telo v kapljevino, deluje na njegovo površino z vseh strani sila tlaka v smeri pravokotno na njegovo površino. Rezultanta sile tlaka na površino telesa se imenuje **sila vzgona**. Velikost sile vzgona določimo s sledečim razmislekom. V kapljevino (z gostoto ρ) potopljeno togo telo (z gostoto ρ_0 in volumnom *V*) (slika 20A) v mislih nadomestimo s kapljevino (slika 20B). Pri tem se pritisk okolne kapljevine na mejno ploskev ne spremeni. V primeru nadomestne kapljevine pa vemo, da je rezultanta sile tlaka okolne kapljevine na nadomestno kapljevino v ravnovesju enaka sili teže nadomestne kapljevine $V\rho g$, torej:

$$\int p\,\mathrm{d}\vec{S} + V\rho\vec{g} = \vec{0}, \tag{40}$$

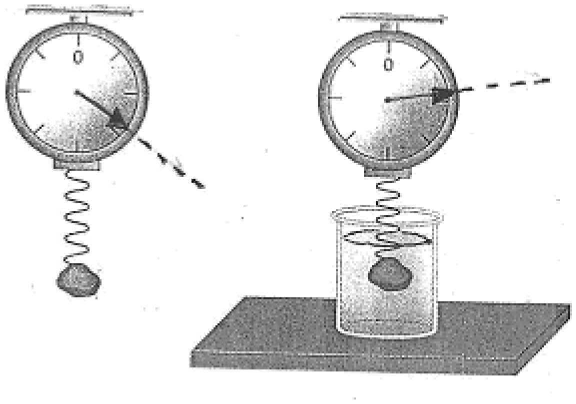
zato je sila vzgona

$$\vec{F}_{vzg} = \int p\mathrm{d}\vec{S} = -V\rho\vec{g} \ . \tag{41}$$

Vidimo torej, da je sila vzgona enaka teži izpodrinjene kapljevine in usmerjena v nasprotni smeri kot gravitacijski pospešek $\vec{g}$, se pravi navzgor. Sila vzgona prijemlje v težišču izpodrinjene kapljevine.

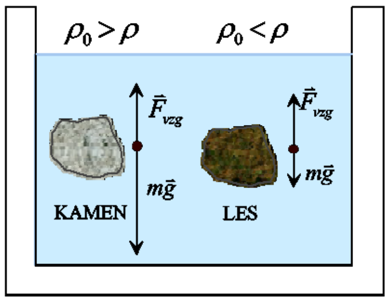


Slika 20: *K računanju sile vzgona.*

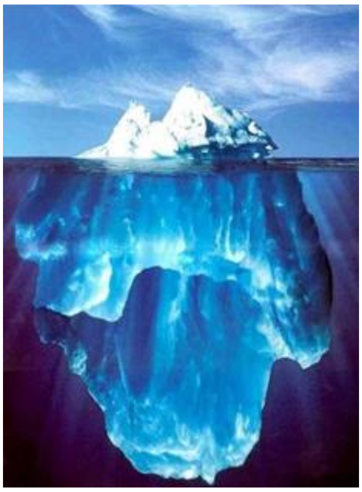


Slika 21: *Zaradi sile vzgona je potopljeno telo navidezno lažje (Serway, 1990).*

Če je gostota telesa ρ_0 večja od gostote kapljevine ρ, telo v kapljevini pada. Če pa je gostota telesa ρ_0 manjša od gostote kapljevine ρ, se potopljeno telo v kapljevini dviga (slika 22) in v ravnovesnem stanju štrli iz kapljevine. Tako kot na primer štrli iz morja vrh ledene gore (slika 23).

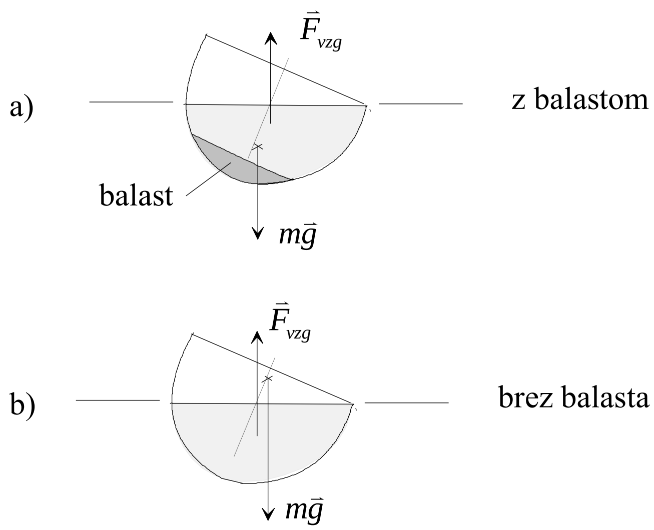


Slika 22: *Padanje in dviganje teles v kapljevini.*



Slika 23: *V primeru ledene gore štrli iz morja le njen manjši del, ker gostota ledu ni dosti manjša od gostote morske vode.*

V zvezi s silo vzpona omenimo še, da je pri ladjah zelo pomembno, da imajo na dnu zadosti težak balast. Z balastom namreč dosežemo, da je prijemališče sile vzgona $\vec{F}_{vzg}$ nad prijemališčem sile teže ladje $m\vec{g}$ (slika 24a). V tem primeru namreč navora sil $\vec{F}_{vzg}$ in $m\vec{g}$ pri odklonu ladje iz ravnovesne lege vračata ladjo nazaj proti ravnovesni legi (slika 24a). Če pa je prijemališče sile vzgona pod prijemališčem sile teže (slika 24b), pa pri odklonu ladje iz ravnovesne lege navora sil $\vec{F}_{vzg}$ in $m\vec{g}$ zavrtita ladjo iz ravnovesne lege, zato se ladja prevrne.

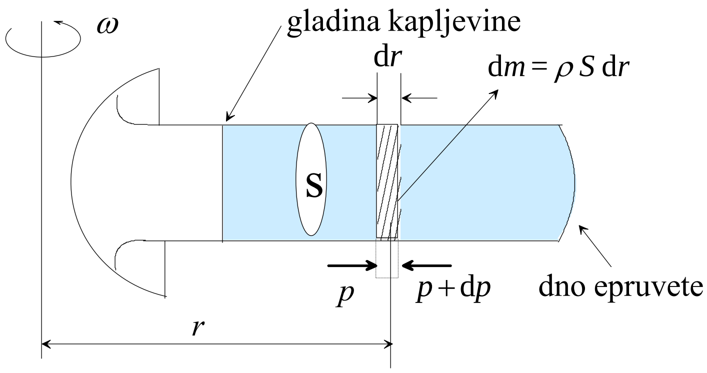


Slika 24: *Sile pri nagibanju ladje.*

Rotacijski vzgon (centrifugalna separacija)

Vzemimo, da steklena epruveta, ki je napolnjena s kapljevino, kroži v centrifugi okrog navpične osi s konstantno kotno hitrostjo ω (slika 25).

dm = masa tanke plasti kapljevine
ρ = gostota kapljevine
S = površina notranjega preseka epruvete
dV = volumen tanke plasti kapljevine



Slika 25

Na del kapljevine (tanko plast) z maso dm, ki se nahaja na razdalji r od osi vrtenja, kapljevina z zunanjosti pritiska s tlakom ($p + \mathrm{d}p$), z notranjosti pa z manjšim tlakom p (glejte sliko 25).

Rezultantna centripetalna sila $\mathrm{d}F_{rv} = S\,\mathrm{d}p$ je usmerjena proti osi vrtenja in poskrbi za radialni pospešek kapljevine z maso d*m* pri enakomernem kroženju s kotno hitrostjo ω:

$$\mathrm{d}\,F_{rv} = \rho\,\mathrm{d}V\,r\,\omega^2, \tag{42}$$

kjer je $\mathrm{d}V = \mathrm{d}r\,S$ volumen rezine kapljevine (glejte sliko 25).

Silo $\mathrm{d}\,F_{rv}$ imenujemo rotacijski vzgon, če tanko plast kapljevine na razdalji *r* in volumnom d*V* nadomestimo z enako velikim telesom z gostoto ρ_0. Da telo z gostoto ρ_0 in volumnom d*V* kroži na razdalji *r* s kotno hitrostjo ω, mora nanj delovati centripetalna sila.

$$\mathrm{d}F_{cp} = \rho_0\,\mathrm{d}V\,r\,\omega^2\,. \tag{43}$$

V horizontalni smeri pa je na voljo edino sila rotacijskega vzgona $\mathrm{d}F_{rv} = \rho\,\mathrm{d}V\,r\,\omega^2$ (enačba (42)). Če je $\rho_0 > \rho$ je rotacijski vzgon prešibak, da bi poskrbel za kroženje telesa na razdalji *r*, zato se telo med kroženjem epruvete telo odmika od osi vrtenja in približuje dnu epruvete. Nasprotno , pa za $\rho_0 < \rho$ telo vleče proti osi vrtenja, to je proti gladini kapljevine v epruveti. Na osnovi povedanega lahko zaključimo, da telo, ki je gostejše od kapljevine v vrteči epruveti vleče v smeri proti dnu epruvete telo, ki pa je redkejše od kapljevine pa vleče v smeri proti gladini kapljevine v epruveti.

Rotacijski vzgon v epruveti, ki se vrti v centrifugi, izkoriščamo za separacijo sestavin krvi. Gostejše komponente v vrteči se krvi se bolj približujejo dnu epruvete, najredkejše pa se naberejo pri gladini.

Stokes-ov zakon (linearni zakon upora)

Telo, ki se giblje po viskozni kapljevini, vleče s seboj neposredno sosednjo plast kapljevine. Bolj oddaljene plasti kapljevine se gibljejo tem bolj počasi, čim bolj so oddaljene od gibajočega se telesa. Daleč od telesa je kapljevina povsem nemotena, kot da se telo sploh ne bi gibalo. Izračun sile upora (F_u), ki deluje na telo pri počasnem gibanju skozi viskozno tekočino je zelo zapleten. Tukaj navajamo samo rezultat za primer gibanja okroglega telesa s polmerom *r* skozi kapljevino z viskoznostjo η:

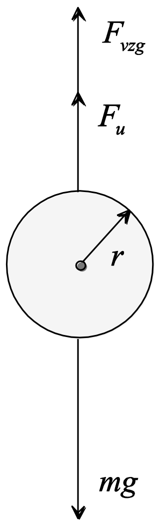
$$F_u = 6\pi\,r\,\eta\,v\,, \tag{44}$$

kjer je *v* hitrost telesa. Enačbo (44) imenujemo tudi Stokes-ov zakon.

Ob navajanju Stokes-ove enačbe omenimo še preprost način za merjenje viskoznosti kapljevine. Merimo stacionarno hitrost kroglice s polmerom *r* in gostoto ρ_0, ki pada v viskozni tekočini z viskoznostjo η. Napišimo najprej Newtonov zakon za gibanje (padanje) kroglice v viskozni kapljevini:

$$ma = mg - F_{vzg} - F_u\,, \tag{45}$$

kjer je m masa kroglice, g gravitacijski pospešek, F_{vzg} sila vzgona, $F_u = 6\pi r \eta v$ sila upora in a pospešek kroglice. Če naj kroglica pada, mora biti gostota kroglice (ρ_0) večja od gostote kapljevine (ρ).



Slika 26: *V stacionarnem stanju je vsota vseh sil, ki delujejo na kroglico enaka nič.*

Obravnavamo stacionarno stanje (slika 26), ko je pospešek kroglice $a = 0$, hitrost kroglice pa konstantna: $v = v_s = \text{konst.}$ Iz enačbe (45) tako sledi:

$$0 = \frac{4\pi r^3}{3}\rho_0 g - \frac{4\pi r^3}{3}\rho g - 6\pi r \eta v_s \quad ,$$

(46)

kjer je $\frac{4\pi r^3}{3}$ volumen kroglice s polmerom r. Iz enačbe (46) po krajšem računu dobimo:

$$\boxed{\eta = \frac{2r^2(\rho_0 - \rho)g}{9v_s}} \quad . \tag{47}$$

Stacionarno hitrost padanja v_s določimo tako, da izmerimo čas padanja za znano višinsko razliko.

Kvadratni zakon upora

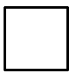
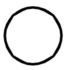
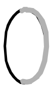
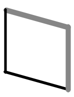
Linearni zakon upora (Stokes-ov zakon) za gibanje telesa v viskozni tekočini velja le pri zadosti majhnih hitrostih telesa (*v*). Pri velikih hitrostih telesa pa bolje velja kvadratni zakon upora, ko je sila upora sorazmeren kvadratu velikosti telesa. Lahko si mislimo, da sta linearni in kvadratni zakon prvi in drugi člen v razvoju sile upora v potenčno vrsto kot funkcije hitrosti (do vključno kvadratnega člena). Rezultat resnejših analiz pa kažejo, da velja linearni zakon upora ($F_u \propto v$), če je tako imenovano Reynoldsovo število

$$\mathrm{Re} = \frac{\mathrm{d}\rho v}{\eta} \tag{48}$$

manjše od 1, kvadratni zakon upora ($F_u \propto v^2$) pa v primerih, ko je Reynoldsovo število večje od 1000. V zgornji enačbi (48) je d linearna dimenzija telesa prečno na smer gibanja ($2r$ v primeru kroglice s polmerom r), ρ gostota kapljevine, η viskoznost kapljevine in v hitrost telesa. Reynoldsovo število je majhno pri počasnem gibanju majhnih teles v močno viskozni tekočini. Veliko Reynoldsovo število pa kaže, da je hitrost velika, telo veliko, viskoznost η pa majhna. Veliko Reynoldsovo število torej pomeni, da lahko **prispevek viskoznih sil k sili upora zanemarimo**. Zato lahko ocenimo silo upora kar s pomočjo enačbe (38), ki podaja silo na oviro v toku kapljevine zaradi zastojnega tlaka. Vseeno je namreč ali se giblje tekočina in telo (ovira) miruje, ali pa tekočina miruje in se telo giblje. Pomembna je edino relativna hitrost. Spomnimo se tudi, da je bila enačba (38) izpeljana s pomočjo Bernoullijeve enačbe, ki v celoti zanemari vpliv viskoznih sil v kapljevini (tekočini).Torej na osnovi enačbe (38) zapišemo naslednji izraz za silo upora:

$$F_u = c_u \frac{1}{2} \rho S v^2 , \tag{49}$$

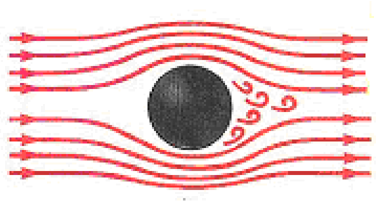
kjer koeficient upora c_u podaja odvisnost sile upora od **oblike telesa** in odvisnost od **orientacije telesa** proti smeri vektorja hitrosti telesa. Hitrost v v enačbi (49) je vedno relativna hitrost telesa glede na tekočino.

oblika		c_u
	kocka	1.1
	votla polkrogla	0.4
	votla polkrogla	1.4
	krogla	0.5
	okrogla plošča	1.1
	kvadratna plošča	1.2
	aerodinamično telo	0.03 –0.1

Slika 27: *Koeficient upora c_u v odvisnosti od oblike telesa.*

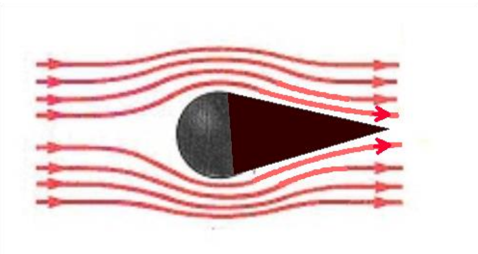
Uporu, ki ga opisuje enačba (49) pravimo tudi **dinamični upor**, ker je pri velikih hitrostih telesa in malo viskoznih kapljevinah (oz. tekočinah) za upor tekočine bolj kot vpliv viskoznosti pomemben **dinamičen učinek** telesa na tekočino (n.pr. pri hitrem gibanju telesa v zraku), ko gibajoče telo močno vpliva na spremembo hitrosti tekočine v okolici telesa. Zato je (v skladu z Bernoullijevo enačbo) upor posledica razlike tlakov pred in za telesom (glejte še razlago k enačbi (38)). Razlika tlakov pred in za telesom pa je odvisna od oblike telesa, pri čemer je zelo pomembna tudi oblika zadnje strani telesa, kjer nastajajo vrtinci (slika 28a). Zaradi vrtincev za telesom (slika 28a) je relativna hitrost tekočine za telesom drugačna, kar vpliva na razliko tlaka Δp pred in za telesom in s tem tudi na silo upora. Aerodinamična oblika telesa zmanjšuje nastanek vrtincev, zato ima telo s tako obliko majhen koeficient upora (glejte še sliko 28b). Na osnovi povedanega lahko torej zaključimo, čim močnejši vrtinci nastajajo ob in za gibajočim se telesom, tem večji je koeficient **dinamičnega** upora c_u .

a)



c_{u1}

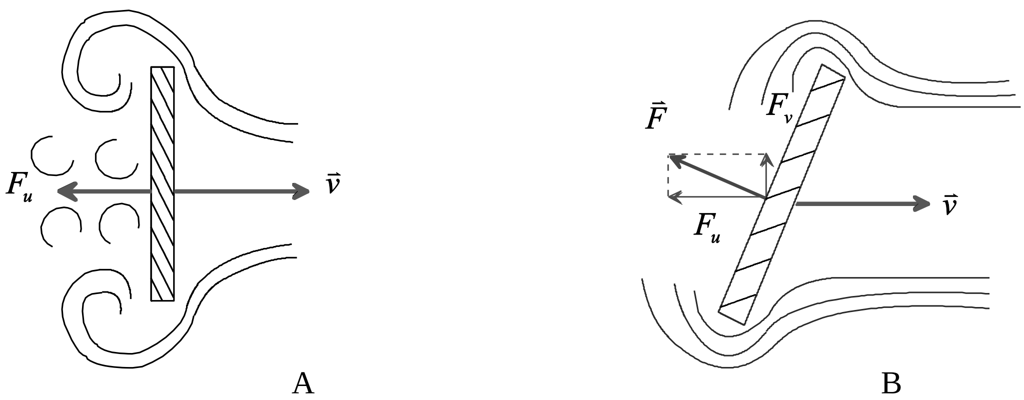
b)



$c_{u2} < c_{u1}$

Slika 28: *Vpliv oblike zadnjega dela telesa na tokovnice in koeficient dinamičnega upora* c_u.

Kot smo že omenili je dinamični upor odvisen od orientacije simetrijske osi telesa glede na smer vektorja hitrosti. Tako je na primer sila upora tekočine na gibajočo ploščo, ki je nagnjena glede na smer hitrosti, približno pravokotna na ploščo (slika 29B).



Slika 29: *Gibanje ploščatega telesa v tekočini*.

V tem primeru (slika 29B) razstavimo silo upora $\vec{F}$ na komponento v nasprotni smeri od smeri relativne hitrosti $\vec{v}$:

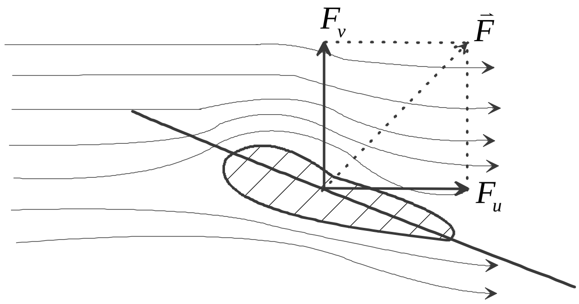
$$F_u = c_u \frac{1}{2} \rho S v^2 , \tag{50a}$$

in komponento v prečni smeri:

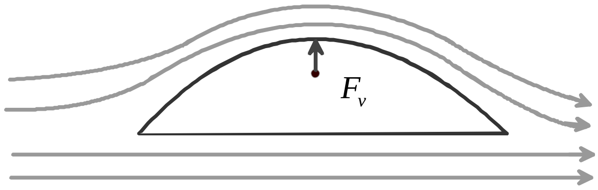
$$F_v = c_v \frac{1}{2} \rho S v^2 , \tag{50b}$$

kjer je c_u koeficient (dinamičnega) upora in c_v koeficient **dinamičnega vzgona**.

Dinamični vzgon je zelo pomemben pri letalskem krilu (za letala na propelerski pogon), ki je **nagnjeno** glede na vzdolžno os letala (slika 30a). V manjši meri je pri letalskem krilu za silo dinamičnega vzgona pomembna tudi sama oblika krila, ki je nesimetrična. Večja zaobljenost (ukrivljenost) letalskega krila na zgornji strani ima za posledico zgostitev tokovnic na zgornji strani krila, kar z drugimi besedami pomeni, da je relativna hitrost zraka ob zgornji površini večja kot ob spodnji manj ukrivljeni (ravni) strani krila (slika 30b). V skladu z Bernoullijevo enačbo to pomeni, da je tlak ob zgornji površini krila manjši kot tlak ob spodnji površini krila in posledično sila zaradi te razlike tlakov (dinamični vzgon) kaže vertikalno (slika 30b). Vendar pa kot rečeno za dinamičen vzgon letalskega krila propelerskega letala je precej bolj



Slika 30a



Slika 30b

bistvena nagnjenost krila glede na vzdolžno os letala (slika 30a) kot pa zaobljenost krila na zgornji strani (slika 30b), kar pokaže že preprost poskus, ki ga naredimo pri predavanjih. Pri letalskem krilu (propelerskega letala) je torej koeficient dinamičnega vzgona c_v odvisen od oblike krila (v manjši meri) in od njegovega naklona glede na smer gibanja (v večji meri). Če je krilo bolj nagnjeno, se poveča c_v, vendar pa se hkrati poveča tudi c_u. Razmerje $\frac{c_v}{c_u}$ je enako razmerju $\frac{F_v}{F_u}$ (glejte enačbi 50a in 50b) Pri dani obliki krila propelerskega letala je naklon letalskega krila optimalen če je razmerje

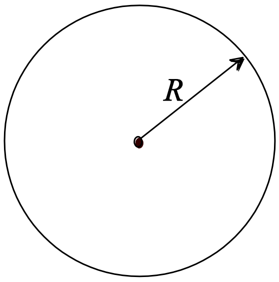
$$\frac{c_v}{c_u} = \frac{F_v}{F_u} , \tag{51}$$

največje.

15. Laplace-ova enačba

Pierre Simon markiz de Laplace
(1749 – 1827)

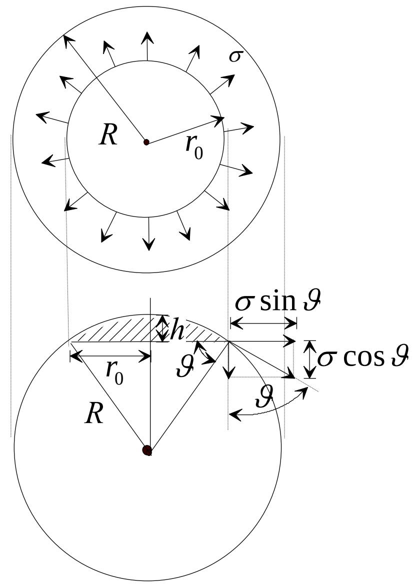
Že na začetku tega poglavja smo omenili, da je mirujoča kapljica v breztežnem prostoru okrogla, ker ima na ta način pri danem volumnu najmanjšo površino in s tem tudi najmanjšo površinsko energijo (glejte še enačbi (1a) in (1b)). Površinska napetost na površini kapljice je vzrok, da je tlak v notranjosti kapljice večji od zunanjega tlaka. Razlika tlakov Δp je večja za večje površinske napetosti σ in manjše polmere kapljice R, oziroma večje ukrivljenosti $C = \frac{1}{R}$ (slika 31) površine kapljice, kar bomo dokazali v nadaljevanju.



Slika 31: *Ukrivljenost kapljice* $C = \frac{1}{R}$.

Obravnavamo **ravnovesje** dela površine kapljice, kar pomeni, da mora biti vsota vseh sil na obravnavani del površine kapljice enaka nič. Kot smo že omenili, predpostavljamo, da je tlak v kapljici za Δp večji od tlaka zunaj kapljice. Zapišemo ravnovesni pogoj v smeri normale (ki je hkrati simetrijska os) dela površine kapljice v obliki krogelnega odseka (črtkani del površine kapljice na sliki 32):

tloris:



$\cos\vartheta = \dfrac{r_0}{R}$

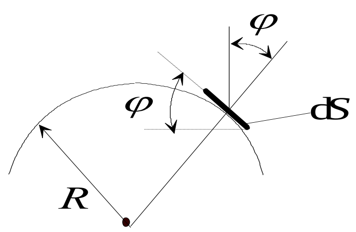
stranski pogled:

Slika 32: *Ravnovesje dela površine kroglaste kapljice.*

$$2\pi\, r_0\, \sigma \cos\vartheta = \Delta p\, \pi\, r_0^2 \ , \tag{52}$$

kjer smo upoštevali, da je rezultanta sile zaradi razlike tlakov Δp, ki deluje na plašč krogelnega odseka s površino $2\pi\, R h$ (glejte še sliko 32), enaka:

$$\Delta p \int \mathrm{d}S \cos\varphi = \Delta p \int \mathrm{d}S' = \Delta p\, \pi\, r_0^2 \ . \tag{53}$$



Slika 33: *K računanju sile zaradi razlike tlakov Δp.*

Iz enačbe (52) izrazimo razliko tlakov Δp:

$$\Delta p = \frac{2\sigma\cos\vartheta}{r_0}\ , \tag{54}$$

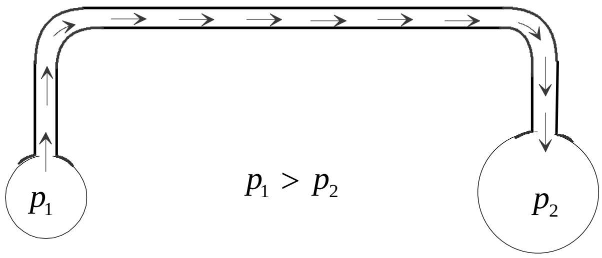
in v dobljeni izraz vstavimo relacijo $r_0 = R\cos\vartheta$ (glejte sliko 32):

$$\Delta p = \frac{2\sigma\cos\vartheta}{R\cos\vartheta} = \frac{2\sigma}{R}\ . \tag{55}$$

Če bi namesto kapljice obravnavali mehurček iz milnične opne, kjer imamo zunanjo in notranjo površino opne (glejte še sliko 2e na str. 110) se enačba (55) transformira v:

$$\Delta p = \frac{4\sigma}{R} . \tag{56}$$

Vidimo, da je v mehurčku z manjšim polmerom R večja razlika tlakov. Če imamo dva različna mehurčka pri istem tlaku na zunanji strani, je torej tlak v manjšem mehurčku večji. Če torej v eksperimentu povežemo dva mehurčka z različnim polmerom, se bo začel zrak pretakati iz manjšega mehurčka v večjega (slika 34).

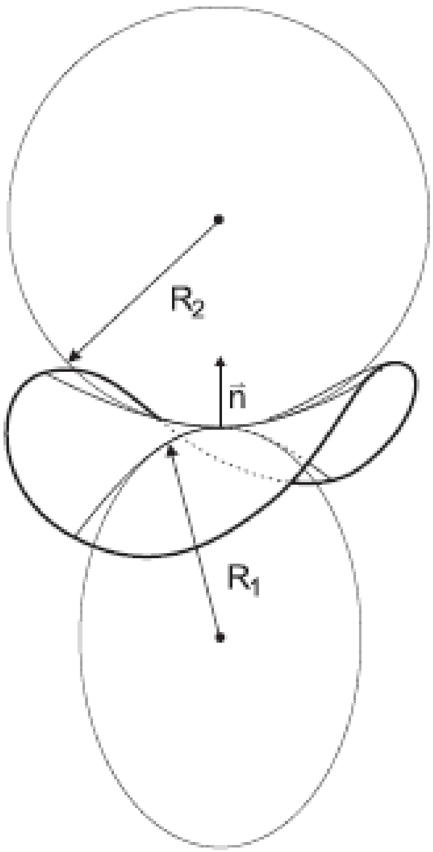


Slika 34: *Pretakanje zraka iz manjšega mehurčka v večji mehurček*

Enačbo (55) smo izpeljali za poseben primer sferične kapljice. Če površina kapljice ni sferična, se enačba (55) zapiše v posplošeni obliki kot:

$$\boxed{\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)} \; , \tag{57}$$

kjer sta R_1 in R_2 glavna krivinska radija površine kapljice v izbrani točki, $C_1 = \frac{1}{R_1}$ in $C_2 = \frac{1}{R_2}$ pa ustrezni glavni ukrivljenosti (glejte še sliko 35). Enačba (57) se imenuje **Laplace-ova enačba.**



$$C_1 = \frac{1}{R_1}$$

$$C_2 = \frac{1}{R_2}$$

Slika 35: *Shematski prikaz glavnih ukrivljenosti sedlaste površine, ki ima* $C_1 > 0$ *in* $C_2 < 0$.

Dodatek: K definiciji glavnih krivinskih radijev R_1 in R_2

Lego izbrane točke T na površini telesa (ali na ploskvi) opišemo z dvema parametroma u in v, tako da tvorimo vektorsko funkcijo:

$$\vec{r}\left(u,v\right)=\left(x_1\left(u,v\right),x_2\left(u,v\right),x_3\left(u,v\right)\right) \text{ ,} \qquad (58)$$

kjer so $x_i\left(u,v\right)$ koordinate vektorja $\vec{r}$. Vektorsko funkcijo $\vec{r}\left(u,v\right)$ parcialno odvajamo. Odvajamo vsako komponento posebej. V našem primeru odvajamo vektorsko funkcijo $r\left(u,v\right)$ po u in v:

$$\vec{r}_u\left(u,v\right)=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}, \qquad (59)$$

$$\vec{r}_v\left(u,v\right)=\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}, \qquad (60)$$

Vektorja $\vec{r}_u$ in $\vec{r}_v$ določata tangentno ravnino, normalni presek pa je ravnina, ki gre skozi normalo na ploskev v točki T (vektor $\vec{n}$ na sliki 35). Presečišče normalnega preseka s ploskvijo skozi T določa krivuljo na ploskvi (površini). Ukrivljenosti te krivulje pravimo ukrivljenost normalnega preseka in jo označimo z $C=\frac{1}{R}$, kjer je R krivinski polmer, to je polmer kroga, ki se najbolj prilega krivulji (glejte še sliko 35).

S pomočjo zamudne matematične procedure (glejte na primer A. Iglič in V. Kralj-Iglič: Izbrana poglavja iz fizike mehke snovi, 2006 in I. Vidav: Višja matematika) lahko poiščemo tiste smeri v tangentni ravnini, kjer doseže ukrivljenost normalnega preseka maksimalno in minimalno vrednost. Ustrezni ukrivljenosti površine označimo z C_1 in C_2 in ju imenujemo glavni ukrivljenosti (slika 35). Pripadajoča glavna krivinska radija $R_1=\frac{1}{C_1}$ in $R_2=\frac{1}{C_2}$ sta polmera krožnic, ki se najbolj prilegata krivinama na krivuljah. Glavna krivinska radija R_1 in R_2 sta v vsaki točki ploskve (površine) natančno določena.

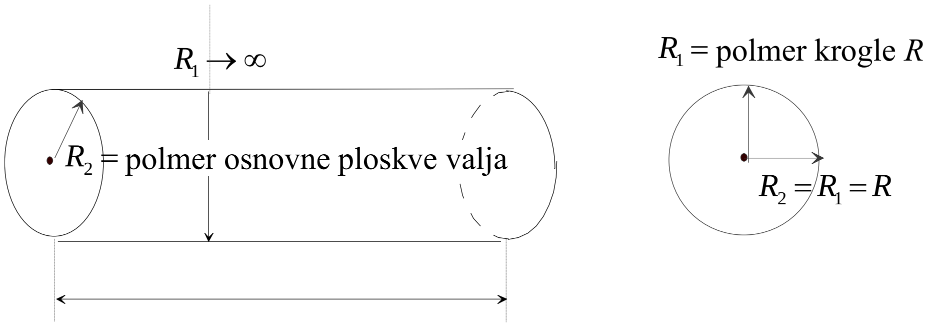
V primeru, da opisujemo ploskev z osno simetrijo okrog vertikalne koordinatne osi *y(x)*, dobimo za glavni ukrivljenosti naslednja izraza:

$$C_1=\frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (61)$$

$$C_2=\frac{y'}{x\left(1+y'^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \qquad (62)$$

kjer je $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ in $y'' = \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$. Predznaka glavnih ukrivljenosti običajno izberemo tako, da je ukrivljenost krogelne površine pozitivna.

Ilustrirajmo pomen glavnih ukrivljenosti na dveh enostavnih primerih, valju in krogli. V primeru valja je $R_1 = \infty$ in R_2 polmer osnovne ploskve valja, v primeru krogle pa sta obe glavni ukrivljenosti enaki (slika 36).



$$C_1 = \frac{1}{R_2}$$

$$C_2 = \frac{1}{R_1} \to 0$$

$$C_1 = \frac{1}{R_1} = C_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}$$

Slika 36: *Glavni ukrivljenosti valja in krogle.*

16. Young-ova enačba

Do sedaj smo se ukvarjali s kapljico, ki je bila v vakuumu oziroma v stiku s plinom. V nadaljevanju pa si bomo na kratko pogledali kaj se dogaja s kapljico na ravni površini trdne snovi ali stekla.

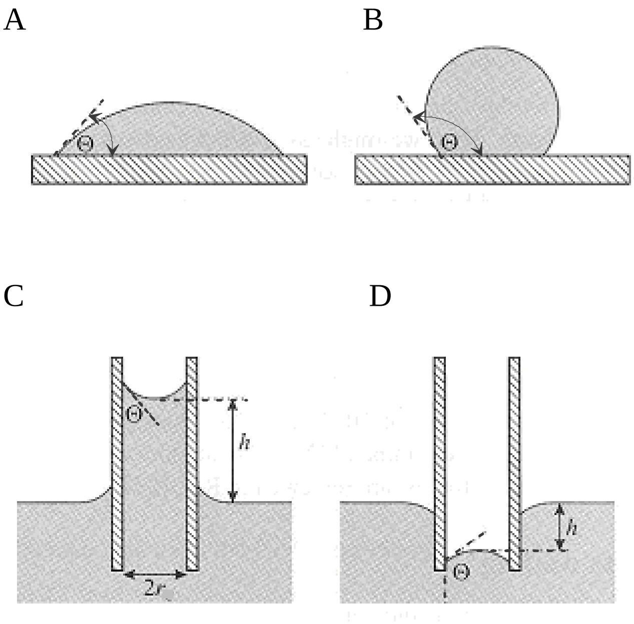
Thomas Young
(1773 – 1829)

Kapljica, ki pade na čisto stekleno površino se razmaže v tanek sloj. Ob steni čistega steklenega kozarca se gladina zakrivi navzgor, v tanki stekleni cevki (kapilari, pipeti) pa se voda dvigne (slika 37C). Rečemo, da voda **omoči** čisto stekleno površino (slika 37A). Nasprotno pa, če je steklo mastno, se voda ob stekleni površini kozarca zakrivi navzdol, v tanki stekleni cevki pa spusti navzdol (slika 37D). Na mastni ravni stekleni površini pa se naredi kapljica (slika 37B). Pravimo, da voda **ne moči** mastne steklene površine. Če razbijemo živosrebrni termometer, tudi vemo, da izlito živo srebro na stekleni površini tvori kapljice, torej ne moči steklene površine. Če na stekleno površino nanesemo tanek sloj nanodelcev, se tvorijo vodne kapljice (slika 39).

$\Theta =$ kontaktni kot

h = višina dviga (spusta)

r = notranji polmer kapilare



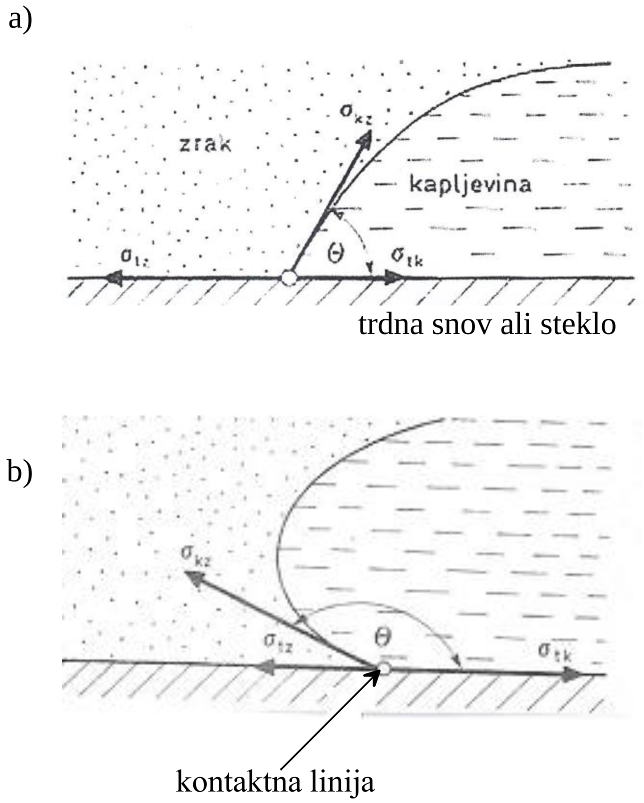
Slika 37: *Definicija kontaktnega kota* Θ.

Na sliki 37 je shematsko prikazana definicija **kontaktnega kota** Θ. Če kapljevino spustimo na ravno površino ločimo dve možnosti (po francoskem fiziku de Gennes-u). Če je kontaktni kot $\Theta = 0$ pravimo, da kapljevina **omoči** površino in se razleze v tanko plast. Če pa je kontaktni kot $\Theta > 0$ kapljevina **delno omoči** površino. Če je $\Theta > 90$ pravimo, da je površina hidrofobna, če pa je $\Theta \leq 90$ je površina hidrofilna.

V primeru $\Theta > 0$ nastane **kontaktna linija** (imenovana tudi linija omočenja), kjer se stikajo tri faze: kapljevinska, plinasta in trdna (steklena). Ker se v ravnovesju kontaktna linija ne premika v vodoravni smeri po površini trdne snovi (ali stekla), je vsota vseh sil zaradi površinskih napetosti enaka nič (glejte sliko 38):

$$\boxed{\sigma_{tz} = \sigma_{tk} + \sigma_{kz} \cos\Theta}\,, \tag{63}$$

kjer so σ_{tz}, σ_{tk} in σ_{kz} površinske napetosti na mejah trdna snov – zrak, trdna snov – kapljevina in kapljevina – zrak.



Slika 38: *Kapljevina na površini trdne snovi ali stekla (Kladnik: Visokošolska fizika).*

Enačbo (63) imenujemo **Young-ova enačba**. Iz enačbe (63) izrazimo kontaktni kot Θ:

$$\cos\Theta = \frac{\sigma_{tz} - \sigma_{tk}}{\sigma_{kz}} \quad . \tag{64}$$

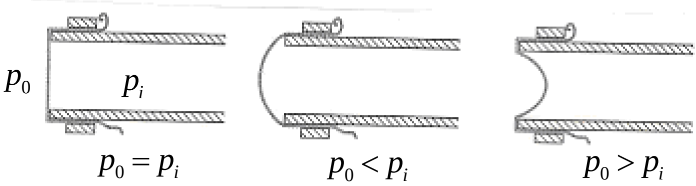
Kontaktni kot $\Theta < 90^0$ (slika 38a), če je $\sigma_{tz} > \sigma_{tk}$. Če pa je $\sigma_{tz} < \sigma_{tk}$ je $\cos\Theta < 0$ in torej $\Theta > 90^0$ (slika 38b). Če hočemo, da se kontaktni kot Θ poveča moramo torej povečati površinsko napetost na meji trdne snovi (ali steklo) – kapljevina (σ_{tk}). To lahko na primer dosežemo tako, da stekleno površino prevlečemo s plastjo nanodelcev (slika 39).

Iz enačbe (64) vidimo, da je za $\sigma_{tz} - \sigma_{tk} > \sigma_{kz}$, vrednost $\cos\Theta > 1$, kar seveda ni mogoče. Natančnejša analiza pokaže, da je v termodinamičnem ravnovesju $\sigma_{tz} - \sigma_{tk}$ vedno manjši od σ_{kz}. V termodinamičnem neravnovesju pa je $\sigma_{tz} - \sigma_{tk}$ v resnici lahko večji od σ_{kz}, kar pa ne prizadane veljavnosti enačbe (64), saj smo jo izpeljali iz ravnovesnega pogoja (enačba (63)).

Slika 39: *Tvorba vodnih kapljic na stekleni površini, ki je prekrita s tanko plastjo nanodelcev.*

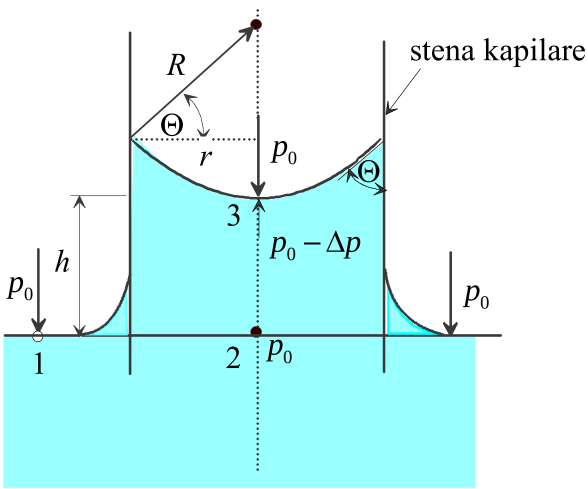
Kapilarni dvig (spust)

Na sliki 37 je shematsko prikazan kapilarni dvig (slika 37C) in kapilarni spust (slika 37D). Podoben pojav lahko opazujemo, če opazujemo obliko gumijaste membrane, ki zapira odprti konec valjaste cevke (slika 40). Če je tlak v cevki p_i enak zunanjemu tlaku p_0, je membrana ravna, za $p_0 < p_i$ je membrana izbočena navzven, za $p_0 > p_i$ pa se membrana upogne navznoter (slika 40).



Slika 40: *Oblika gumijaste membrane na koncu cevke.*

Vrnimo se h kapilari, ki vertikalno prebada gladino kapljevine (slika 37C, 37D). Najprej obravnavamo primer, ko je kontaktni kot $\Theta < 90^0$ (slika 37C). Razmere so podrobneje shematsko prikazane na sliki 41.



Slika 41: *Dvig kapljevine v kapilari.*

Ker je gladina vbočena, je tlak v tekočini tik pod gladino za Δp manjši kot zunanji zračni tlak p_0 (slika 41). Na dnu dvignjenega stolpca kapljevine z višina *h* v točki 2 je tlak enak tlaku v točki 1 zunaj kapilare, saj med točkama 1 in 2 ni tokov. Ker je tlak v točki 1 enak zunanjemu zračnemu tlaku p_0, je torej tudi tlak v točki 2 na dnu dvignjenega stolpca enak p_0. Tlak na površini stolpca v točki 3 pa je manjši za prispevek hidrostatičnega tlaka (enačba (39)), torej manjši za

$$\Delta p = \rho g h, \tag{65}$$

kjer je ρ gostota kapljevine. Če privzamemo, da je površina gladine v kapilari na sredini (v okolici točke 3) del krogelne površine s polmerom *R* iz Laplace-ovega zakona (enačba (57)) za krogelno površino (kjer je $R_1 = R_2 = R$) sledi (glejte še enačbo (55)):

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} \ , \tag{66}$$

kjer je σ površinska napetost. Iz enačb (65) in (66) pa dobimo:

$$\rho g h = \frac{2\sigma}{R},$$

oziroma,

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g R}. \tag{67}$$

Na sliki 41 vidimo, da (približno) velja:

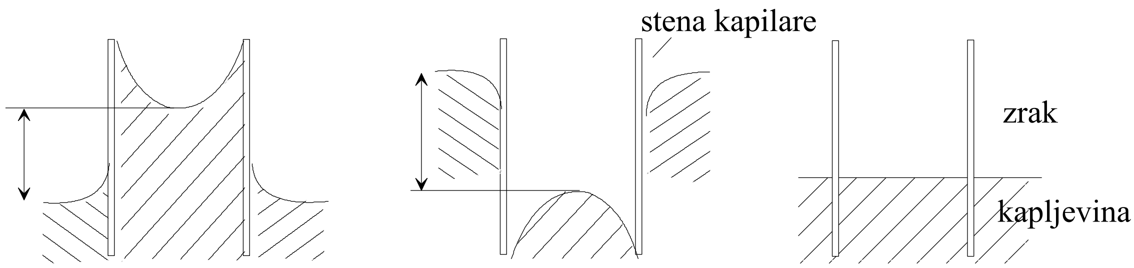
$$\cos\Theta = \frac{r}{R}. \tag{68}$$

Iz enačb (67) in (68) tako sledi:

$$\boxed{h = \frac{2\sigma \cos\Theta}{\rho g r}} \quad , \tag{69}$$

kjer je r notranji polmer kapilare (slika 41). Enačba (69) velja tudi za primer, ko se gladina v kapilari spusti, kjer je $\Theta > 90^0$, od koder sledi $\cos\Theta < 0$ in $h < 0$ (glejte še sliko 42).

KAPILARNI DVIG KAPILARNI SPUST

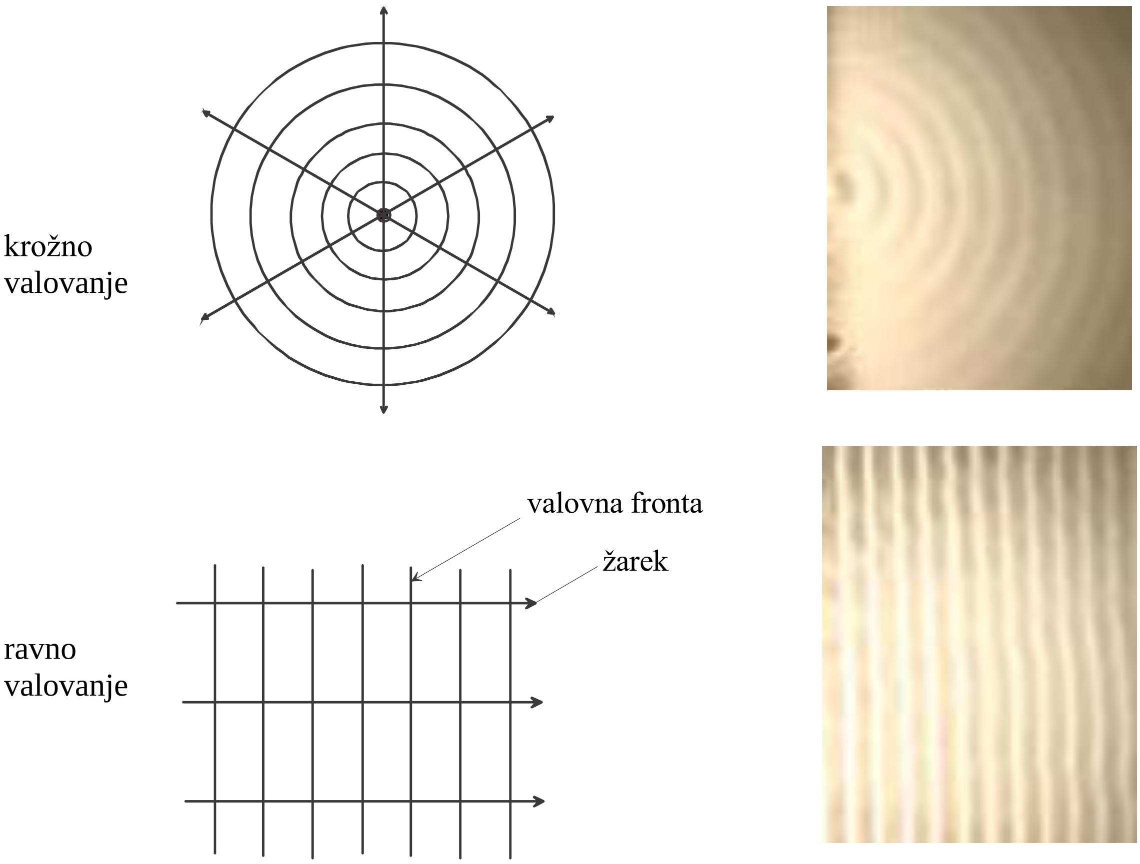


$\Theta < 90^0$	$\Theta > 90^0$	$\Theta = 90^0$
$\cos\Theta > 0$	$\cos\Theta < 0$	$\cos\Theta = 0$
$h > 0$	$h < 0$	$h = 0$

Slika 42: *Kapilarni dvig in spust.*

17. Mehansko valovanje

Lokalne kratkotrajne deformacije snovi (motnje) se zaradi interakcij med atomi (molekulami), ki sestavljajo snov, razširjajo po snovi. Širjenju periodično ponavljajočih motenj po snovi pravimo **potujoče mehansko valovanje**. Motnja nosi mehansko (deformacijsko) energijo, ki se razširja po snovi. Mehansko potujoče valovanje delimo na **longitudinalno** (vzdolžno) in **transverzalno** (prečno) valovanje. Pri transverzalnemu potujočem potovanju se deli snovi v motnji odmikajo iz ravnovesnih leg v prečni smeri glede na smer širjenja motnje, pri longitudinalnem potujočem valovanju pa so ti odmiki v smeri razširjanja motnje. **Valovna fronta** v potujočem mehanskem valovanju povezuje sosednja mesta z enakim odmikom, žarki pa so pravokotni na valovne fronte in kažejo smer razširjanja valovanja (slika 1). Glede na obliko valovnih front ločimo med drugim **krožno** (kroglasto) valovanje in **ravno** valovanje.



Slika 1: *Krožno in ravno valovanje na vodni gladini (foto: U. Anzeljc).*

Potujoče valovanje po napeti struni

Kot primer obravnavamo sinusno transverzalno potujoče valovanje, ki se širi v eni dimenziji (v smeri x-osi) po napeti struni (vrvici). Izvor valovanja, to je izvor periodične motnje v prečni smeri (v smer y-osi) s krožno frekvenco ω, postavimo v točko x = 0:

$$y(x=0,\, t)=y_0 \sin(\omega t), \qquad (1)$$

kjer je y_0 amplituda transverzalne motnje, ki se širi v smeri x-osi s hitrostjo c. Časovna zakasnitev motnje na razdalji x je

$$\Delta t = \frac{x}{c} \quad . \tag{2}$$

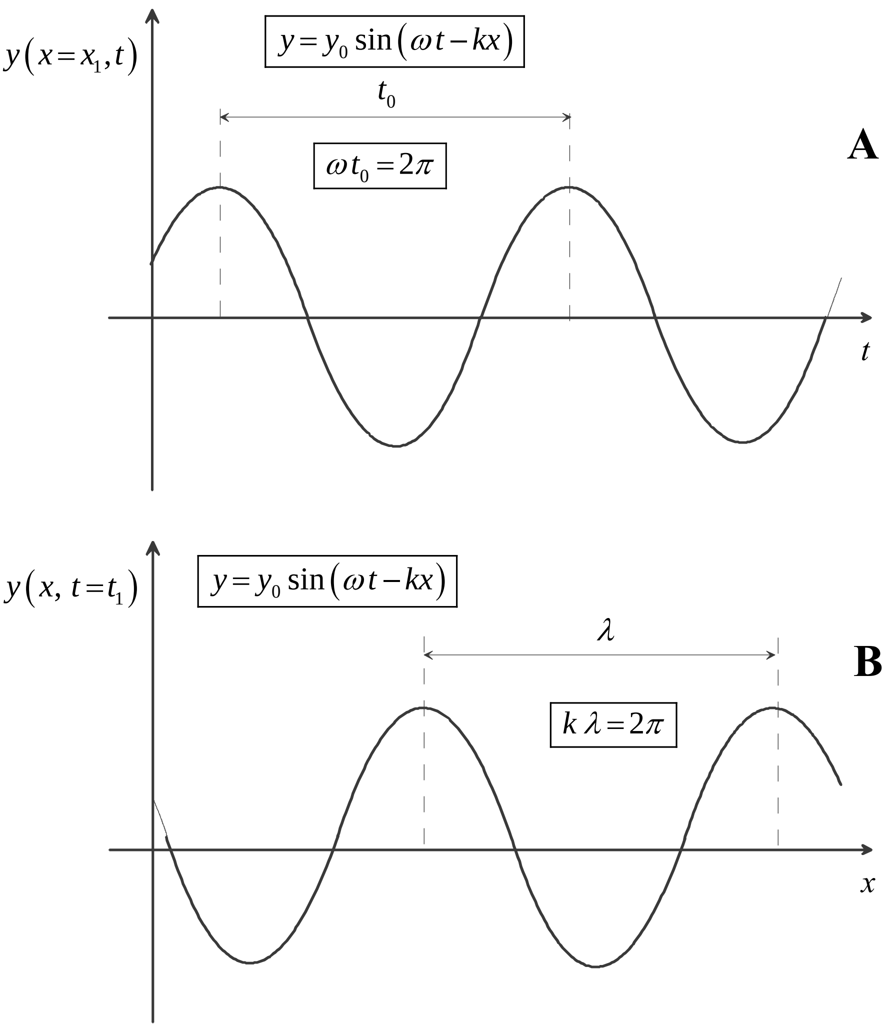
Transvezalni odmik vrvice v smeri y-osi na razdalji *x* bo ob času *t* tako:

$$y(x,t) = y(0, t-\Delta t) = y_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] = y_0 \sin(\omega t - kx), \tag{3}$$

kjer smo definirali valovni vektor

$$k = \frac{\omega}{c} \quad . \tag{4}$$

Transverzalni odmik napete vrvice (strune) je funkcija kraja (*x*) in časa (*t*). Tako lahko narišemo časovno odvisnost transverzalnega odmika na določenem izbranem mestu x_1 (slika 2A), ali pa krajevno odvisnost transverzalnih odmikov ob izbranem času t_1 (slika 2B):



Slika 2

Tako funkcija $y(x=x_1,t)$ kot funkcija $y(x,t=t_1)$ sta periodični sinusni funkciji. Na sliki 2A se imenuje časovni interval med dvema maksimumoma odmika y perioda t_0. Na sliki 2B pa se imenuje razdalja med dvema maksimumoma odmika y valovna dolžina λ.

Zato velja (glejte še enačbo (3)):

$$\omega t_0 = 2\pi \quad , \tag{5}$$

in

$$k\lambda = 2\pi \quad . \tag{6}$$

Iz enačb (4) in (6) sledi:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \quad , \tag{7}$$

oziroma

$$\frac{\lambda}{2\pi}\omega = c \quad . \tag{8}$$

Iz enačbe (5) lahko izrazimo ω v obliki:

$$\omega = \frac{2\pi}{t_0} = 2\pi\upsilon , \tag{9}$$

kjer je $\upsilon = \frac{1}{t_0}$ frekvenca. Če vstavimo $\omega = 2\pi\upsilon$ v enačbo (8) dobimo:

$$\frac{\lambda}{2\pi} 2\pi\upsilon = \lambda\upsilon = c ,$$

torej:

$$\boxed{c = \upsilon\lambda} \quad . \tag{10}$$

Stoječe valovanje napete strune

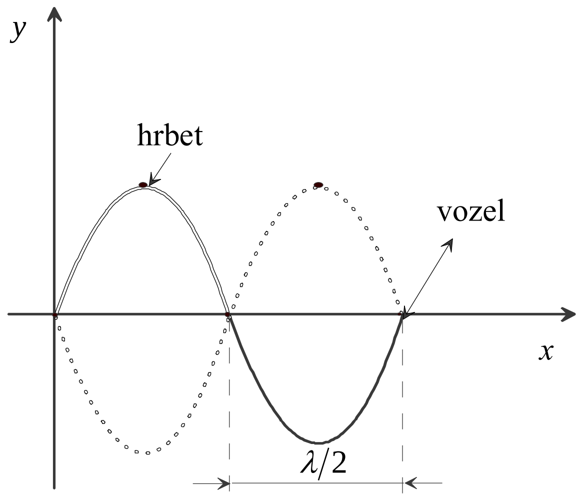
Obravnavamo kratko napeto struno, ki je vpeta na obeh koncih (vpeto krajišče). Valovanje, ki se širi v smeri proti desni: $y_D(x,t) = y_0 \sin(\omega t - kx)$, se na desnem vpetem krajišču odbije (z enako amplitudo in nasprotno fazo) in potuje v smeri proti levi: $y_L(x,t) = -y_0 \sin(\omega t + kx)$. S superpozicijo (seštevanjem) obeh valovanj, t.j. vpadnega $(y_D(x,t))$ in odbitega $(y_L(x,t))$ valovanja, dobimo **stoječe valovanje** napete strune, ki je vpeta na obeh krajiščih:

$$y(x,t) = y_D(x,t) + y_L(x,t) = y_0 \sin(\omega t - kx) - y_0 \sin(\omega t + kx) = 2y_0 \sin kx \cos \omega t \; . \tag{11}$$

Pri stoječem valovanju nihajo vse točke strune sinusno sočasno (v fazi) z enako krožno frekvenco ω, vendar pa je amplituda odmika

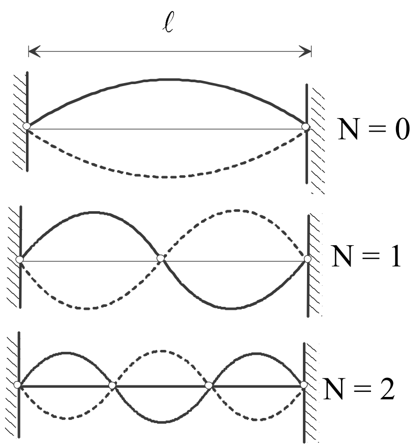
$$A = 2 y_0 \sin kx \tag{12}$$

v vsaki točki drugačna. Pravimo, da je amplituda krajevno odvisna. Točkam, v katerih je amplituda (A) maksimalna, pravimo **hrbti**. Točke, v katerih je amplituda (A) enaka nič, pa imenujemo **vozli** (slika 3).



Slika 3

Razmik med sosednjima hrbtoma ali sosednjima vozloma je enak polovični dolžini ($\lambda/2$). Struna, ki je vpeta na obeh krajiščih, ima tam tudi vozla (slika 4). Vpeta struna dolžine l ima torej najmanj dva vozla: pri $x=0$ in $x=\ell$. Lahko pa jih seveda tudi več. Različno število vozlov ustreza različnim **lastnim nihanjem** na krajiščih vpete strune (slika 4).



Slika 4: *Lastna nihanja strune.*

V splošnem velja (glejte sliko 4):

$$\ell=(N+1)\frac{\lambda_N}{2}\ ,\ \ N=0,1,2\ , \tag{13}$$

od koder sledi:

$$\lambda_N=\frac{2\ell}{N+1}\ , \tag{14}$$

oziroma ob upoštevanju zveze (10)

$$\upsilon_N=\frac{c}{\lambda_N}=\frac{c(N+1)}{2\ell}\ . \tag{15}$$

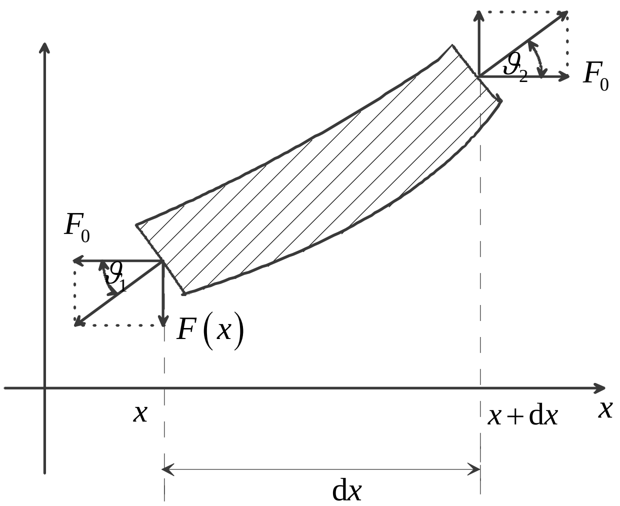
Najnižjo lastno frekvenco za N = 0 $\left(\upsilon_0=\dfrac{c}{2\ell}\right)$ imenujemo **osnovno lastno frekvenco**.

Hitrost širjenja transverzalne motnje po napeti struni

Obravnavamo hitrost širjenja transverzalne motnje vzdolž strune, ki je v mirovanju napeta z longitudinalno silo F_0 (slika 5).

Slika 5: *Napeta struna.*

Transverzalna motnja, ki potuje vzdolž strune, struno deformira, zaradi tega se pojavijo sile in napetosti v transverzalni smeri (slika 6).



Slika 6: *Sile, ki delujejo na majhen del napete strune pri majhnih odmikih.*

Zapišimo rezultantno silo v smeri y-osi, ki deluje na delček strune z dolžino d*x* (slika 6):

$$\mathrm{d}F = F\left(x+\mathrm{d}x\right) - F\left(x\right) = F_0\, tg\,\vartheta_2 - F_0\, tg\,\vartheta_1 = F_0\left(tg\,\vartheta_2 - tg\,\vartheta_1\right) = F_0 \frac{\partial\left(tg\,\vartheta\right)}{\partial x}\mathrm{d}x =$$

$$= F_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\mathrm{d}x = F_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x \quad , \tag{16}$$

kjer smo upoštevali definicijo odvoda:

$$tg\,\vartheta = \frac{\partial y}{\partial x} \quad . \tag{17}$$

Sedaj zapišemo še II. Newtonov zakon za gibanje delčka strune (z dolžino d*x*) v smeri y-osi (slika 6):

$$\mathrm{d}F = F_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}m\, a \quad , \tag{18}$$

kjer je *a* pospešek koščka strune z maso d*m* in dolžino d*x*:

$$\mathrm{d}m = \rho S\,\mathrm{d}x \quad , \tag{19}$$

ρ je gostota strune, *S* pa površina prečnega preseka strune. Ob upoštevanju enačbe (19) in definiciji pospeška strune v prečni smeri:

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad , \tag{20}$$

Iz enačbe (18) sledi::

$$F_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x = \rho S\,\mathrm{d}x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad ,$$

oziroma:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left(\frac{F_0}{\rho S}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}} \; . \tag{21}$$

Enačba (21) je valovna enačba za napeto struno katere rešitev je potujoče valovanje:

$$y\left(x,\, t\right) = y_0 \sin\left(\omega t - kx\right) . \tag{22}$$

Odvajajmo $y\left(x,t\right)$ dvakrat parcialno po času on dvakrat parcialno po x –n:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\,y_0\,\omega^2 \sin\left(\omega t - kx\right) \quad , \tag{23a}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -y_0 k^2 \sin(\omega t - kx) \quad , \tag{23b}$$

ter oba druga odvoda vstavimo v enačbo (21):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} c^2 = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad , \tag{24}$$

kjer je c hitrost širjenja motnje po struni, ki je napeta s silo F_0. Iz primerjave enačb (21) in (24) sledi:

$$\boxed{c = \left(\frac{F_0}{\rho S}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad . \tag{25}$$

Iz enačbe (25) vidimo, da je hitrost potovanja transverzalne motnje vzdolž napete strune odvisna od sile s katero je struna napeta (F_0), od gostote strune (ρ) ter od površine prečnega preseka strune (S).

Zvok

Na kratko obravnavajmo še primer longitudialnega valovanja v snovi, to je **zvočno valovanje**. Na podoben način kot smo hitrost širjenja motnje v napeti struni (enačba (25)), to je s pomočjo reševanja valovne enačbe, lahko izpeljemo tudi hitrost zvoka v trdni snovi:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad , \tag{26}$$

in hitrost zvoka v plinu:

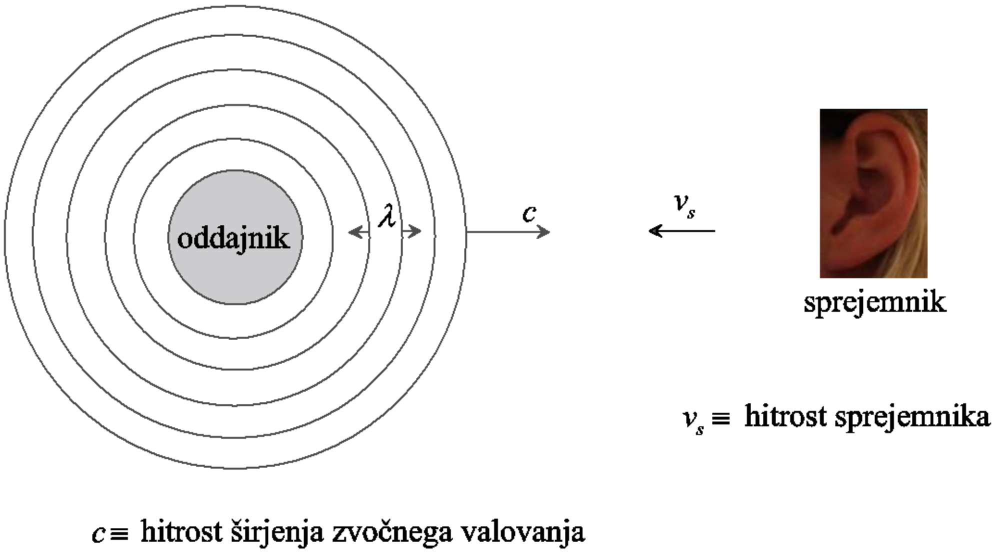
$$c = \frac{1}{\sqrt{\chi \rho}} \quad , \tag{27}$$

kjer je E prožnostni modul trdne snovi z gostoto ρ, χ pa stisljivost toplotno izoliranega plina (adiabatna stisljivost) z gostoto ρ. Tudi v primeru zvočnega valovanja lahko opazujemo stoječe valovanje, na primer v piščali v kateri molekule zraka nihajo sočasno tako, da na nekaterih mestih nastanejo **zgoščine** , na drugih mestih pa **razredčine**. Posledično se lokalno spreminja tudi tlak v piščali.

Dopplerjev pojav

V primeru zvočnega potujočega valovanja lahko opazujemo zanimiv pojav, ki mu pravimo Dopplerjev pojav, kot imenujemo spremembo frekvence oddanega zvočnega valovanja, ki jo zazna sprejemnik zaradi gibanja sprejemnika in/ali gibanja oddajnika.

Obravnavamo najprej prvi primer, ko se sprejemnik giblje, oddajnik zvočnega valovanja pa miruje (slika 7).



slika 7

Hitrost zvočnega valovanja za sprejemnik, ki se giblje s hitrostjo v_s proti mirujočemu oddajniku je $c+v_s$ (glejte sliko 7 in razpravo o Galilejevih transformacijah). Če pa se sprejemnik oddaljuje od mirujočega oddajnika s hitrostjo $-v_s$, je za sprejemnik hitrost valovanja $c-v_s$. Oba primera lahko zajamemo z izrazom za hitrost zvočnega valovanja, ki jo zazna gibajoči se sprejemnik (c'):

$$c' = c \pm v_s \ , \tag{28}$$

kjer predznak + velja za približevanje sprejemnika, predznak – pa za oddaljevanje sprejemnika. Valovna dolžina zvočnega valovanja je tako za sprejemnik (λ') kot za oddajnik (λ) enaka:

$$\lambda' = \lambda \ , \tag{29a}$$

$$\frac{c'}{\upsilon'} = \frac{c}{\upsilon} \ , \tag{29b}$$

$$\frac{c \pm v_s}{\upsilon'} = \frac{c}{\upsilon} \ , \tag{29c}$$

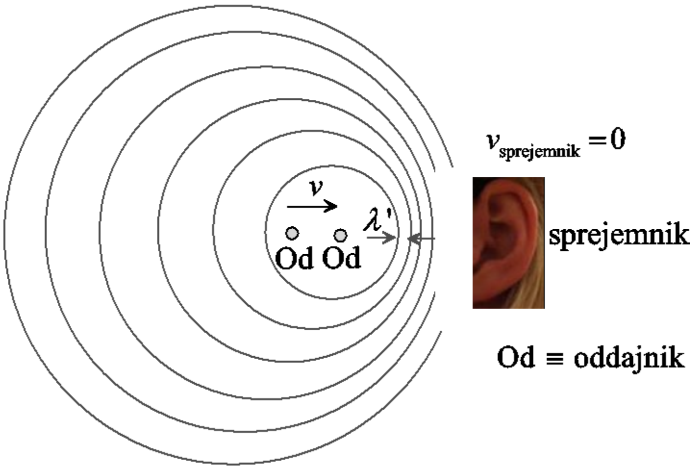
kjer smo upoštevali enačbi (10) in (28), υ' je frekvenca zvoka, ki jo zazna sprejemnik, υ pa frekvenca zvoka, ki jo oddaja (zazna) oddajnik.

Iz enačbe (29c) tako sledi:

$$\upsilon' = \upsilon\left(1 \pm \frac{v_s}{c}\right) , \tag{30}$$

kjer velja predznak + za približevanje sprejemnika, predznak – pa za oddaljevanje sprejemnika. Vidimo torej, da sprejemnik, ki se bliža mirujočemu oddajniku zazna večjo frekvenco zvoka, sprejemnik, ki pa se oddaljuje od mirujočega oddajnika, pa zazna manjšo frekvenco zvočnega valovanja kot jo oddaja oddajnik.

Poglejmo si sedaj še drugi primer, ko sprejemnik miruje, oddajnik pa se giblje (slika 8). V tem primeru so valovne dolžine **krajše** (slika 8) ali **daljše**.

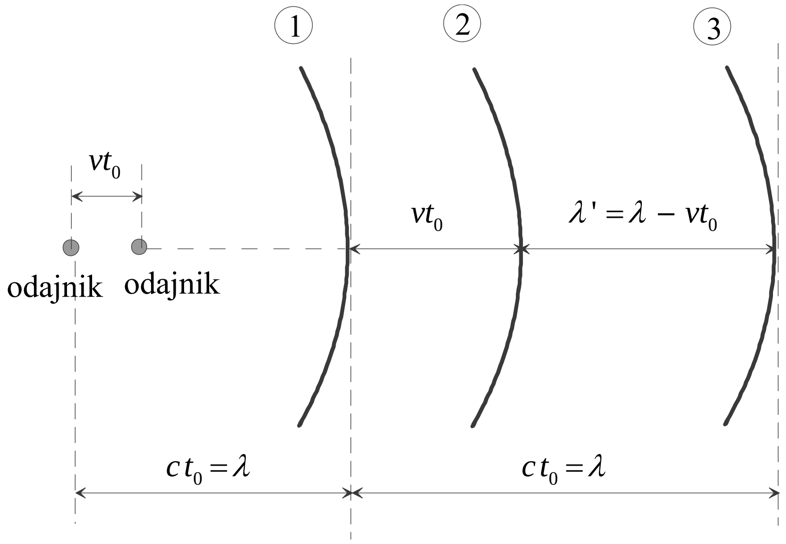


slika 8

Če se oddajnik giblje proti mirujočemu sprejemniku so valovne dolžine krajše (glejte sliki 8 in 9):

$$\lambda' = \lambda - v t_0 , \tag{31}$$

kjer je $\upsilon = \dfrac{1}{t_0}$ frekvenca zvoka, ki jo zaznava oddajnik.



$c = \lambda \upsilon = \lambda \dfrac{1}{t_0} \;\Rightarrow\; \boxed{\lambda = c t_0}$

$v \equiv$ hitrost oddajnika

c $\equiv$ hitrost zvoka

$t_0 = \dfrac{1}{\upsilon} \equiv$ perioda

slika 9

Ob upoštevanju enačbe (31) lahko tako izračunamo frekvenco zvoka, ki jo zazna mirujoč sprejemnik proti kateremu se giblje oddajnik s hitrostjo v (slika 8 in 9):

$$\upsilon' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda - vt_0} = \frac{c}{\lambda - \dfrac{v}{\upsilon}} \quad ,$$

torej:

$$\upsilon' = \frac{\upsilon}{\left(1 - \dfrac{v}{c}\right)} \quad . \tag{32a}$$

Če se oddajnik giblje stran od mirujočega sprejemnika dobimo ustrezen izraz za frekvenco, ki jo sliši sprejemnik tako, da v enačbi (32a) naredimo transformacijo $\upsilon \to -v$:

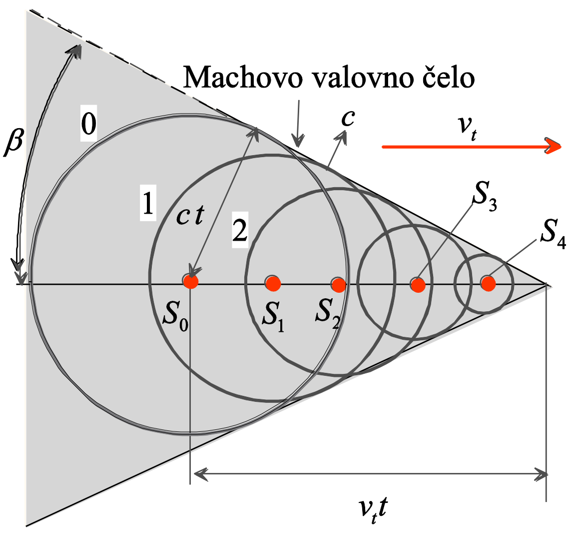
$$\upsilon' = \frac{\upsilon}{\left(1 + \dfrac{v}{c}\right)} \quad . \tag{32b}$$

Vidimo torej, da se v primeru nadaljevanja oddajnika od mirujočega sprejemnika, frekvenca zraka (υ'), ki jo zazna sprejemnik zmanjša, v primeru bližnjega oddajnika pa se frekvenca (υ') poveča. Izpeljane enačbe veljajo le, če je hitrost oddajnika glede na sprejemnik manjša od hitrosti valovanja c.

Machovo valovno čelo

Ernst Mach (1838 – 1916). *Na Moravskem rojeni avstro-ogrski fizik in filozof Ernst Mach je preživel svojo mladost v gradiču Slatnik (po domače »Mahovi graščini«) v vasi Veliki Slatnik blizu Novega mesta na Dolenjskem.*

Če je hitrost telesa večja od hitrosti valovanja pride do zanimivega pojava, ki mu pravimo Machovo valovno čelo (slika 10)



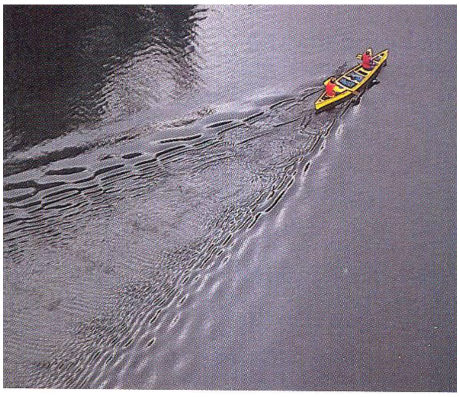
$v_t \equiv$ hitrost telesa
$c \equiv$ hitrost valovanja
$S_i \equiv$ lega telesa

slika 10

S slike 10 je razvidno, da Machovo valovno čelo oklepa s smerjo hitrosti telesa kot β:

$$\sin\beta = \frac{c\,t}{v_t\,t} = \frac{c}{v_t} \quad . \tag{33}$$

Valovna črta potuje po snovi s hitrostjo c pod kotom ($90^0 - \beta$) proti hitrosti izvira. Če leti letalo na reaktivni pogon z nadzvočno hitrostjo slišimo pok, ko nas doseže Machovo valovno čelo.



slika 11: *Machovo valovno čelo čolna, katerega hitrost je večja od hitrosti širjenja vodnih valov.* (Serway, 1990)