

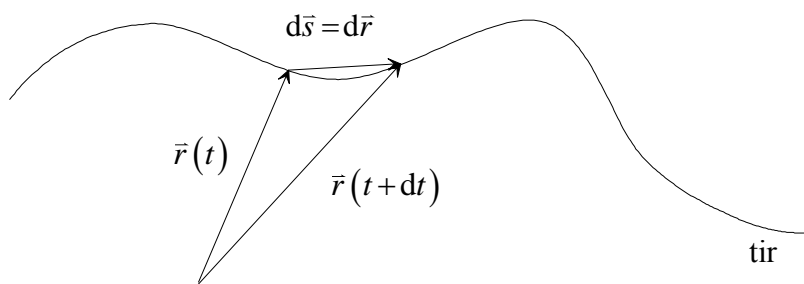
4. Izrek o kinetični in potencialni energiji

Točkasto telo

Izračunajmo delo (A) rezultante zunanjih sil (\vec{F}), ki deluje na točkasto telo z maso m :

$$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (1)$$

kjer je $d\vec{s}$ vektor premika



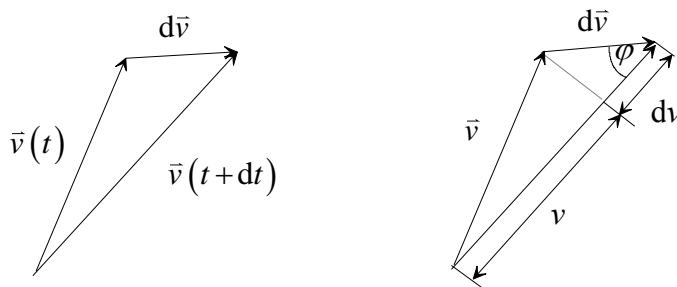
Uporabimo II. Newtonov zakon za gibanje točkastega telesa:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (2)$$

Enačbo (2) vstavimo v enačbo (1) in dobimo:

$$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int m\vec{a} \cdot d\vec{r} = \int m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \int m d\vec{v} \cdot \vec{v} = m \int d\vec{v} \cdot \vec{v}, \quad (3)$$

kjer smo uporabili definiciji $d\vec{r} = \vec{v} dt$, $d\vec{v} = \vec{a} dt$. V nadaljevanju najprej malo drugače zapišimo skalarni produkt $\vec{v} \cdot d\vec{v}$:



$$|\vec{v}| = v = (\vec{v} \cdot \vec{v})^{\frac{1}{2}}$$

$$|d\vec{v}| \neq d(|\vec{v}|) = dv$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = |\vec{v}| \underbrace{|d\vec{v}| \cos \varphi}_{dv} = v dv \quad (4a)$$

ali:

$$d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = d\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot d\vec{v} = 2\vec{v} \cdot d\vec{v},$$

od koder sledi:

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} d(v^2) = v dv \quad (4b)$$

Ob upoštevanju enačbe (4a), oziroma (4b) iz enačbe (3) sledi:

$$A = m \int \vec{v} \cdot d\vec{v} = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{1}{2} m v^2 \Big|_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2. \quad (5)$$

Definiramo kinetično energijo točkastega telesa:

$$\boxed{W_k = \frac{1}{2} m v^2}, \quad (6)$$

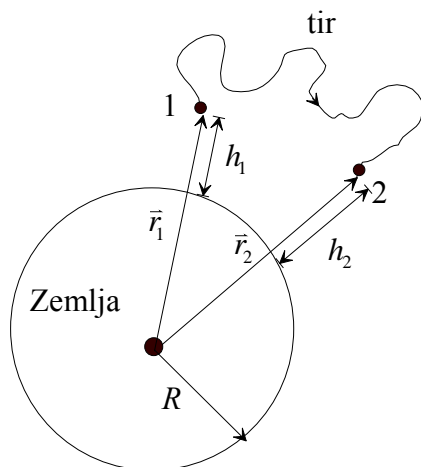
torej:

$$\boxed{A = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \Delta W_k}. \quad (7)$$

Relacijo (7) imenujemo izrek o kinetični energiji za točkasto telo.

V nadaljevanju rezultanto vseh zunanji sil razdelimo na rezultanto vseh ostalih zunanjih sil razen sile teže (\vec{F}_{ost}) in silo teže (gravitacijsko silo) \vec{F}_g :

$$\vec{F}_g = -G \frac{mM_z}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (8)$$



R = polmer Zemlje
h = nadmorska višina

kjer je G gravitacijska konstanta, M_z masa Zemlje in r razdalja od središča Zemlje do točkastega telesa z maso m . Torej:

$$\vec{F} = \vec{F}_{ost} + \vec{F}_g, \quad (9)$$

oziroma:

$$A = \int (\vec{F}_{ost} + \vec{F}_g) \cdot d\vec{s} = \int (\vec{F}_{ost} + \vec{F}_g) \cdot d\vec{r} = \Delta W_k. \quad (10)$$

Iz enačbe (10) sledi:

$$A_{ost} = \int \vec{F}_{ost} \cdot d\vec{r} = \Delta W_k - \int \vec{F}_g \cdot d\vec{r}. \quad (11)$$

Zadnji člen v enačbi (11) predstavlja negativno delo sile teže. V nadaljevanju negativno delo sile teže ob upoštevanju enačbe (8) izrazimo malce drugače:

$$\begin{aligned} -\int \vec{F}_g \cdot d\vec{r} &= \int G \frac{m M_z}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r} = G m M_z \int \frac{1}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{r} = \\ &= G m M_z \int \frac{1}{r^3} r dr = G m M_z \int \frac{dr}{r^2} = G m M_z \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \\ &= -G \frac{m M_z}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = -G \frac{m M_z}{r_2} - \left(-G \frac{m M_z}{r_1} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Če definiramo gravitacijsko potencialno energijo točkaste mase m kot:

$$\boxed{W_p = -G \frac{m M_z}{r}}, \quad (13)$$

lahko zapišemo enačbo (12) v obliki:

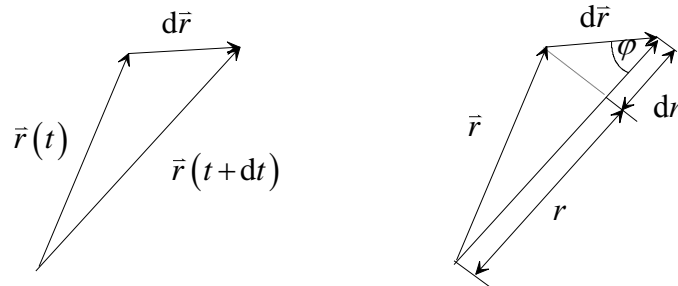
$$-\int \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = W_{p,2} - W_{p,1} = \Delta W_p, \quad (14)$$

enačbo (11) pa kot:

$$\boxed{A_{ost} = \Delta W_k + \Delta W_p}. \quad (15)$$

Enačbo (15) imenujemo izrek o kinetični in potencialni energiji za točkasto telo.

Pri izpeljavi enačbe (12) smo upoštevali:



$$d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = d\vec{r} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot d\vec{r} = 2\vec{r} \cdot d\vec{r} ,$$

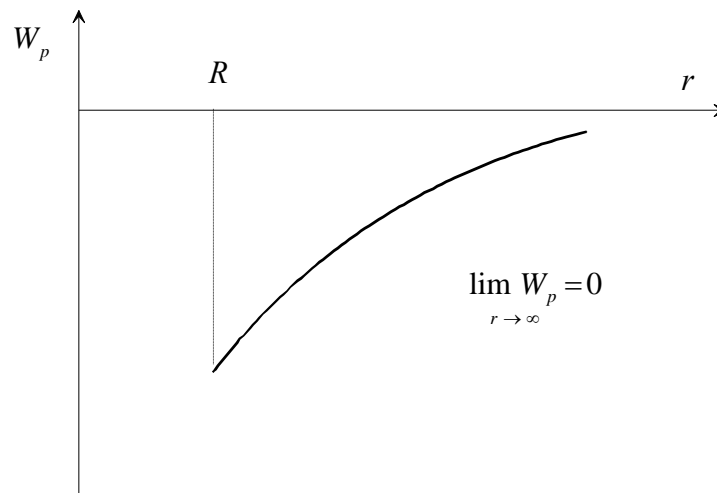
od koder sledi:

$$\vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \frac{1}{2} d(r^2) = r dr . \quad (16)$$

Narišimo odvisnost gravitacijske potencialne energije točkastega telesa od razdalje od središča Zemlje

$$r = R + h , \quad (17)$$

kjer je R polmer Zemlje, h pa nadmorska višina.



Gravitacijsko potencialno energijo lahko za majhne nadmorske višine h razvijamo v vrsto:

$$W_p = -G \frac{mM_z}{r} = -G \frac{mM_z}{(R+h)} = -G \frac{mM_z}{R \left(1 + \frac{h}{R}\right)} = -G \frac{mM_z}{R} \left(1 - \frac{h}{R} + \frac{h^2}{R^2} - \dots\right) . \quad (18)$$

Iz enačbe (18) vidimo, da za zelo majhne nadmorske višine $\frac{h}{R} \rightarrow 0$ velja približno zveza:

$$W_p \cong -G \frac{mM_z}{R} \left(1 - \frac{h}{R}\right) = -G \frac{mM_z}{R} + G \frac{M_z}{R^2} mh. \quad (19)$$

Pri konstantni vrednosti mase m in upoštevanju definicije gravitacijskega pospeška pri morski gladini

$$g_0 = G \frac{M_z}{R^2} \cong 9.8 \text{ m s}^{-2},$$

lahko zapišemo enačbo (19) v obliki:

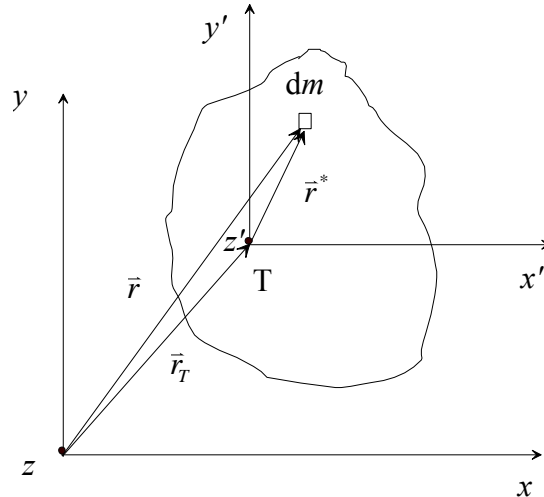
$$\boxed{W_p = m g_0 h}. \quad (20)$$

Konstantni člen $\frac{-G m M_z}{R}$ v enačbi (19) smo izpustili, saj v enačbi (15) nastopa le razlika potencialnih energij, masa telesa m pa se ne spreminja.

Togo telo

Dimenzije togih teles, ki jih obravnavamo, so veliko manjše od polmera Zemlje, zato je gravitacijski pospešek znotraj telesa praktično konstanten v vseh delih telesa. Zato sta izraza za gravitacijsko potencialno energijo (13) in (20), ki smo ju izpeljali za točkasto telo, dobra tudi za toga telesa končnih razsežnosti.

Drugače pa je s kinetično energijo togega telesa, ki je v splošnem ne moremo opisati z izrazom $\frac{1}{2} m v^2$ (razen, če se togo telo giblje po premici). Narišimo shematsko togo telo v kartezičnem koordinatnem sistemu (x, y, z) . V težišče togega telesa (T) postavimo izhodišče lokalnega koordinatnega sistema (x', y', z') , kjer predpostavimo, da so koordinatne osi laboratorijskega inercialnega koordinatnega sistema (x, y, z) paroma vzporedne z osmi lokalnega težiščnega sistema (x', y', z') .



- $\vec{r} \equiv$ krajevni vektor do majhnega dela togega telesa z maso dm merjeno v laboratorijskem sistemu (x, y, z)
 $\vec{r}_T \equiv$ krajevni vektor do težišča togega telesa merjeno v laboratorijskem sistemu (x, y, z)
 $\vec{r}^* \equiv$ krajevni vektor do majhnega dela togega telesa z maso dm merjeno v lokalnem (težiščnem) koordinatnem sistemu (x', y', z')
 $T \equiv$ težišče togega telesa
-

Iz zgornje slike vidimo, da velja zveza

$$\vec{r} = \vec{r}_T + \vec{r}^* . \quad (21)$$

Če enačbo (21) odvajamo po času na obeh straneh enačaja dobimo:

$$\vec{v} = \vec{v}_T + \vec{v}^* , \quad (22)$$

kjer je \vec{v}_T hitrost težišča togega telesa, \vec{v}^* pa hitrost mase dm v težiščnem sistemu. Izračunajmo sedaj kinetično energijo togega telesa, za katero vzamemo, da je vsota kinetičnih energij vseh mas dm , ki sestavljajo togo telo z maso m :

$$W_k = \frac{1}{2} \int v^2 dm = \frac{1}{2} \int \vec{v} \cdot \vec{v} dm . \quad (23a)$$

Izraz (22) vstavimo v enačbo (23a):

$$W_k = \frac{1}{2} \int (\vec{v}_T + \vec{v}^*) \cdot (\vec{v}_T + \vec{v}^*) dm = \frac{1}{2} \int v_T^2 dm + v_T \cdot \int \vec{v}^* dm + \frac{1}{2} \int \vec{v}^{*2} dm . \quad (23b)$$

Drugi člen v gornjem izrazu je enak nič. Koordinate težišča v težiščnem sistemu so namreč enake nič:

$$\vec{r}_T^* = \frac{1}{m} \int \vec{r}^* dm = 0,$$

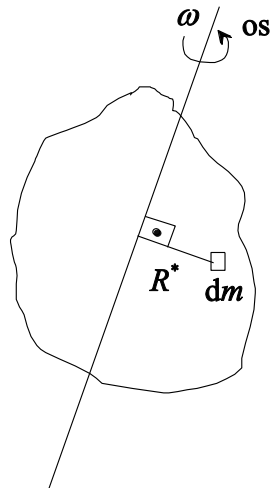
zato je tudi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m} \int \vec{r}^* dm \right) = \frac{1}{m} \int \vec{v}^* dm = 0. \quad (24)$$

Iz enačb (23b) in (24) sledi:

$$W_k = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2} \int v^{*2} dm. \quad (25)$$

V splošnem v vsakem trenutku obstaja neka os okoli katere se s kotno hitrostjo ω vrti obravnavano telo, ki je v izbranem trenutku enaka za vse točkaste mase dm , ki sestavljajo togo telo, zato velja (glejte sliko):



$$v^* = R^* \omega. \quad (26)$$

Ob upoštevanju enačbe (26) lahko enačbo (25) zapišemo v obliki:

$$\boxed{W_k = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2} J^* \omega^2}, \quad (27)$$

kjer smo upoštevali

$$\frac{1}{2} \int v^{*2} dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int R^{*2} dm = \frac{1}{2} J^* \omega^2, \quad (28a)$$

$$J^* = \int R^{*2} dm. \quad (28b)$$

Kinetično energijo $W_T = \frac{1}{2} m v_T^2$ imenujemo translacijska kinetična energija togega telesa, $W_r = \frac{1}{2} J^* \omega^2$ pa je rotacijska kinetična energija togega telesa. Za izbrani težiščni sistem lahko v splošnem zapišemo rotacijsko kinetično energijo kot:

$$W_r = \frac{1}{2} \sum J_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta, \quad (29)$$

$$\alpha = x^*, y^*, z^*, \quad \beta = x^*, y^*, z^*,$$

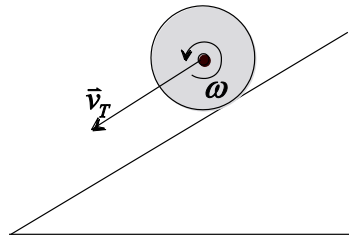
kjer so $J_{x^*x^*}, J_{y^*y^*}$ in $J_{z^*z^*}$ vztrajnostni momenti okrog treh pravokotnih osi x^*, y^* in z^* , $J_{\alpha\beta} (\alpha \neq \beta)$ pa so deviacijski momenti (glejte še str.47). Če so osi težiščnega sistema hkrati tudi glavne osi dobi izraz (29) obliko:

$$W_r = \frac{1}{2} J_{x^*} \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_{y^*} \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_{z^*} \omega_3^2. \quad (30)$$

Če pa se trenutna os vrtenja vedno ujema z eno izmed glavnih osi, n.pr. z J_{x^*} , je

$$W_r = \frac{1}{2} J_{x^*} \omega_1^2. \quad (31)$$

Nazorna ilustracija zadnjega primera je kotaljenje homogenega valja s polmerom R in maso m po klancu navzdol brez podrsavanja.

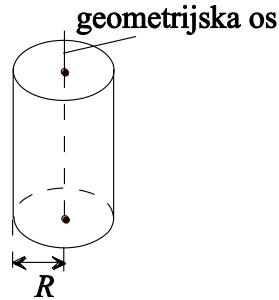


Če se valj kotali brez podrsavanja sta hitrost težišča valja v_T in kotna hitrost vrtenja valja povezana z enačbo

$$v_T = R \omega. \quad (32)$$

Trenutna os vrtenja valja pri kotaljenju brez podrsavanja se ujema z geometrijsko osjo valja, ki je hkrati tudi ena izmed glavnih osi. Vztrajnostni moment homogenega valja okrog te osi je

$$J = \frac{1}{2} m R^2, \text{ torej velja:}$$



$$W_k = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m R^2 \right) \frac{v_T^2}{R^2} = \frac{3}{4} m v_T^2, \quad (33)$$

kjer smo upoštevali veljavnost enačbe (32). Če se valj po klancu ne bi kotalil, ampak bi samo drsel s hitrostjo v_T , bi bila ustrezna kinetična energija valja samo $\frac{1}{2} m v_T^2$.

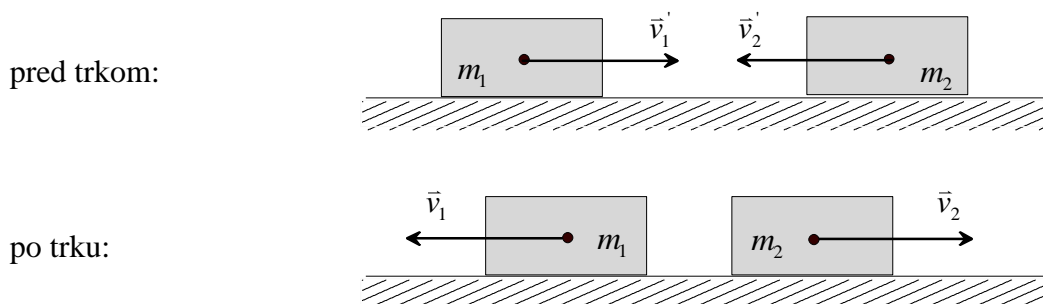
Zgled: popolnoma prožen centralni trk dveh vozičkov na zračni blazini

Prožen trk dveh teles definiramo kot trk pri katerem se ohranja skupna kinetična energija. Ker je trk centralen, ne upoštevamo rotacijske kinetične energije vozičkov $\frac{1}{2} J^* \omega^2$ (enačba (27)).

Predpostavimo pa tudi, da se pri trku gravitacijska potencialna energija ne spremeni ($\Delta W_p = 0$) in pa, da je delo vseh zunanjih sil enako nič (glejte še enačbo (15)). Velja torej ohranitev skupne kinetične energije:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2, \quad (34)$$

kjer sta m_1 in m_2 masi vozičkov, \vec{v}_1' in \vec{v}_2' hitrosti vozičkov pred trkom ter \vec{v}_1 in \vec{v}_2 hitrosti vozičkov po trku.



Ob predpostavki, da je skupni sunek sil na oba vozička nič, se ohranja tudi skupna gibalna količina obeh vozičkov:

$$m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2. \quad (35)$$

Iz enačb (34) in (35) lahko pri poznavanju m_1 , m_2 , v_1' in v_2' izračunamo končni hitrosti vozičkov v_1 in v_2 . Rešimo enačbi (34) in (35) za poseben primer, ko drugi voziček pred trkom miruje, to je za $v_2' = 0$. Tako preideta enačbi (34) in (35) v:

$$m_1 v_1' = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad (36)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2, \quad (37)$$

od koder sledi:

$$v_1' = v_1 + \left(\frac{m_2}{m_1} \right) v_2 \quad (38)$$

$$v_1'^2 = v_1^2 + \left(\frac{m_2}{m_1} \right) v_2^2 \quad (39)$$

Rešitvi enačb (39) in (38) sta:

$$v_1 = \frac{v_1' \left(1 - \frac{m_2}{m_1} \right)}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right)}, \quad (40)$$

$$v_2 = \frac{2 v_1'}{1 + \frac{m_2}{m_1}}. \quad (41)$$

Za poseben primer, ko sta masi obeh vozičkov enaki, sledi iz enačb (40) in (41):

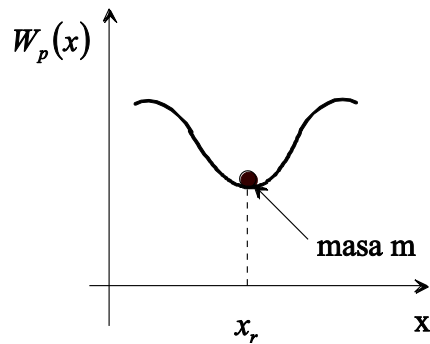
$$v_1 = 0.$$

$$v_2 = v_1'.$$

5. Harmonično nedušeno nihanje

Splošno:

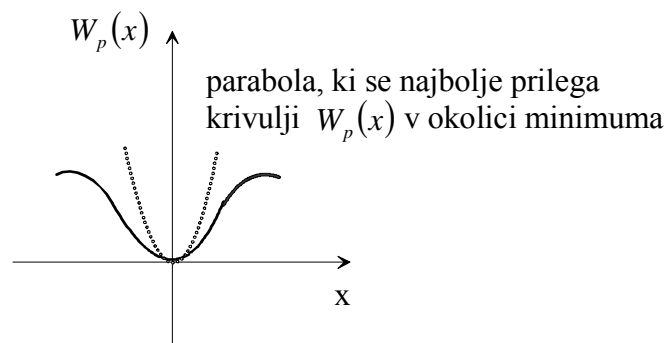
Potencialna energija (1 – D):



Pogoj za minimum potencialne energije:

$$\left. \frac{dW_p}{dx} \right|_{x=x_r} = 0, \quad \left. \frac{d^2W_p}{dx^2} \right|_{x=x_r} > 0$$

Izhodišče koordinatnega sistema premaknemo v minimum potencialne energije:



Za $x \ll 1$ razvijemo $W_p(x)$ v Taylorjevo vrsto:

$$W_p(x) = W_p(x=0) + x \left. \left(\frac{dW_p}{dx} \right) \right|_{x_r=0} + \frac{x^2}{2} \left. \left(\frac{d^2W_p}{dx^2} \right) \right|_{x_r=0} + \dots \cong \frac{x^2}{2} \left. \left(\frac{d^2W_p}{dx^2} \right) \right|_{x_r=0},$$

kjer smo upoštevali $W_p(x=0) = 0$ in $\left. \left(\frac{dW_p}{dx} \right) \right|_{x_r=0} = 0$ (glejte sliko).

Torej:

$$W_p(x) \cong k \frac{x^2}{2}, \tag{1}$$

kjer je:

$$k = \left(\frac{d^2 W_p}{dx^2} \right) \Big|_{x_v=0} > 0. \quad (2)$$

$$\text{Sila } F = - \frac{dW_p}{dx} = -kx. \quad (3)$$

Zapišimo II. Newtonov zakon za gibanje mase m:

$$\boxed{ma = -kx,} \quad (4)$$

Pospešek $a = \frac{d^2 x}{dt^2}$, torej:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx, \text{ od koder sledi:}$$

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x.} \quad (5)$$

Rešitev diferencialne enačbe (5) iščemo z nastavkom:

$$\boxed{x = x_0 \sin \left[\left(\frac{2\pi}{t_0} \right) t + \delta \right].} \quad (6)$$

Iz enačbe (6) sledi:

$$v = \frac{dx}{dt} = x_0 \left(\frac{2\pi}{t_0} \right) \cos \left[\left(\frac{2\pi}{t_0} \right) t + \delta \right] \quad (7)$$

kjer je:

$$\boxed{v_0 \equiv x_0 \left(\frac{2\pi}{t_0} \right)} \quad (8)$$

amplituda hitrosti. Velja tudi:

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = -x_0 \left(\frac{2\pi}{t_0} \right)^2 \sin \left[\left(\frac{2\pi}{t_0} \right) t + \delta \right].} \quad (9)$$

Enačbi (6) in (9) vstavimo v diferencialno enačbo (5) in dobimo:

$$-x_0 \left(\frac{2\pi}{t_0} \right)^2 \sin \left[\left(\frac{2\pi}{t_0} \right) t + \delta \right] = -\frac{k}{m} x_0 \sin \left[\left(\frac{2\pi}{t_0} \right) t + \delta \right], \quad (10)$$

od koder sledi:

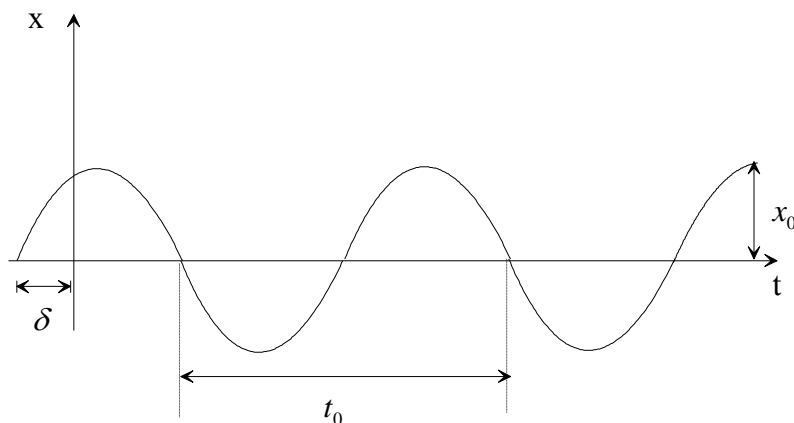
$$\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2 = \frac{k}{m}, \quad (11)$$

oziroma

$$t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (12)$$

Vidimo torej, da nastavek $x = x_0 \sin\left[\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)t + \delta\right]$ reši diferencialno enačbo (5), kjer je nihajni čas t_0 določen z enačbo (12), δ pa je fazni zamik. Gibanje, določeno z enačbo (6), imenujemo **harmonično** ali **sinusno** nedušeno nihanje.

$$x = x_0 \sin\left[\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)t + \delta\right]$$



Na zgornji sliki vidimo, da velja zveza $\omega_0 t_0 = 2\pi \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{t_0}$

ω_0 = lastna krožna frekvenca

Lastna frekvenca $\nu = \frac{1}{t_0} \Rightarrow \omega_0 = 2\pi\nu$

Energija harmoničnega nihanja

- **Kinetična** energija mase m (glejte še enačbo (7)):

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} m x_0^2 \left(\frac{2\pi}{t_0} \right)^2 \cos^2 \left[\left(\frac{2\pi}{t_0} \right) t + \delta \right]. \quad (13)$$

- **Potencialna** energija (glejte enačbi (1) in (6)):

$$W_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2} x_0^2 \sin^2 \left[\left(\frac{2\pi}{t_0} \right) t + \delta \right]. \quad (14)$$

- **Celotna energija:**

$$W = W_k + W_p = \frac{1}{2} m x_0^2 \left(\frac{2\pi}{t_0} \right)^2 \cos^2 \left[\left(\frac{2\pi}{t_0} \right) t + \delta \right] + \frac{k}{2} x_0^2 \sin^2 \left[\left(\frac{2\pi}{t_0} \right) t + \delta \right]. \quad (15)$$

Ob upoštevanju enačbe (11) preide enačba (15) v:

$$W = \frac{1}{2} k x_0^2 \left\{ \cos^2 \left[\left(\frac{2\pi}{t_0} \right) t + \delta \right] + \sin^2 \left[\left(\frac{2\pi}{t_0} \right) t + \delta \right] \right\} = \frac{1}{2} k x_0^2. \quad (16)$$

Ob upoštevanju enačbe (8) in (11) velja:

$$\frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} k v_0^2 \left/ \left(\frac{2\pi}{t_0} \right)^2 \right. = \frac{1}{2} m v_0^2. \quad (17)$$

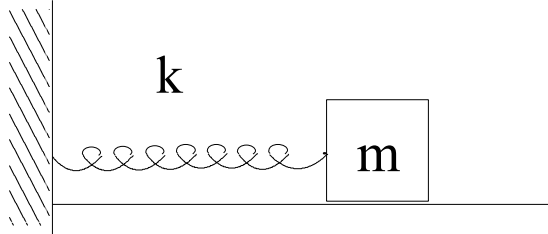
Torej:

$$\boxed{W = \frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2.} \quad (18)$$

Primeri nihala, ki nihajo sinusno

1. Nihalo na vijačno vzmet

A: HORIZONTALNO gibanje mase m



$k \equiv$ konstanta vzmeti

Newtonov zakon za gibanje mase m :

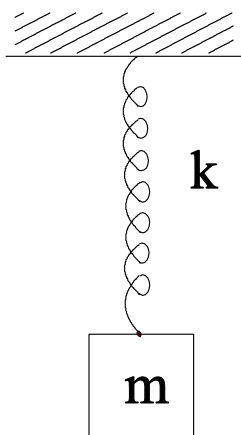
$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = -kx \quad , \quad (19)$$

kjer je $-kx$ sila vzmeti. Rešitev enačbe (19) že poznamo (glejte enačbe (5) – (12)):

$$x = x_0 \sin \left[\left(\frac{2\pi}{t_0} \right) t + \delta \right] , \quad (20)$$

kjer je $t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ nihajni čas. (21)

B: VERTIKALNO gibanje mase m



$\bar{x} \equiv$ celoten raztezek vzmeti

$x_r \equiv$ ravnovesni raztezek

$x \equiv$ odstopanje od ravnovesnega raztezka

Velja: $\bar{x} = x_r + x$. (22)

V ravnovesju napišemo pogoj za statično ravnovesje mase m v obliki:

$$kx_r = mg$$
 . (23)

Newtonov zakon za gibanje mase m pa kot:

$$\boxed{ma = mg - k\bar{x}}$$
 , (24)

kjer je $\frac{d^2 x}{dt^2}$ pospešek mase m . Torej:

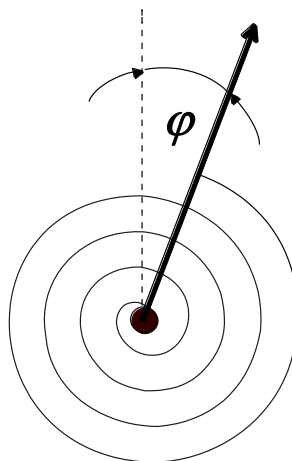
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - k(x_r + x)$$
 , (25)

kjer smo upoštevali enačbo (22). Ob upoštevanju enačbe (23) iz enačbe (25) sledi:

$$\boxed{m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx}$$
 . (26)

Rešitev enačbe (26) pa že poznamo od prej.

2. Nihalo na polžasto vzmet (sučno sinusno nihanje)



Navor polžaste vzmeti:

$$\boxed{M = -D\varphi}$$
 (27)

kjer je φ zasuk vzmeti in D konstanta vzmeti.

Zapišemo enačbo za vrtenje togega telesa okrog fiksne osi:

$$\boxed{M = J \frac{d^2\varphi}{dt^2}}, \quad (28)$$

$J \equiv$ vztrajnostni moment nihala,

$$\alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \equiv \text{kotni pospešek}, \quad (29)$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \equiv \text{kotna hitrost}. \quad (30)$$

Vstavimo enačbo (27) v enačbo (28) in dobimo:

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D\varphi, \quad (31)$$

oziroma:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{J}\varphi. \quad (32)$$

Rešitev diferencialne enačbe (32) iščemo z nastavkom:

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 \sin \left[\left(\frac{2\pi}{t_0} \right) t + \delta \right]}. \quad (33)$$

$$\text{Kotna hitrost } \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_0 \left(\frac{2\pi}{t_0} \right) \cos \left[\left(\frac{2\pi}{t_0} \right) t + \delta \right], \quad (34)$$

kjer je

$$\omega_0 = \varphi_0 \left(\frac{2\pi}{t_0} \right), \quad (35)$$

amplituda kotne hitrosti.

Kotni pospešek

$$\alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\varphi_0 \left(\frac{2\pi}{t_0} \right)^2 \sin \left[\left(\frac{2\pi}{t_0} \right) t + \delta \right], \quad (36)$$

oziroma

$$\boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2 \varphi} . \quad (37)$$

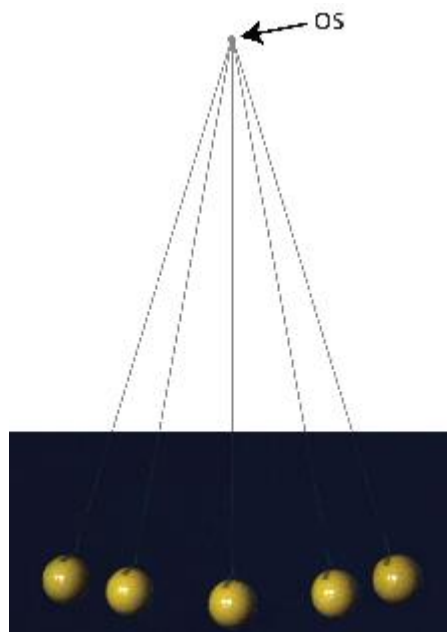
Vidimo, da nastavek (33) reši enačbo (32). Iz primerjave enačb (37) in (32) sledi:

$$\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2 = \frac{D}{J} , \quad (38)$$

oziroma

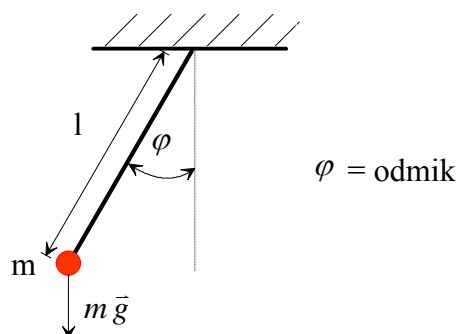
$$\boxed{t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}} . \quad (39)$$

3. Matematično nihalo



Zaporedne fotografije odklona nitke (modela) matematičnega nihala
(foto: U. Anzeljc).

Obravnavamo nihanje točkaste mase m , ki visi na zelo lahki nitki dolžine l .



Navor sile teže $m\vec{g}$ je:

$$M = -mgl \sin \varphi \quad (40)$$

Ob predpostavki, da so odmiki majhni ($\varphi \ll 1$) velja $\sin \varphi \cong \varphi$, torej

$$\boxed{M \cong -mgl\varphi} \quad (41)$$

Opis vrtenja togega telesa okrog fiksne osi:

$$\boxed{M = J \frac{d^2 \varphi}{dt^2}} \quad (42)$$

kjer je $J = ml^2$ vztrajnostni moment točkaste mase. Če vstavimo enačbo (41) v enačbo (42) dobimo:

$$-mgl\varphi = ml^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2},$$

oziroma:

$$\boxed{\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \varphi} \quad (43)$$

Rešitev diferencialne enačbe (43) iščemo z nastavkom:

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 \sin \left[\left(\frac{2\pi}{t_0} \right) t + \delta \right]} \quad (44)$$

Če enačbo (44) dvakrat odvajamo dobimo:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\varphi_0 \left(\frac{2\pi}{t_0} \right)^2 \sin \left[\left(\frac{2\pi}{t_0} \right) t + \delta \right], \quad (45)$$

oziroma

$$\boxed{\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{t_0} \right)^2 \varphi} \quad (46)$$

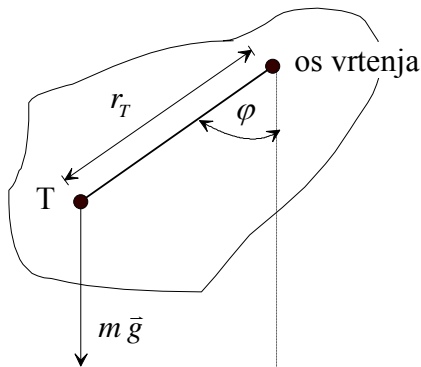
Vidimo torej da nastavek (44) reši enačbo (43). Iz primerjave enačb (43) in (46) dobimo:

$$\left(\frac{2\pi}{t_0} \right)^2 = \frac{g}{l},$$

od koder sledi izraz za nihajni čas:

$$t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (47)$$

4. Fizično nihalo



$T \equiv$ težišče
 $r_T \equiv$ ročica rezultante sile teže

Navor rezultante sile teže $m \bar{g}$ je:

$$M = -m g r_T \sin \varphi. \quad (48)$$

Ob predpostavki ($\sin \varphi \cong \varphi$) za ($\varphi \ll 1$) velja:

$$M \cong -m g r_T \varphi \quad (49)$$

Opis vrtenja togega telesa okrog fiksne osi:

$$M = J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \quad (50)$$

kjer je J vztrajnostni moment togega telesa okrog izbrane osi. Če vstavimo enačbo (49) v enačbo (50) dobimo:

$$-m g r_T \varphi = J \frac{d^2 \varphi}{dt^2}, \quad (51)$$

Enačbo (51) zapišemo v obliki:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \left(\frac{m g r_T}{J} \right) \varphi. \quad (52)$$

Rešitev enačbe (52) iščemo z nastavkom:

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 \sin \left[\left(\frac{2\pi}{t_0} \right) t + \delta \right]} . \quad (53)$$

Enačbo (53) dvakrat odvajamo po času in dobimo:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\varphi_0 \left(\frac{2\pi}{t_0} \right)^2 \sin \left[\left(\frac{2\pi}{t_0} \right) t + \delta \right], \quad (54)$$

oziroma

$$\boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{t_0} \right)^2 \varphi} . \quad (55)$$

Iz primerjave med enačbama (52) in (55) sledi:

$$\left(\frac{2\pi}{t_0} \right)^2 = \frac{m g r_T}{J}, \quad (56)$$

oziroma:

$$\boxed{t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m g r_T}}} . \quad (57)$$

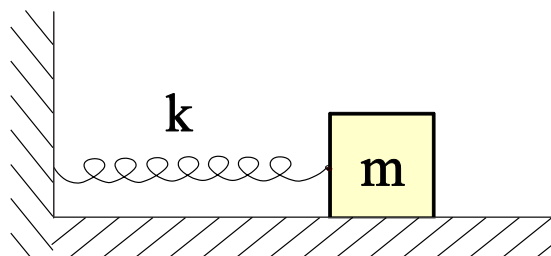
V posebnem primeru $J = m r_T^2$ in $r_T = l$ preide enačba (57) v enačbo (47):

$$t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

ki velja za matematično nihalo.

6. Dušeno nihanje

Obravnavamo primer nihala na vijačno vzmet.



$m \equiv$ masa
 $k \equiv$ konstanta vzmeti

V dosednji obravnavi nihala na vijačno vzmet smo predpostavili, da je sila vzmeti $-kx$ edina sila. Zanimarili pa smo silo trenja, ki je sorazmerna masi telesa m . Pa tudi silo upora, ki je pri majhnih hitrostih sorazmerna hitrosti v . V nadaljevanju zato poleg sile vzmeti upoštevamo tudi silo dušenja F_d , ki jo zapišemo v približnem zapisu kot:

$$F_d = -2m\beta v, \quad (58)$$

kjer je m masa in β koeficient dušenja. Zapišimo II. Newtonov zakon za gibanje težišča mase m :

$$m\ddot{x} = -kx - 2\beta m\dot{x}, \quad (59)$$

kjer smo definirali:

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (60)$$

Enačbo (59) na obeh straneh enačaja delimo z maso m in dobimo:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}, \quad (61)$$

kjer je

$$\omega_0^2 = \left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2 = \frac{k}{m}, \quad (62)$$

lastna krožna frekvenca nedušenega nihanja, t_0 pa lastni nihajni čas nedušenega nihanja (glejte enačbo (21)). Rešitev enačbe (61) iščemo z nastavkom:

$$x(t) = y(t)e^{-\beta t} \quad (63)$$

kjer je $y(t)$ neznana funkcija časa. Funkcijo (63) dvakrat odvajamo:

$$\dot{x} = \dot{y} e^{-\beta t} - \beta y e^{-\beta t}, \quad (63a)$$

$$\ddot{x} = \ddot{y} e^{-\beta t} - 2\beta \dot{y} e^{-\beta t} + \beta^2 y e^{-\beta t}, \quad (63b)$$

in dobljena izraza za \dot{x} in \ddot{x} vstavimo v diferencialno enačbo (61). Tako dobimo:

$$e^{-\beta t} [\ddot{y} + (\omega_0^2 - \beta^2) y] = 0. \quad (64)$$

Ker $e^{-\beta t}$ v splošnem ni enak nič, mora biti

$$\ddot{y} + (\omega_0^2 - \beta^2) y = 0. \quad (65)$$

Rešitev enačbe (65) je sinusno nihanje:

$$y = x_0 \cos(\tilde{\omega}_0 t + \delta), \quad (66)$$

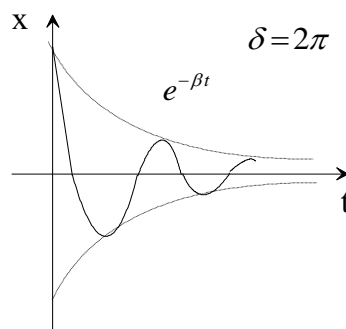
kjer je:

$$\tilde{\omega}_0 = (\omega_0^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \quad (67)$$

lastna krožna frekvenca dušenega nihanja.

Na osnovi enačb (63) in (66) zapišemo rešitev enačbe (61) v obliki:

$$x = x_0 e^{-\beta t} \cos(\tilde{\omega}_0 t + \delta)$$



(68)

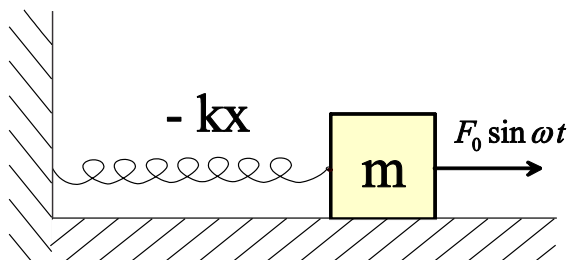
Funkcija (68) reši enačbo (61) le v primeru, ko je $\beta < \omega_0$ (glejte enačbo (67)). Če je $\beta > \omega_0$ se enačba (65) lahko zapiše v obliki:

$$\ddot{y} = (\beta^2 - \omega_0^2) y, \quad (69)$$

kjer je $(\beta^2 - \omega_0^2) > 0$. Zato je v tem primeru rešitev enačbe (69) eksponentna funkcija, pa tudi celotna rešitev (glejte še enačbo (63)) je eksponentna funkcija:

$$x = x_0 e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0. \quad (70)$$

7. Vsiljeno nihanje



$m \equiv$ masa
 $k \equiv$ konstanta vzmeti
 $F_0 \equiv$ amplituda vsiljene sile
 $\omega \equiv$ vsiljena krožna frekvenca

Sila, ki vsiljuje nihanje: $F(t) = F_0 \sin \omega t$ (71)

Enačba gibanja:

$$m\ddot{x} = -kx - 2\beta m\dot{x} + F_0 \sin \omega t, \text{ oziroma}$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t, \quad (72)$$

kjer je $\omega_0^2 = k/m$ (73)

lastna krožna frekvenca nedušenega nihanja in β koeficient dušenja.

Če je $\omega \ll \omega_0$: $\ddot{x} \rightarrow 0$, $\dot{x} \rightarrow 0$, torej:

$$\omega_0^2 x \cong \frac{F_0}{m} \sin \omega t, \text{ oziroma:}$$

$$x = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \sin \omega t. \quad (74)$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe (72) iščemo z nastavkom:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t), \quad (75)$$

kjer je $x_p(t)$ partikularna rešitev nehomogene diferencialne enačbe, $x_h(t)$ pa je rešitev homogene diferencialne enačbe $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (glejte enačbo (68)):

$$x_h = x_0 e^{-\beta t} \sin \tilde{\omega}_0 t,$$

$$\tilde{\omega}_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Lastno nihanje z lastno krožno frekvenco ω_0 se po zadosti velikem času zaduši, ker $x_h(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$.

Partikularno rešitev nehomogene diferencialne enačbe (72) iščemo z nastavkom:

$$\boxed{x_p(t) = x_0 \sin(\omega t + \delta)}, \quad (76)$$

kjer je ω krožna frekvenca vsiljene sile. V nadaljevanju iščemo x_0 in δ . Izraz (76) predelamo v:

$$x_p = x_0 \sin(\omega t + \delta) = x_0 \sin \omega t \cos \delta + x_0 \cos \omega t \sin \delta, \text{ oziroma} \quad (77)$$

$$\boxed{x_p(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t}, \quad (78)$$

kjer smo vpeljali nove oznake:

$$x_0 \cos \delta = A_1 \text{ ter } x_0 \sin \delta = A_2, \quad (79)$$

Odvode:

$$\dot{x}_p = A_1 \omega \cdot \cos \omega t - A_2 \omega \cdot \sin \omega t,$$

$$\ddot{x}_p = -A_1 \omega^2 \cdot \sin \omega t - A_2 \omega^2 \cdot \cos \omega t,$$

vstavimo v diferencialno enačbo (72):

$$\begin{aligned} & -A_1 \omega^2 \sin \omega t - A_2 \omega^2 \cos \omega t + 2\beta A_1 \omega \cos \omega t - 2\beta A_2 \omega \sin \omega t + \\ & + \omega_0^2 A_1 \sin \omega t + \omega_0^2 A_2 \cos \omega t = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \end{aligned} \quad (80)$$

Enačba (80) mora veljati posebej za člene s $\sin(\omega t)$ in posebej za člene z $\cos(\omega t)$:

$$-A_1 \omega^2 - 2\beta A_2 \omega + \omega_0^2 A_1 = \frac{F_0}{m},$$

$$-A_2 \omega^2 + 2\beta A_1 \omega + \omega_0^2 A_2 = 0,$$

oziroma:

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A_1 - 2\beta \omega A_2 = \frac{F_0}{m}, \quad (81)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A_2 + 2\beta \omega A_1 = 0. \quad (82)$$

Iz enačbe (82) ob upoštevanju enačbe (79) sledi:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{x_0 \sin \delta}{x_0 \cos \delta} = \operatorname{tg} \delta = \frac{-2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \text{ torej:} \quad (83)$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \delta = \frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}.$$

Enačbi (81) in (82) kvadriramo ter seštejemo:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 (A_1^2 + A_2^2) + 4\beta^2 \omega^2 (A_1^2 + A_2^2) = \left(\frac{F_0}{m}\right)^2. \quad (84)$$

Velja pa tudi (glejte enačbo (79):

$$A_1^2 + A_2^2 = x_0^2 \cos^2 \delta + x_0^2 \sin^2 \delta = x_0^2. \quad (85)$$

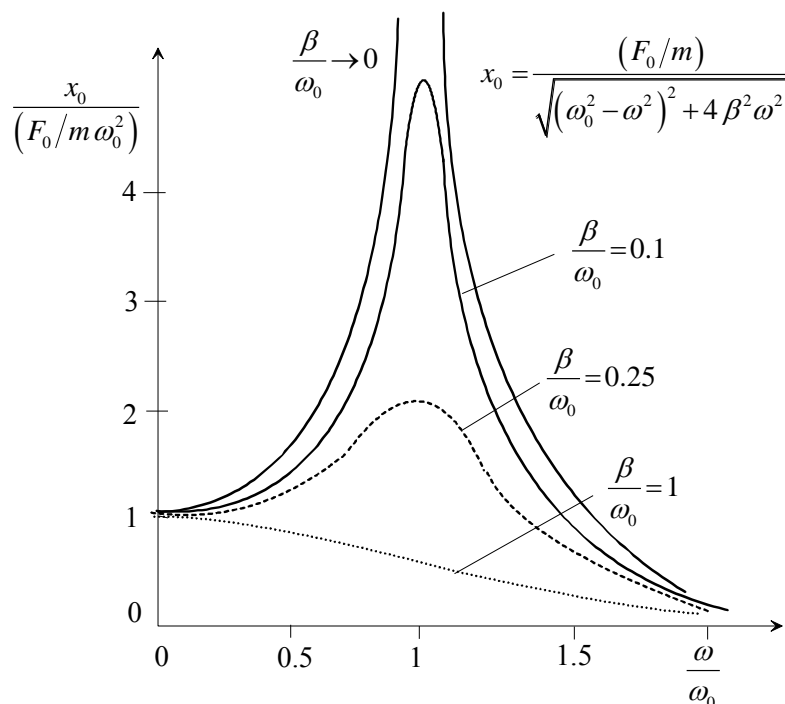
Iz enačb (84) in (85) sledi:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 x_0^2 + 4\beta^2 \omega^2 x_0^2 = \left(\frac{F_0}{m}\right)^2,$$

od tod pa:

$$\boxed{x_0 = \frac{\left(\frac{F_0}{m}\right)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}} \quad (86)$$

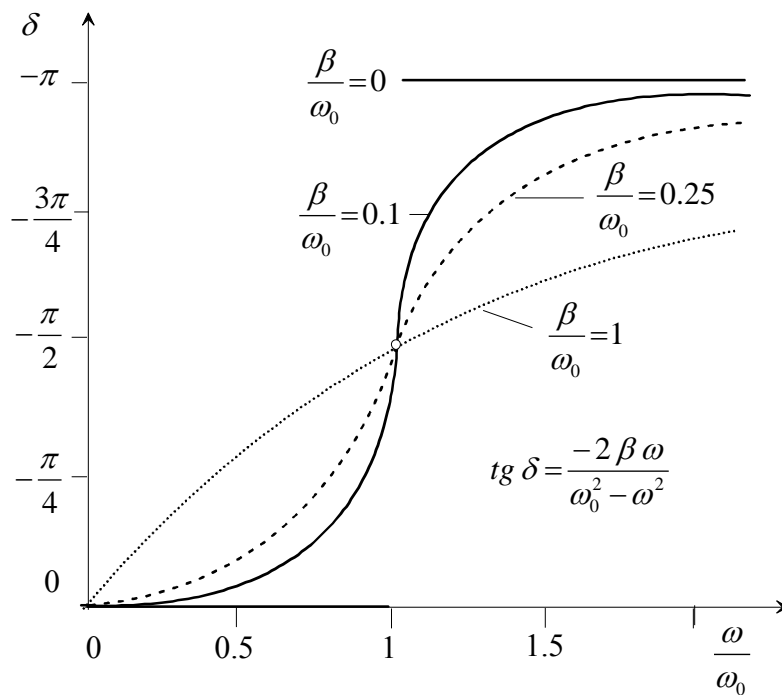
Odvisnost amplitude x_0 od vsiljene krožne frekvence ω :



Torej:

- splošna rešitev enačbe (72) je: $x = x_0 e^{-\beta t} \sin(\tilde{\omega}_0 t) + x_0 \sin(\omega t + \delta)$
- za zadosti velike čase niha nihalo sinusno ($x = x_0 \sin(\omega t + \delta)$) s frekvenco vsiljene sile
- lastno nihanje $x_h = x_0 e^{-\beta t} \sin(\tilde{\omega}_0 t)$ se zaduši ($\tilde{\omega}_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$)
- $\omega \ll \omega_0$: $x_0 \rightarrow \frac{F_0}{m \omega_0^2}$
- $\omega \cong \omega_0$: $\frac{dx_0}{d\omega} = 0$ je pri $\omega = \omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$
za $\beta \rightarrow 0$: $\omega_{\max} \rightarrow \omega_0$ in $x_0 \rightarrow \infty$
- $\omega \gg \omega_0$: $x_0 \rightarrow 0$

Odvisnost faznega zamika δ od vsiljene krožne frekvence ω :



Torej:

$$\omega \ll \omega_0 : \delta \rightarrow 0 \quad \left(x_0 \rightarrow \frac{F_0}{m \omega_0^2} \right)$$

$$\omega \cong \omega_0 : \delta \rightarrow -\frac{\pi}{2} \quad (x_0 \rightarrow \infty)$$

$$\omega \gg \omega_0 : \delta \rightarrow -\pi \quad (x_0 \rightarrow 0)$$

Moč vsiljene sile

$$\boxed{P(t) = F(t) \cdot v(t) = F_0 \sin \omega t \cdot x_0 \omega \cos(\omega t + \delta)} \quad (87)$$

Upoštevali smo: $x = x_0 \sin(\omega t + \delta) \Rightarrow v = \dot{x} = x_0 \omega \cos(\omega t + \delta)$.

Ker $\cos(\omega t + \delta) = \cos(\omega t) \cdot \cos \delta - \sin(\omega t) \cdot \sin \delta$:

$$P(t) = F_0 x_0 \omega \left[\sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos \delta - \sin^2(\omega t) \cdot \sin \delta \right]$$

Povprečna moč $\bar{P} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} P(t) dt$ je:

$$\bar{P} = F_0 x_0 \omega \left[\underbrace{\frac{\cos \delta}{t_0} \int_0^{t_0} \frac{1}{2} \sin(2\omega t) dt}_{=0} - \sin \delta \underbrace{\frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \sin^2(\omega t) dt}_{=\frac{1}{2}} \right],$$

torej:

$$\boxed{\bar{P} = -\frac{F_0}{2} \omega x_0 \sin \delta} \quad (88)$$

V enačbo (88) vstavimo: $x_0 = \frac{(F_0/m)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$ in $\sin \delta = \frac{\text{tg } \delta}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta}}$,

kjer je $\text{tg } \delta = \frac{-2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$,

in dobimo:

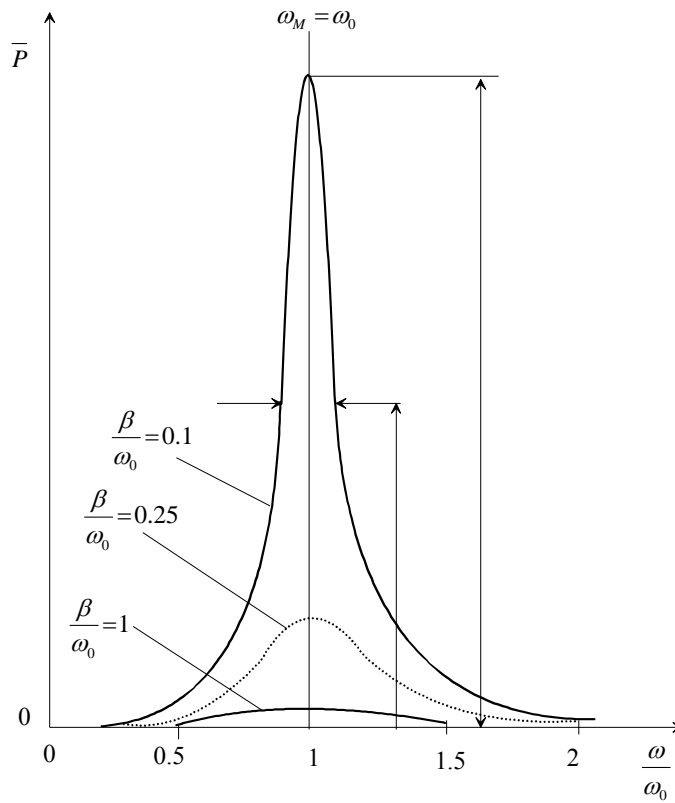
$$\bar{P} = \frac{-\frac{F_0}{2} \omega \frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cdot \frac{-\frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}{\sqrt{1 + \frac{4\beta^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}}},$$

torej:

$$\boxed{\bar{P} = \frac{\frac{F_0^2}{m^2} \beta \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (89)$$

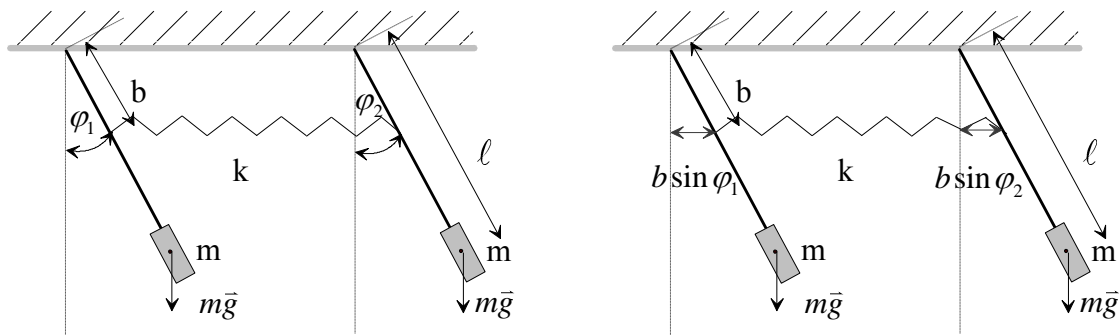
Maksimalna vrednost \bar{P} je pri $\frac{d\bar{P}}{d\omega}=0 \Rightarrow \omega_M = \omega_0$.

Sklep: za vse β je \bar{P} največja pri ω_0



8. Sklopljeno nihanje

I. model: dve enaki fizični nihali sta sklopljeni z vzmetjo s konstanto k



Enačbi gibanja (vrtenje togega telesa okoli fiksne osi):

$$M = J \ddot{\varphi} \quad , \quad \alpha = \ddot{\varphi} \quad ,$$

zapišemo v obliki:

$$J \ddot{\varphi}_1 = -mg \ell \sin \varphi_1 + k \Delta x b \cos \varphi_1 \quad , \quad (90a)$$

$$J \ddot{\varphi}_2 = -mg \ell \sin \varphi_2 - k \Delta x b \cos \varphi_2 \quad , \quad (90b)$$

kjer smo upoštevali $\sin(90^\circ \pm \varphi) = \cos \varphi$ in $\Delta x = b \sin \varphi_2 - b \sin \varphi_1$.

Ob upoštevanju:

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots \quad ,$$

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots \quad ,$$

ter $\varphi_1 \ll 1$ in $\varphi_2 \ll 1$ velja: (glejte še sliko):

$$\sin \varphi_1 \approx \varphi_1 \quad , \quad \sin \varphi_2 \approx \varphi_2 \quad , \quad \cos \varphi_1 \approx 1 \quad , \quad \cos \varphi_2 \approx 1 \quad ,$$

$$\text{in } \Delta x = b \sin \varphi_2 - b \sin \varphi_1 \cong b(\varphi_2 - \varphi_1) \quad .$$

Enačbi (90a) in (90b) tako zapišemo v obliki:

$$J \ddot{\varphi}_1 \cong -mg \ell \varphi_1 + k b^2 (\varphi_2 - \varphi_1) \quad , \quad (91a)$$

$$J \ddot{\varphi}_2 \cong -mg \ell \varphi_2 - k b^2 (\varphi_2 - \varphi_1) \quad . \quad (92a)$$

Definiramo: $\omega_0^2 = \frac{m g \ell}{J}$ (lastna frekvenca fizičnega nihala)

in

$$D = \frac{k b^2}{J}.$$

Ob upoštevanju gornjih definicij za ω_0 in D prepíšemo enačbi (91a) in (92a) v obliko:

$$\ddot{\varphi}_1 = -\omega_0^2 \varphi_1 + D(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (91)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = -\omega_0^2 \varphi_2 - D(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (92)$$

Seštejemo enačbi (91) in (92):

$$\frac{d^2}{dt^2}(\varphi_2 + \varphi_1) = -\omega_0^2(\varphi_2 + \varphi_1). \quad (93)$$

Odštejemo enačbi (92) in (91):

$$\frac{d^2}{dt^2}(\varphi_2 - \varphi_1) = -(\omega_0^2 + 2D)(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (94)$$

Rešitvi enačb (93), (94) sta:

$$\varphi_2 + \varphi_1 = \varphi_0 \cos \omega_1 t, \quad (93')$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_0 \cos \omega_2 t, \quad (94')$$

kjer sta $\omega_1 = \omega_0$ in $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2D}$ dve lastni krožni frekvenci.

Pri zapisu rešitev (93') in (94') smo upoštevali začetna pogoja:

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \varphi_0 \text{ ob } t = 0, \quad (95)$$

oziroma (ob času $t = 0$):

$$\begin{aligned} \varphi_2 + \varphi_1 &= \varphi_0, \\ \varphi_2 - \varphi_1 &= \varphi_0. \end{aligned} \quad (96)$$

Torej:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_0}{2}(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t), \quad (97')$$

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_0}{2}(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t). \quad (98')$$

Upoštevam:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) ,$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) .$$

Dobimo:

$$\varphi_2 = \varphi_0 \cos \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right] \cdot \cos \left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right] , \quad (97)$$

$$\varphi_1 = -\varphi_0 \sin \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right] \cdot \sin \left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right] . \quad (98)$$

Definiramo amplitudo:

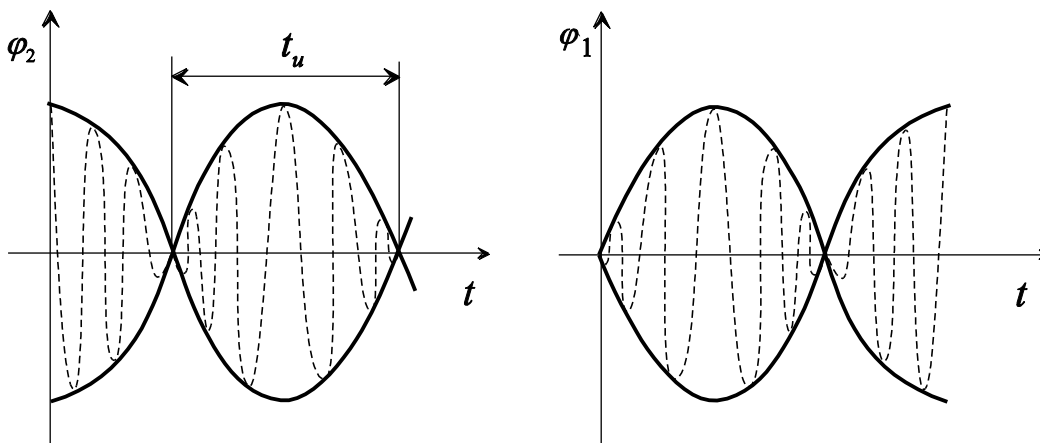
$$\varphi_2 = \underbrace{\varphi_0 \cos \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right]}_{\text{amplituda}} \cdot \cos \left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right] ,$$

$$\varphi_1 = -\underbrace{\varphi_0 \sin \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right]}_{\text{amplituda}} \cdot \sin \left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right] .$$

Zaključek:

- nihali nihata s frekvenco $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$
- amplituda se spreminja s frekvenco $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$

$$\boxed{\omega_1 = \omega_0} \quad \boxed{\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2D}} \quad (99)$$



- **Utripanje:**

$$t_u \equiv \text{čas utripanja: } \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \cdot t_u = \pi \Rightarrow \boxed{t_u = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}}$$

- **Šibka sklopitev ($2D \ll \omega_0^2$):**

$$\omega_2 = (\omega_0^2 + 2D)^{1/2} = \omega_0 \left(1 + \frac{2D}{\omega_0^2}\right)^{1/2} \cong \omega_0 \left(1 + \frac{D}{\omega_0^2}\right) = \omega_0 + \frac{D}{\omega_0}, \text{ kjer } \frac{2D}{\omega_0^2} \ll 1.$$

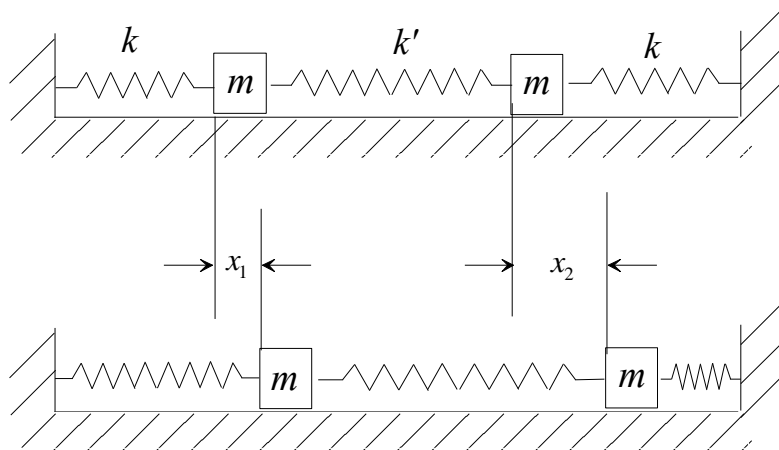
Uporabili smo razvoj: $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$; če $x \ll 1$: $(1+x)^{1/2} \cong 1 + \frac{1}{2}x$.

$$\text{Torej: } \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cong \omega_0 + \frac{D}{2\omega_0}.$$

Nihali nihata s frekvenco, ki je le malo večja od lastne frekvence ω_0 .

$$\text{Izračunajmo še } \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \cong \frac{D}{2\omega_0}.$$

II. model: nihanje dveh sklopljenih nihal na vijačno vzmet



Zapišemo II. Newtonov zakon za masi m :

$$m\ddot{x}_1 = -k x_1 - k'(x_1 - x_2), \quad (100)$$

$$m\ddot{x}_2 = -k x_2 - k'(x_2 - x_1). \quad (101)$$

Seštejemo enačbi (101) in (102):

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2). \quad (102)$$

Odštejemo enačbi (101) in (102):

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -k(x_1 - x_2) - 2k'(x_1 - x_2) = -(k + 2k')(x_1 - x_2). \quad (103)$$

Izberemo začetna pogoja: $x_1 = x_0$ in $x_2 = 0$ (ob času $t = 0$)

Ob času $t = 0$ tako velja:

$$x_1 + x_2 = x_0, \quad (104)$$

$$x_1 - x_2 = x_0. \quad (105)$$

Ob upoštevanju enačb (104) in (105) napišemo rešitvi enačb (102) in (103) v obliki:

$$x_1 + x_2 = x_0 \cos \omega_1 t, \quad (106)$$

$$x_1 - x_2 = x_0 \cos \omega_2 t, \quad (107)$$

kjer sta lastni krožni frekvenci: $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$ in $\omega_2^2 = \frac{k + 2k'}{m}$.

Iz enačb (106) in (107) sledi:

$$x_1 = \frac{x_0}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = x_0 \cos \left[\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) t \right] \cdot \cos \left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t \right], \quad (108)$$

$$x_2 = \frac{x_0}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = -x_0 \sin \left[\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) t \right] \cdot \sin \left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t \right]. \quad (109)$$

Upoštevali smo:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right),$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right).$$

Dobili smo **utripanje**:

$$x_1 = x_0 \cos \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right] \cdot \cos \left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right], \quad (110)$$

$$x_2 = -x_0 \sin \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right] \cdot \sin \left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t \right], \quad (111)$$

kjer sta dve lastni krožni frekvenci:

$$\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (112)$$

$$\omega_2 = \omega_0 \left(1 + 2 \frac{k'}{k} \right)^{1/2}. \quad (113)$$

▪ **Šibka sklopitev:** $k' \ll k$

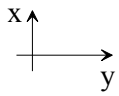
Če uporabimo $(1+x)^{1/2} \cong 1 + \frac{1}{2}x$ za $x \ll 1$ iz enačb (112) in (113) sledi:

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cong \omega_0 \left(1 + \frac{k'}{2k} \right), \quad (114)$$

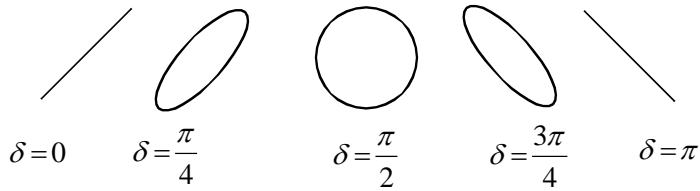
$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \cong \frac{k' \omega_0}{2k}. \quad (115)$$

Sestavljanje dveh pravokotnih nihanj

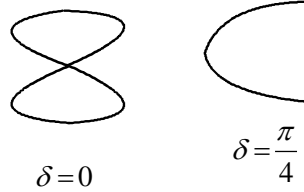
$$x = x_0 \sin(\omega_1 t) \quad y = y_0 \sin(\omega_2 t - \delta) \quad (119)$$



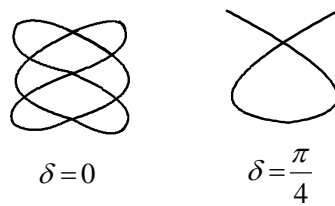
$$\boxed{\omega_1 = \omega_2} :$$



$$\boxed{\frac{\omega_1}{\omega_2} = 2} :$$



$$\boxed{\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{2}} :$$



9. Deformacija trdnih snovi

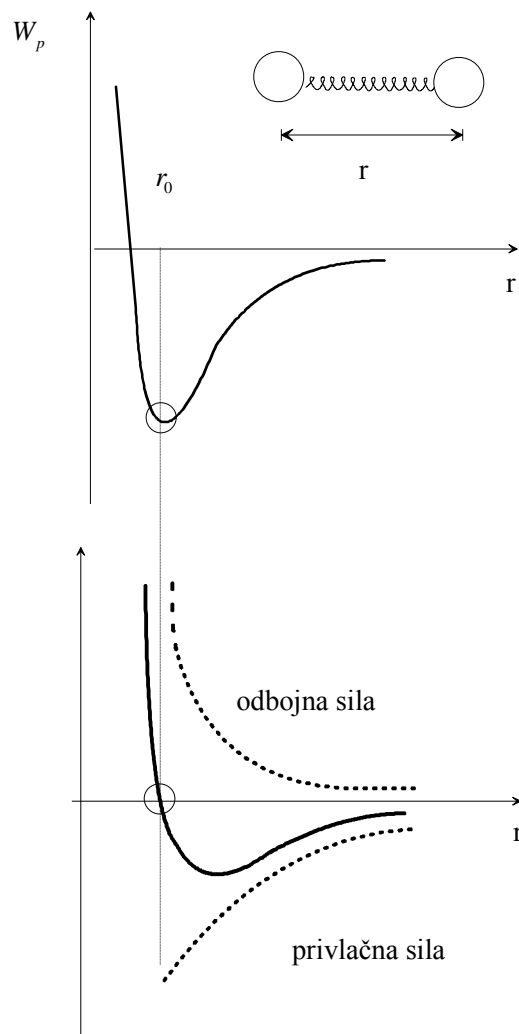
Mrežne točke (vozlišča) v kristalni mreži trdne snovi definirajo samo povprečno lego posameznih atomov, ki sestavljajo kristal trdne snovi. Tako kot v plinu, tudi v kristalu atomi ne mirujejo, ampak se termično gibljejo okrog svoje ravnovesne lege. Amplitude odmika so večje pri večji absolutni temperaturi T .

Sila med sosednjima atomoma trdne snovi v kristalni mreži je odvisna od razdalje med njima. Spodnja slika shematsko prikazuje potencialno energijo med dvema atomoma in ustrezno silo

$F_a = -\frac{\partial W_p}{\partial r}$. Celotna sila je sestavljena iz privlačnega in odbojnega dela. Privlačna sila med

atomoma je lahko na primer Coulombska privlačna sila med pozitivnim in negativnim atomom, tako kot je to v kristalu NaCl.

Odbojna sila pa je posledica Pauli-jevega izključitvenega načela. Ko se dva atoma približata, gredo elektroni z enakimi kvantnimi števili na višje energijske nivoje. Posledično se med približevanjem dveh atomov njuna energija večja, sila pa postane odbojna (glejte sliko 1).



slika 1

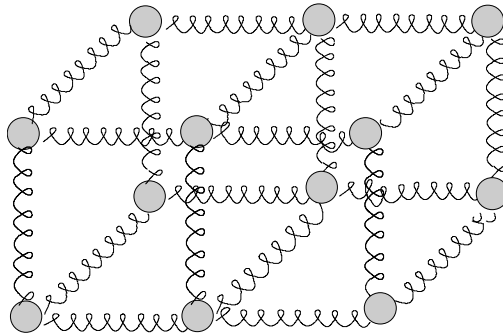
Pri majhnih odmikih od ravnovesne lege ($|r - r_0|$ mora biti zadosti majhen) lahko potencialno energijo med atomoma v kristalni mreži v okolici ravnovesne razdalje r_0 aproksimiramo s parabolo (glejte še str. 67) :

$$W_p = \frac{1}{2} k (r - r_0)^2 - C, \quad (1)$$

kjer je r razdalja med dvema sosednjima atomoma v kristalni mreži (glejte sliko 1). Ustrezna sila med atomoma v bližini ravnovesne razdalje je potem:

$$F_a = -\frac{\partial W_p}{\partial r} = -k(r - r_0) \quad (2)$$

Vidimo, da je v okolici ravnovesne razdalje med sosednjimi atomi sila med sosednjima atomoma linearno odvisna od razdalje med njima, zato lahko atomske sile med sosednjimi atomi kristalne mreže trdne snovi ponazorimo z vijačnimi vzmetmi, ki povezujejo atome med seboj (slika2).



slika 2

Potencialno energijo med dvema sosednjima atomoma v kristalni mreži pa vzporedimo s prožnostno energijo vzmeti.

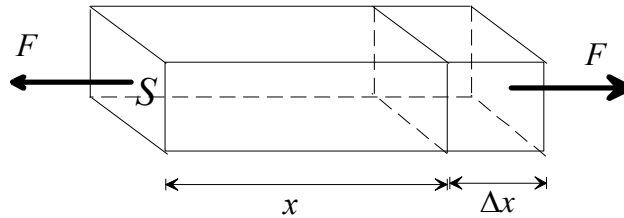
Model vijačnih vzmeti med atomi kristala pojasni tudi Hook-ov zakon. Ko namreč na makroskopsko telo deluje zunanja sila, se telo deformira, ravnovesna (poprečna) razdalja med sosednjimi atomi v kristalni mreži (r_0) pa se zato spremeni na vrednost r . V novem ravnovesju se zato sile med atomi kristala spremenijo. Linearna sprememba sile med atomi (enačba (2))

$$F_a = -k(r - r_0) \quad (2)$$

na mikroskopskem nivoju se odraža tudi na makroskopskem nivoju v linearni zvezi med natezno (kompresijsko) silo F in podaljškom (skrčkom) telesa Δx :

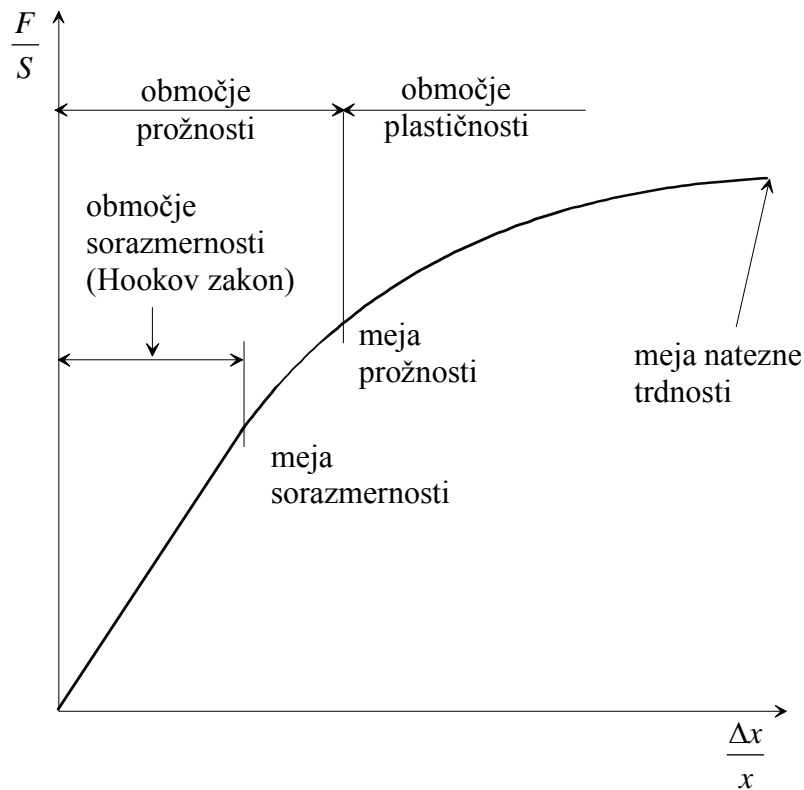
$$\boxed{\sigma_x = \frac{F}{S} = E \frac{\Delta x}{x}}, \quad (3)$$

kjer je $\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x}$ relativni podaljšek (skrček), $\sigma_x = \frac{F}{S}$ natezna ali kompresijska napetost in S površina preseka na katerega v pravokotni smeri deluje sila F . Sorazmernostni koeficient E (Youngov modul) je sorazmeren mikroskopski konstanti k v enačbi (2). Enačbo (3) po Newtonovem sodobniku Robertu Hooku imenujemo **Hookov zakon**.



slika 3

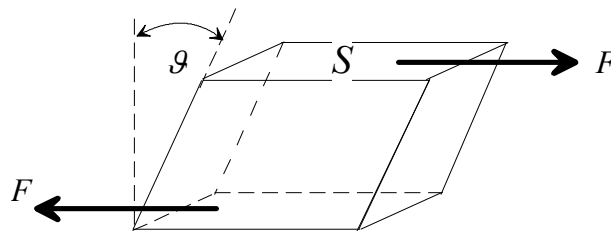
Območje veljavnosti Hookovega zakona



slika 4

V nadaljevanju, poleg zgoraj opisane natezne (kompresijske) vzdolžne deformacije, naštejemo še nekatere druge karakteristične deformacije za katere velja linearna zveza med napetostjo in deformacijo.

Strižna deformacija



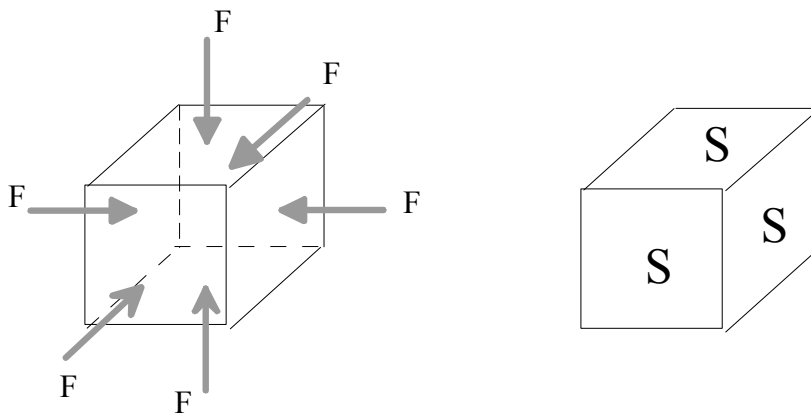
slika 5a

V primeru strižne deformacije deluje sila F na zgornjo in spodnjo ploskev vzdolž ploskve, to je v smeri pravokotno na normalo ploskve:

$$\tau = \frac{F}{S} = G g, \quad (4)$$

kjer je τ strižna napetost, G strižni modul, pomen deformacijskega kota g in površine S pa je razviden iz zgornje slike.

Vsestransko stiskanje (razpenjanje)



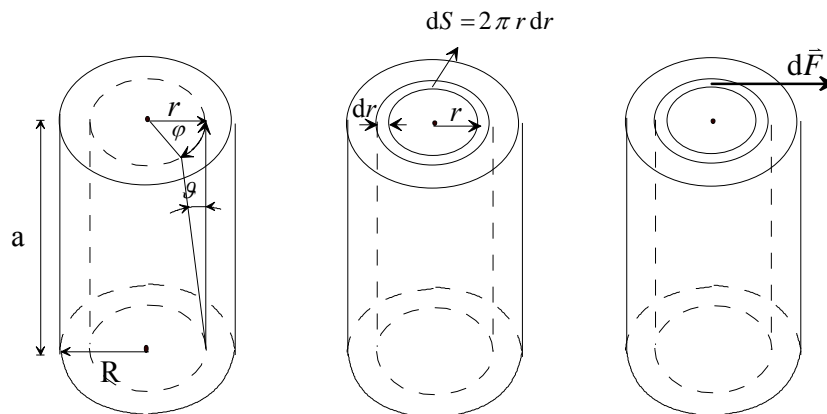
slika 5b

$$\frac{\Delta V}{V} = -\chi \frac{F}{S}, \quad (5)$$

kjer je $\Delta p = \frac{F}{S}$ sprememba tlaka, ki deluje na površino telesa, $\frac{\Delta V}{V}$ relativna sprememba volumna in χ stisljivost. Obratno vrednost stisljivosti χ^{-1} imenujemo stisljivostni modul.

Torzija

$$r\varphi = a\vartheta \Rightarrow \vartheta = \varphi \frac{r}{a}$$



slika 6

Torzija je poseben primer strižne deformacije (glejte sliko):

$$\frac{dF}{dS} = G\vartheta, \quad (6)$$

kjer je $dS = 2\pi r dr$, $\vartheta = \varphi \frac{r}{a}$ in G strižni modul, od koder sledi:

$$\frac{dF}{2\pi r dr} = G\varphi \frac{r}{a}, \quad (7)$$

oziroma:

$$dF = \left(\frac{2\pi G \varphi}{a} \right) r^2 dr. \quad (8)$$

Izračunajmo navor dM s katerim deluje sila dF na cevasti izrez palice s polmerom r :

$$dM = r dF = \left(\frac{2\pi G \varphi}{a} \right) r^3 dr \quad (9)$$

Celoten navor je potem:

$$M = \int dM = \int_0^R \left(\frac{2\pi G \varphi}{a} \right) r^3 dr = \left(\frac{2\pi G \varphi}{a} \right) \frac{R^4}{4}. \quad (10)$$

Vidimo torej, da je navor, ki je potreben za torzijski zasuk palice za kot φ , sorazmeren kotu zasuka:

$$\boxed{M = D \varphi}, \quad (11)$$

kjer je

$$D = \frac{\pi G R^4}{2a} \quad (12)$$

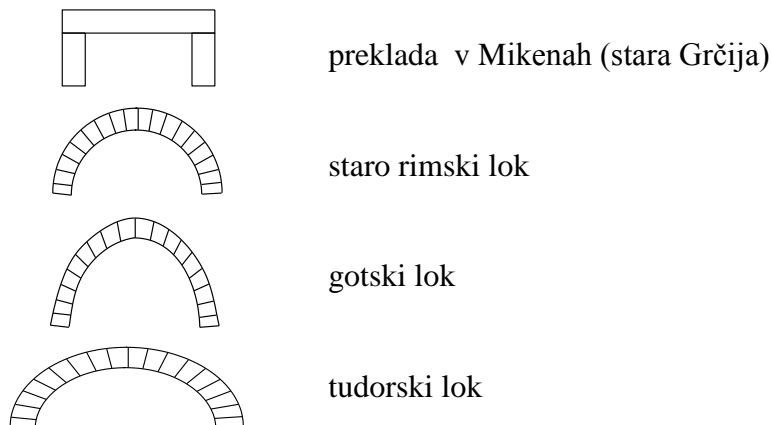
Vrednosti elastičnih konstant za nekatere trdne snovi in kapljevine* :

SNOV	E(Young-ov modul) $\left[\frac{N}{m^2} \right]$	G (strižni modul) $\left[\frac{N}{m^2} \right]$	χ^{-1} $\left[\frac{N}{m^2} \right]$
aluminij	$7 \cdot 10^{10}$	$2.5 \cdot 10^{10}$	$7 \cdot 10^{10}$
jeklo	$20 \cdot 10^{10}$	$8.4 \cdot 10^{10}$	$16 \cdot 10^{10}$
voda	-	-	$0.21 \cdot 10^{10}$
steklo	$7 \cdot 10^{10}$	$3 \cdot 10^{10}$	$5 \cdot 10^{10}$
živo srebro	-	-	$2.8 \cdot 10^{10}$

* kapljevine se razlikujejo od trdne snovi po tem, da ne prenašajo strižnih napetosti

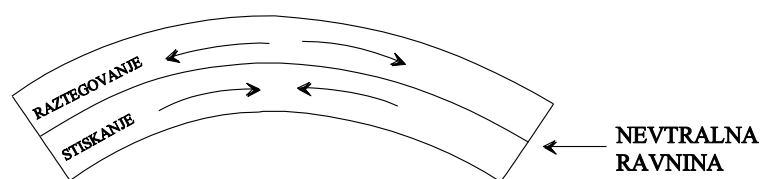
Upogib nosilca

Poznavanje deformacij in napetosti pri upogibu nosilcev je zelo pomembno pri konstrukciji strojev in zgradb. Ravni nosilci (preklade) na vhodih, vratih in oknih so izpostavljeni velikim upogibnim napetostim, zato so že v antičnih časih preklado nadomestili z lokom (obokom):



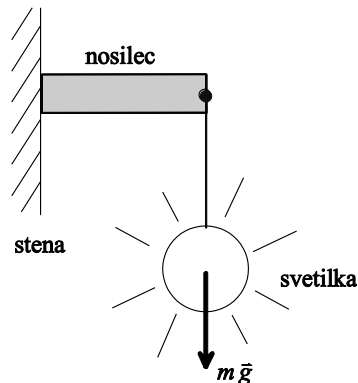
slika 7

Pri čistem upogibu nosilca obstaja tako imenovana nevtralna ravnina, ki pri upogibni deformaciji ohrani svojo površino. Nad nevtralno ravnino se nosilec razteguje, pod nevtralno ravnino pa je izpostavljen stiskanju. Pojav lahko opazujemo tudi pri upognjeni leskovi palici, kjer se na notranji strani loka lubje naguba, na zunanji strani pa napne.



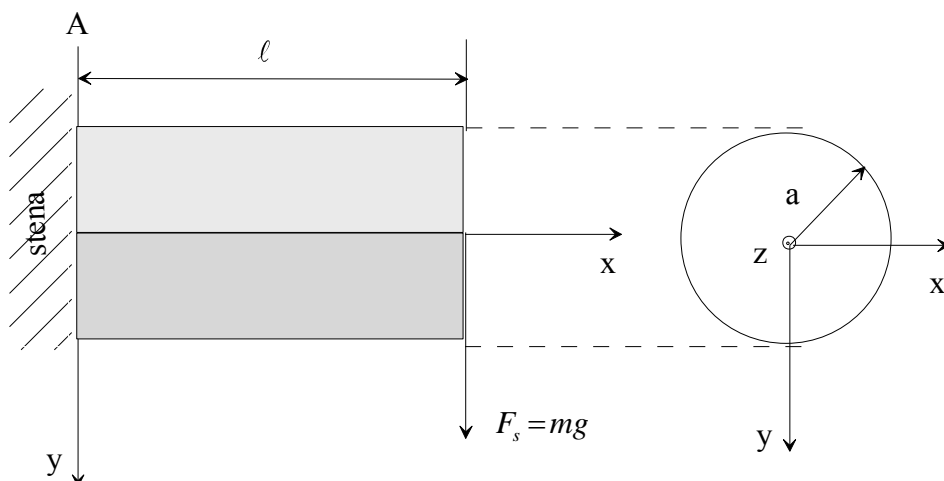
slika 8: Upogib palice.

Kot primer v nadaljevanju analiziramo napetosti in deformacije v zelo lahkem nosilcu s krožnim presekom s polmerom a , ki je na levem koncu vpet v steno, na desnem koncu nosilca pa je z lahko žico pritrjena svetilka z maso m (slika 9).



slika 9

Izhodišče koordinatnega sistema postavimo v središče. Sila teže svetilke $\vec{F}_s = m \vec{g}$ upogiba nosilec. Vpliv lastne teže nosilca na njegov upogib zanemarimo. Zaradi sile F_s se nosilec upogne v ravnini x, y izbranega koordinatnega sistema.



Slika 10

Zato se različni deli nosilca vzdolž osi y različno raztegujejo. Znotraj nosilca obstaja na os y pravokotna plast, ki se ne raztegne ali skrči. Kot smo že omenili jo imenujemo nevtralna plast (ravnina). Vzdolž te ravnine (plasti) merimo od koordinate x odvisno ukrivljenost (glejte sliko 11):

$$C_0 = \frac{1}{R_0}, \quad (13)$$

kjer je R_0 krivinski radij nevtralne ravnine na mestu x . Nad nevtralno plastjo se elementi vzdolžne plasti zaradi navora sile \vec{F}_s raztegnejo (ali skrčijo), pod to plastjo pa se skrčijo (ali raztegnejo), odvisno pač od predznaka ukrivljenosti $C(x)$ (glejte še sliko 11):

$$\varepsilon_x = \frac{ds - ds_r}{ds_r} = \frac{(R_0(x) + d) \cdot d\vartheta - R_0(x) \cdot d\vartheta}{R_0(x) \cdot d\vartheta}, \quad (14)$$

torej:

$$\varepsilon_x = \frac{d}{R_0(x)} = C(x) \cdot d, \quad (15)$$

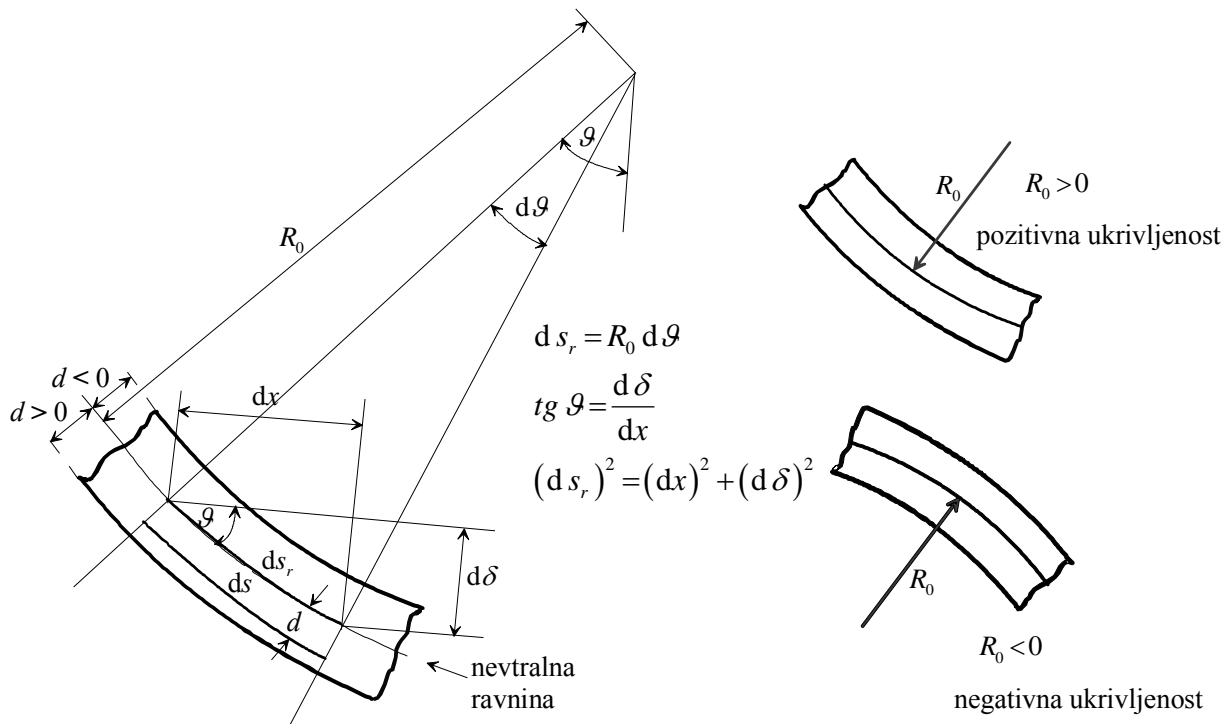
kjer je d razdalja obravnavanega elementa nosilca od nevtralne ravnine, ds_r in ds dolžini tega elementa pred oziroma po upogibu nosilca, pomen kotov ϑ in $d\vartheta$ pa je razviden iz slike 11.

Vrednost d na sliki 11 je pozitivna, če se ravnina nahaja pod nevtralno ravnino in negativna, če se obravnavana ravnina nahaja nad nevtralno ravnino.

Pri upogibu nosilca pod vplivom sile \vec{F} so od nič različne tudi nekatere strižne deformacije, ki pa jih bomo v tej fazi napetostne analize nosilca zanemarili. V nadaljnji analizi napetosti v nosilcu bomo predpostavili, da Hookov zakon v obliki enačbe (3) velja tudi za posamezne zelo tanke elemente vzdolžnih plasti v nosilcu na izbrani razdalji d od referenčne plasti. Torej, če vstavimo ε_x iz enačbe (15) v Hookov zakon $\sigma_x = E \varepsilon_x$ dobimo:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \cdot C(x) d, \quad (16)$$

kjer je d pozitiven za plasti, ki se pri upogibu raztegnejo in negativen za plasti, ki se pri upogibu skrčijo.

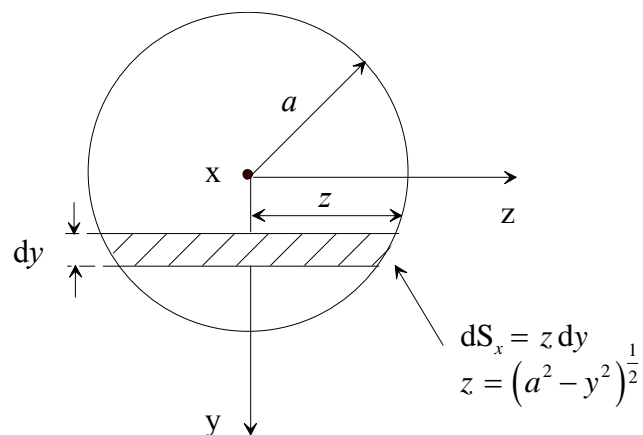


slika 11: Zaradi upogiba nosilca se element nosilca z dolžino ds_r , na razdalji d od nevtralne ravnine raztegne na dolžino ds . Simbol R_0 označuje krivinski radij nevtralne ravnine v izbrani točki, δ pa je vertikalni odmik izbrane točke v nevtralni ravnini od stanja v katerem nosilec ni upognjen.

V ravnovesju se morajo sile zaradi notranjih napetosti uravnovesiti z zunanji silami v vsakem delu nosilca. Ker v smeri x -osi na nosilec ne deluje nobena sila, mora biti vsota vseh sil zaradi notranjih napetosti po prerezu nosilca enaka nič:

$$\int \sigma_x dS_x = 0, \quad (17)$$

kjer je dS_x infinitezimalni element površine preseka nosilca v ravnini y, z (glejte sliko 12):



slika 12

Če vstavimo izraz za σ_x iz enačbe (16) v enačbo (17) dobimo:

$$\int_{S_x} EC(x)d dS_x = 0, \quad (18)$$

kjer integriramo po površini preseka nosilca v ravnini y, z .

Iz enačbe (18) pri izbrani vrednosti x -a sledi:

$$\int_{S_x} d dS_x = 0. \quad (19)$$

Ob upoštevanju definicije d -ja in definicije predznaka krivinskega radija R_0 (glejte sliko 11), tako iz enačbe (19) sledi:

$$d = y, \quad (20)$$

saj zaradi simetrije velja (glejte sliki 10 in 12)

$$\int_{S_x} y dS_x = 0, \quad (21)$$

pri čemer se nevtralna ravnina ujema z x, z ravnino (glejte sliko 12), torej poteka po sredini nosilca, kjer je $y = 0$.

Elastične sile v prečnem prerezu nosilca s površino S_x povzročajo navor, ki ima od nič različno komponento samo v smeri z-osi. Navor elastičnih sil namreč nasprotuje zakrivljanju nosilca zaradi navora sile \vec{F}_S , ki ima tudi samo z-komponento različno od nič. Navor elastičnih sil M skuša nosilec izravnati, zato ga imenujejo tudi upogibni navor elastičnih sil. S pomočjo enačb (16) in (20) dobimo:

$$M(x) = \int_{S_x} y \sigma_x dS_x = \int_{S_x} y (E C(x) y) dS_x = E C(x) I \quad (22)$$

kjer smo upoštevali enačbo (21), $C(x) = \text{konst.}$ pri izbranem x -u ter

$$I = \int_{S_x} y^2 dS_x \quad (23)$$

definirali kot upogibni vztrajnostni moment prereza nosilca s konstatnim presekom. Ker se ukrivljenost nosilca vzdolž osi x spreminja, je tudi elastični upogibni navor funkcija koordinate x . Prečni presek nosilca ima obliko kroga z radijem a , katerega središče pravokotno prebada x -os izbranega koordinatnega sistema (glejte še sliki 10 in 12).

Torej:

$$I = \int_{S_x} y^2 dS_x = \int_{-a}^{+a} y^2 z dy = \int_{-a}^{+a} y^2 (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{\pi a^4}{4}. \quad (24)$$

Če iz enačbe (22) izraženo ukrivljenost

$$C(x) = \frac{M(x)}{EI}, \quad (25)$$

vstavimo v enačbo (16), ter upoštevamo identiteto (20) dobimo:

$$\sigma_x = \left(\frac{M(x)}{I} \right) y. \quad (26)$$

Poiščimo še eksplicitni izraz za ukrivljenost $C(x)$. S slike 11 je razvidno, da je

$$ds_r = R_0 d\vartheta, \quad (27')$$

od koder sledi:

$$C(x) = \frac{1}{R_0(x)} = -\frac{d\vartheta}{ds_r}. \quad (27)$$

Ker je $\frac{d\delta}{dx} = \text{tg } \vartheta$ in $(ds_r)^2 = (dx)^2 + (d\delta)^2$, iz enačbe (27) sledi

$$C(x) = -\frac{\frac{d^2\delta}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{d\delta}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (28)$$

▪ **Dokaz relacije (28)** (glejte še sliko 11):

$$\text{▪ } ds_r = \left[(dx)^2 + (d\delta)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = dx \left[1 + \left(\frac{d\delta}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (29a)$$

$$\text{▪ } \operatorname{tg} \vartheta = \frac{d\delta}{dx} \Rightarrow d(\operatorname{tg} \delta) = d\left(\frac{d\delta}{dx} \right)$$

$$\frac{1}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta = \frac{d^2\delta}{dx^2} dx$$

$$d\vartheta = \cos^2 \vartheta \frac{d^2\delta}{dx^2} dx$$

$$d\vartheta = \frac{\frac{d^2\delta}{dx^2} dx}{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta} = \frac{\frac{d^2\delta}{dx^2} dx}{1 + \left(\frac{d\delta}{dx} \right)^2} \quad (29b)$$

V izraz

$$C(x) = -\frac{d\vartheta}{ds_r}$$

vstavimo enačbi (29a) in (29b) in dobimo enačbo (28):

$$C(x) = -\frac{d\vartheta}{ds_r} = -\frac{\frac{d^2\delta}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{d\delta}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (28)$$

Ker je ukrivljenost nosilca zaradi navora sile \bar{F}_s pri vseh x zelo majhna približno velja

$$C(x) = -\frac{d^2\delta}{dx^2} \quad (29)$$

Če kombiniramo enačbi (25) in (29) dobimo:

$$\frac{d^2\delta}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}. \quad (30)$$

Iz enačbe (30) izražen $M_z(x)$ vstavimo v enačbo (26). Tako dobimo:

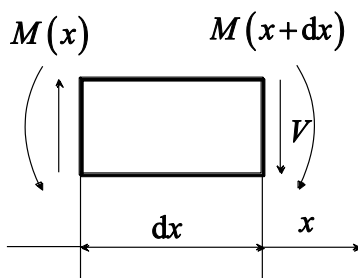
$$\sigma_x = -E y \frac{d^2\delta}{dx^2}. \quad (31)$$

Ker je elastični upogibni navor M funkcija koordinate x , se v prerezu nosilca poleg natezne sile pojavi tudi rezultantna strižna sila V , saj mora biti v ravnovesju vsota navorov, ki delujejo na izbran element nosilca dolžine dx , enak nič:

$$M(x) - M(x+dx) + V(x)dx = 0, \quad (32')$$

$$M(x) - \left(M(x) + \frac{dM}{dx} dx \right) + V(x)dx = 0, \quad (32)$$

kjer smo upoštevali $M(x+dx) = M(x) + \frac{dM}{dx} dx$.



$$V(x) = V(x+dx) = V = \text{konst.}$$

slika 13

Tudi vsota vseh sil v smeri y osi mora biti enaka nič, torej

$$V = \text{konst.} \quad (33)$$

Iz enačbe (32) dobimo zvezo med V in M ,

$$V = \frac{dM}{dx} \quad (34)$$

S pomočjo enačb (30), (33) in (34) pa dobimo

$$V = -EI \frac{d^3\delta}{dx^3} \quad (35)$$

in

$$EI \frac{d^4\delta}{dx^4} = 0, \quad (36)$$

kjer smo upoštevali $\frac{dV}{dx}=0$, ker je V konstanta. Diferencialno enačbo (36) rešujemo za primer predstavljen na slikah 9 in 10. Enačbo (36) štirikrat integriramo na obeh straneh enačaja:

$$EI \delta = \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4, \quad (37)$$

kjer so α_1 , α_2 , α_3 in α_4 konstante, ki jih določimo iz robnih pogojev. Iz robnih pogojev pri $x=0$:

$$\delta(x=0)=0, \quad \frac{d\delta}{dx}(x=0)=0, \quad (38)$$

sledi:

$$\alpha_3 = \alpha_4 = 0 \quad (39)$$

Iz robnega pogoja pri $x=\ell$,

$$-V(x=\ell) + F_s = 0, \quad (40)$$

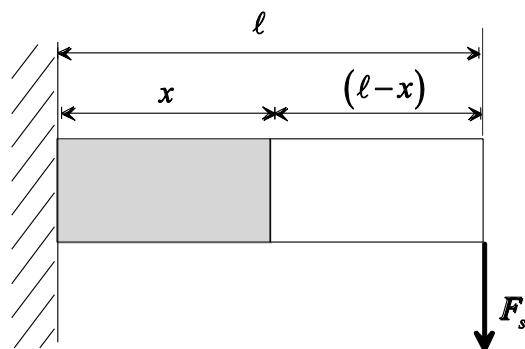
sledi:

$$\alpha_1 = -\frac{F_s}{6}. \quad (41)$$

Levi pritrjeni del nosilca prek prereza deluje na desni del z navorom $M = -EI \frac{d^2\delta}{dx^2}$

(glejte enačbo (30)) in ga skuša zavrteti navzgor. Sila \vec{F}_s pa ga želi zavrteti navzdol z navorom $(\ell-x)F_s$:

$$M(x) + (\ell-x)F_s = 0. \quad (42)$$



slika 14

V enačbo (42) vstavimo $M(x) = -EI \frac{d^2\delta}{dx^2}$ (glejte enačbo (30)) in dobimo:

$$-EI \frac{d^2 \delta}{dx^2} + (\ell - x) F_s = 0 \quad (43)$$

Vstavimo $\delta(x)$ iz enačbe (37) v enačbo (43):

$$-6\alpha_1 x - 2\alpha_2 + (\ell - x) F_s = 0, \quad (44)$$

za α_1 vstavimo izraz $\alpha_1 = -\frac{F_s}{6}$ (enačba (41)) in dobimo:

$$-2\alpha_2 + F_s \ell = 0,$$

oziroma:

$$\alpha_2 = \frac{F_s \ell}{2} \quad (45)$$

Sedaj ko poznamo konstante α_1 , α_2 , α_3 in α_4 lahko zapišemo celotno rešitev (enačba (37)):

$$\delta(x) = \frac{\left(-\frac{F_s}{6} x^3 + \frac{1}{2} F_s \ell x^2 \right)}{EI}. \quad (46)$$

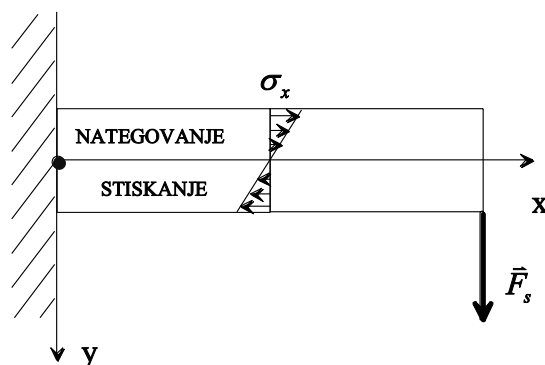
Od tod lahko izračunamo s pomočjo enačbe (30):

$$M(x) = F_s (x - \ell) \quad (47)$$

in s pomočjo enačbe (31):

$$\sigma_x(x) = \frac{F_s y (x - \ell)}{I}, \quad (48)$$

kjer je $I = \frac{\pi a^4}{4}$.



Slika 15: Natezne in kompresijske napetosti v petem nosilcu.