MEHANIKA IN TERMODINAMIKA

Aleš Iglič in Veronika Kralj-Iglič

Ljubljana, 2016

PREDGOVOR

Učbenik z naslovom *Mehanika in termodinamika* za predavanja iz Fizike I na Fakulteti za elektrotehniko naj bi študente delno razbremenil zapisovanja enačb in jim tako omogočil pozornejše spremljanje predavanj ter beleženje opomb. Spremljanje predavanj iz Fizike 1 zahteva temeljito ponovitev osnov diferencialnega, integralnega in vektorskega računa (glejte R. Kladnik: Osnove Fizike, 1. del, str. 10 – 26, DZS, 1974; knjigo dobite v knjižnici FE). Evi Zupan Debevec in Hani Debevec, univ.dipl.ing.el. se zahvaljujeva za tipkanje, urejanje in pregledovanje teksta, fotografije ter risanje slik. Za koristne nasvete pa recenzentom Tomažu Slivniku, Tomažu Gyergyeku in Francetu Sevšku.

Veronika Kralj-Iglič in Aleš Iglič

VSEBINA

	MEHANIKA	7
1.	Kinematika	7
2.	Newtonovi zakoni	19
3.	Izrek o vrtilni količini	42
4.	Izrek o kinetični in potencialni energiji	57
5.	Harmonično nedušeno nihanje	67
6.	Dušeno nihanje	78
7.	Vsiljeno nihanje	80
8.	Sklopljeno nihanje	86
9.	Deformacija trdnih snovi	93
10.	Osnovne lastnosti tekočin	107
11.	Opis gibanja tekočin	112
12.	Pretakanje viskozne tekočine po cevi	115
13.	Bernoullijeva enačba	123
14.	Sile na telesa v tekočini	127
15.	Laplace-ova enačba	136
16.	Young-ova enačba	141
17.	Mehansko valovanje	147
	TERMODINAMIKA	159
18.	Kinetična teorija plinov	160
19.	Entropijski zakon	177
20.	Termodinamske funkcije in termodinamsko ravnovesje sistema	186
21.	Prenos toplote	188
22.	Toplotni in hladilni stroji	191
23.	Toplotno raztezanje trdnih snovi	194
	Literatura	196

MEHANIKA

1. Kinematika

Kinematika (gr. kinematos = gibanje) se ukvarja z opisom gibanja teles po prostoru ne glede na vzroke gibanja. V okviru klasične fizike z besedo gibanje poimenujemo pomikanje teles po tridimenzionalnem izotropnem prostoru. Obstoj prostora se zdi v klasični fiziki samoumeven. Aristotel (384 – 322 p.n.št.) tako pravi, da je nemogoče, da bi bil prostor telo (snov), ker bi bili tedaj na istem mestu dve telesi.

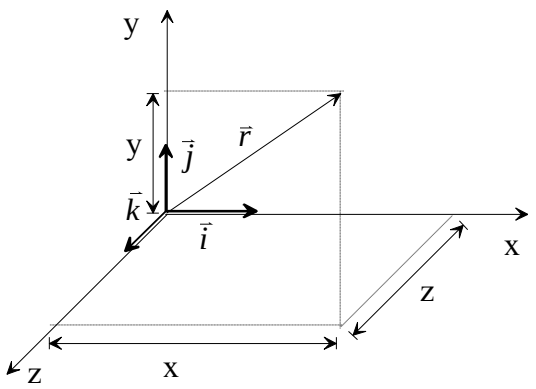
Gore za opazovalca na Zemlji mirujejo, za opazovalca na Luni pa se gibljejo (skupaj z Zemljo). Spoznanje ali opazovano telo miruje ali pa se giblje je torej odvisno od opazovalca. Absolutnega mirovanja ali gibanja zato ne moremo definirati. Opis gibanja je vedno vezan na izbran opazovalni (koordinatni) sistem. Običajno v klasični fiziki opazovalni sistem vežemo na zemeljsko površje.

Kinematika opisuje časovno odvisnost lege telesa v izbranem opazovalnem sistemu. Ali kot pravi Aristotel, čas definira gibanje glede na prej in kasneje. Čas je torej merilo (*μέτρον)* gibanja. V klasični fiziki se glede časa držimo nekaterih Aristotelovih načel, na primer tistega, da je **čas zvezen** ter isti vsepovsod hkrati (torej **absoluten**). Aristotel je zapisal, da čas ni hiter in ne počasen. Čas je torej zvezen parameter, ki teče v vseh opazovalnih sistemih **enako hitro**. Načelo **homogenosti časa** predpostavlja, da ima čas vedno enake lastnosti (v preteklosti, sedanjosti in prihodnosti).

Gibanje točkastega telesa je dober približek (aproksimacija) kadar so premiki telesa **veliko** večji kot razsežnost telesa (primer: gibanje Zemlje okoli Sonca).

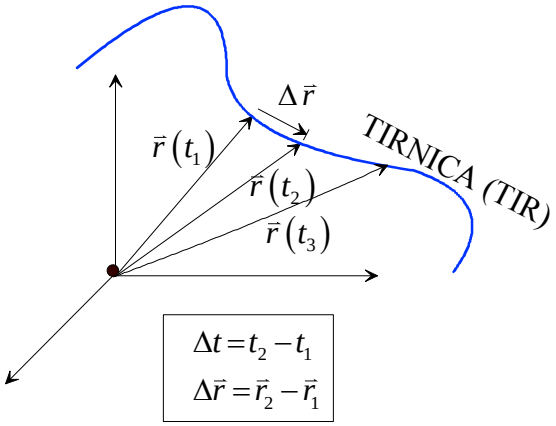
- **Lego točkastega telesa opišemo s krajevnim vektorjem** $\vec{r}(x, y, z)$ v kartezičnem koordinatnem sistemu (x, y, z), ki ima paroma pravokotne koordinatne osi x, y in z

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



če se $\vec{r}$ spreminja s časom $\Rightarrow$ **gibanje**

- krivuljo, ki določa $\vec{r}(t)$ imenujemo **tirnica** ali **trajektorija**



$$\vec{r}(t) = \left(x(t),\ y(t),\ z(t)\right) \tag{1}$$

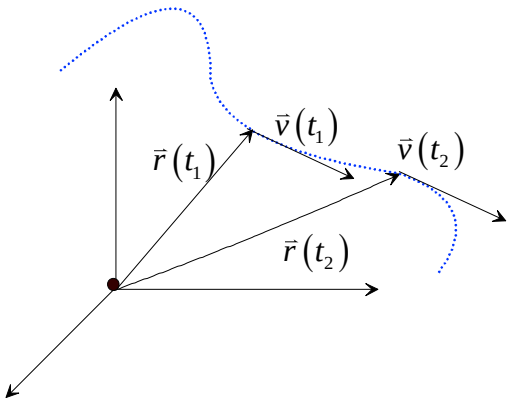
- Zanima nas kako hitro se lega delca spreminja. Definiramo vektor **hitrosti** kot:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) = \left(v_x, v_y, v_z\right) \tag{2}$$

velikost hitrosti: $v = |\vec{v}| = \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)^{1/2}$

- **Pospešek** pove kako se s časom spreminja hitrost $\vec{v}(t)$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$
$$\Delta t = t_2 - t_1$$



definicija pospeška:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\right)$$

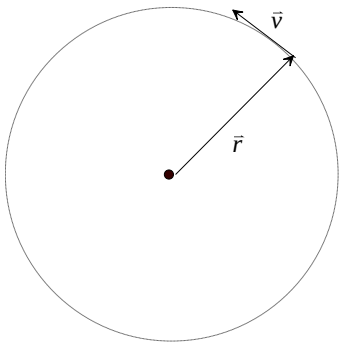
$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right) \tag{3}$$

Torej:

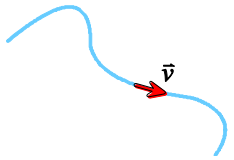
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \left(x(t), y(t), z(t)\right) \\ \vec{v}(t) &= \left(v_x, v_y, v_z\right) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) \\ \vec{a}(t) &= \left(a_x, a_y, a_z\right) = \left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\right) \end{aligned}} \tag{4}$$

Opombe: pospešek je lahko različen od nič, čeprav se velikost $\vec{r}$ in $\vec{v}$ ne spreminjata s časom (n.pr. pri enakomernem kroženju):

$$|\vec{r}| = r = \text{konst.}$$
$$|\vec{v}| = v = \text{konst.}$$



- **Računanje poti:** $\boxed{s = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}| \, \mathrm{d}t}$ (5)



tir

- **Poseben primer:** enakomerno pospešeno gibanje

$$\boxed{\vec{a}(t) = \vec{a}_0 = \text{konstanta}}$$

izberemo začetne pogoje: $\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0)$

$\vec{r}_0 = \vec{r}(t=0)$

$$\vec{a}_0 = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} \mathrm{d}\vec{v} = \int_0^t \vec{a}_0 \mathrm{d}t$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 t} \tag{6}$$

$$\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0)$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^t \left(\vec{v}_0 + \vec{a}_0 t\right)\mathrm{d}t$$

$$\vec{r}_0 = \vec{r}\left(t=0\right)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t + \vec{a}_0 \frac{t^2}{2}$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{a}_0 \frac{t^2}{2}} \qquad (7)$$

Zapis krajevnega vektorja $\vec{r}$ po komponentah:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}\, t + a_{0x} \frac{t^2}{2} \\ y &= y_0 + v_{0y}\, t + a_{0y} \frac{t^2}{2} \\ z &= z_0 + v_{0z}\, t + a_{0z} \frac{t^2}{2} \end{aligned} \qquad (8)$$

- **Premo enakomerno pospešeno gibanje** (gibanje po premici)

$$\boxed{v = v_0 + a_0\, t} \qquad (9)$$

$$\boxed{x = x_0 + v_0\, t + \frac{a_0 t^2}{2}} \qquad (10)$$

če $x_0 = 0$:

$$\boxed{x = v_0 t + a_0 \frac{t^2}{2}} \qquad (11)$$

$$\boxed{v = v_0 + a_0 t} \qquad (12)$$

Iz enačbe (12) izrazimo čas $t = \frac{v - v_0}{a_0}$ in ga vstavimo v enačbo (11):

$$x = v_0 \frac{\left(v - v_0\right)}{a_0} + \frac{a_0}{2} \frac{\left(v - v_0\right)^2}{a_0^2} \quad ,$$

od koder sledi:

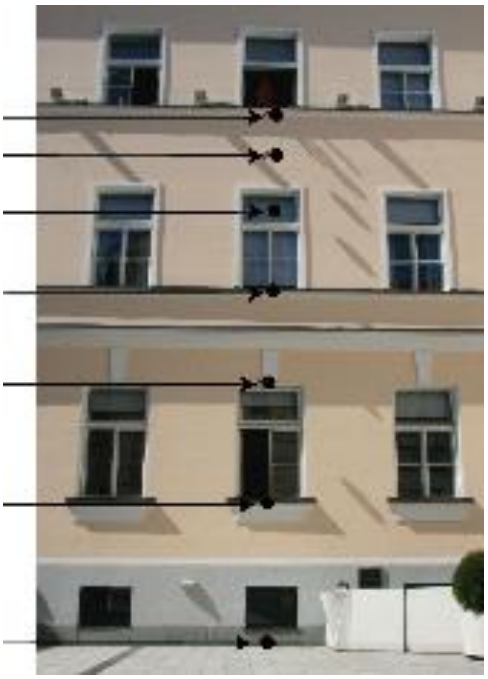
$$2\,x\,a_0 = 2\,v_0\left(v - v_0\right) + \left(v - v_0\right)^2$$

$$2a_0\, x = 2\,v_0 v - 2\,v_0^2 + v^2 - 2\,v_0 v + v_0^2$$

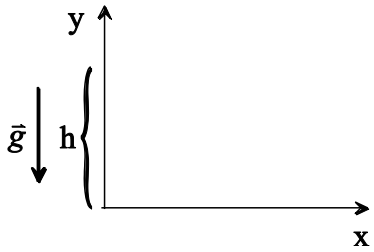
$$2a_0\, x = v^2 - v_0^2 \text{ , torej:}$$

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a_0\, x} \qquad (13)$$

- **Prosti pad (**upor zraka zanemarimo)



Padanje žoge (foto: U. Anzeljc).



gravitacijski pospešek: $g \approx 9.8\,\mathrm{ms}^{-2}$

začetni pogoji:

$$y(t=0)=h$$

$$v_y(t=0)=0$$

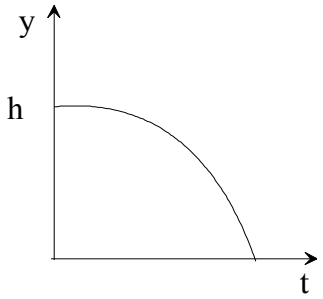
$$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-g \;\Rightarrow \int_0^{v_y}\mathrm{d}v_y=-g\int_0^t \mathrm{d}t$$

$$\boxed{v_y=-gt}$$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}y=v_y\,\mathrm{d}t$$

$$\int_h^y \mathrm{d}y=\int_0^t(-gt)\,\mathrm{d}t$$

$$y-h=-g\frac{t^2}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{y=h-g\frac{t^2}{2}}$$

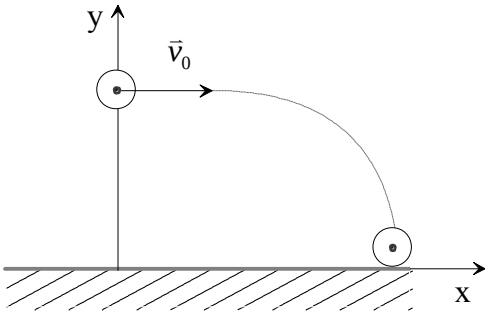


ko je $y = 0$, pade telo na tla:

$$0 = h - g\frac{t_p^2}{2} \Rightarrow \quad \boxed{t_p = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$ čas padanja

$$v(y=0) = -g\,t_p = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$$ je hitrost pri tleh tik preden se telo dotakne tal

- **Vodoravni met**



začetni pogoji:

$$v_y(t=0) = 0$$
$$v_x(t=0) = v_0$$
$$y(t=0) = h$$

pospešek:

$$a_x = 0$$
$$a_y = -g$$

hitrost:

$$v_x = v_0$$
$$v_y = -gt$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t \mathrm{v_x}\,\mathrm{d}t \Rightarrow \quad \boxed{x = v_0\,t}$$

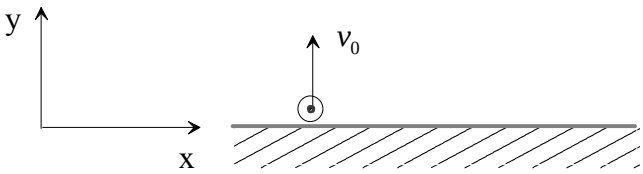
$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \int_h^y \mathrm{d}y = \int_0^t \mathrm{v_y d}t \Rightarrow \boxed{y = h - \frac{gt^2}{2}}$$

čas padanja:

$$0 = h - \frac{gt_p^2}{2}$$

$$\boxed{t_p = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

- **Navpični met**



$$\boxed{a_g = -g}$$

začetni pogoji:

$$y(t=0) = 0$$
$$v_y(t=0) = v_0$$

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -g,$$
$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v_y = -\int_0^t g\mathrm{d}t$$

$$\boxed{v_y = v_0 - gt}$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$
$$\int_0^y \mathrm{d}y = \int_0^t v_y \,\mathrm{d}t$$

$$y = \int_0^t (v_0 - gt)\,\mathrm{d}t = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

$$\boxed{y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}}$$

- **najvišja točka je dosežena**, ko je $v_y = 0$:

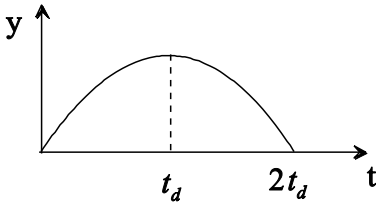
$$v_y = v_0 - g t_d = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{t_d = \frac{v_0}{g}}$$

- **pri tem doseže telo višino:**

$$h = y(t_d) = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2}\frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g}$$

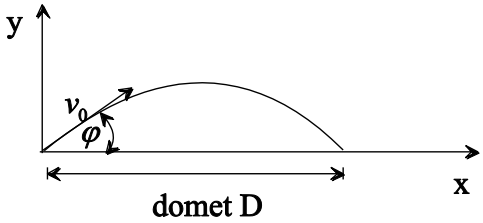
- Telo pade na tla ob času t_p:



$$y = 0 = v_0 t_p - \frac{g t_p^2}{2}$$

$$t_p = \frac{2v_0}{g} = 2t_d$$

- **Poševni met**



začetni pogoji:

$$a_x = 0, \quad v_x(t=0) = v_0 \cos\varphi$$
$$a_y = -g, \quad v_y(t=0) = v_0 \sin\varphi$$

$$x(t=0) = 0$$
$$y(t=0) = 0$$

komponente vektorja hitrosti:

$$v_x = v_0 \cos\varphi$$
$$v_y = v_0 \sin\varphi - gt$$

komponente krajevnega vektorja:

$$x = v_0 \cos\varphi t$$
$$y = v_0 \sin\varphi t - \frac{gt^2}{2}$$
$$x = v_0 \cos\varphi t \;\Rightarrow\; t = \frac{x}{v_0 \cos\varphi}$$
$$y = v_0 \sin\varphi t - \frac{gt^2}{2}$$
$$y = \frac{v_0 \sin\varphi x}{v_0 \cos\varphi} - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2 cos^2\varphi}$$, od koder sledi

enačba parabole, ki opisuje tir telesa pri poševnem metu:

$$\boxed{y = x\,tg\,\varphi - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\varphi}x^2}$$

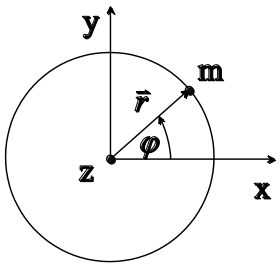
Domet:

$$0 = x\,tg\,\varphi - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\varphi}x^2$$
$$tg\,\varphi = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\varphi}x \;\Rightarrow\; x = \frac{2v_0^2 \sin\varphi \cos\varphi}{g} = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\varphi)$$

domet je maksimalen, ko je $2\varphi = 90^0 \Rightarrow \varphi = 45^0$

- **Kroženje točkastega telesa**

Obravnavamo gibanje po krožnici v ravnini x,y (z = 0):



Za kroženje po krožnici s polmerom *r* v ravnini x, y zapišemo komponente krajevnega vektorja v obliki (glejte sliko):

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi \tag{14}$$
$$z = 0$$

Zasuk φ je v splošnem poljubna funkcija časa:

$$\varphi = \varphi(t) \tag{15}$$

Odvajajmo krajevni vektor

$$\vec{r} = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0) \tag{16}$$

po času:

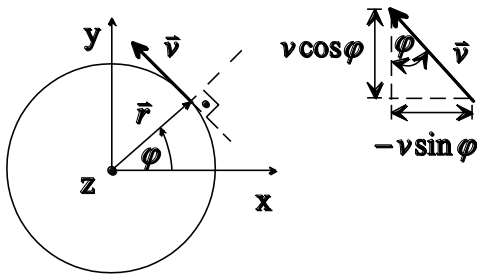
$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \left(-r\sin\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t},\ r\cos\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, 0\right), \tag{17}$$

kjer definiramo kotno hitrost kot:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \tag{18}$$

torej:

$$\vec{v} = \omega r(-\sin\varphi,\ \cos\varphi, 0) \tag{19}$$



Vektor hitrosti $\vec{v}$ lahko zapišemo kot (glejte zgornjo sliko):

$$\vec{v} = v(-\sin\varphi,\ \cos\varphi, 0). \tag{20}$$

Iz primerjave enačb (19) in (20) sledi izraz za velikost obodne hitrosti:

$$\boxed{v = \omega r}\ . \tag{21}$$

Definiramo enotni vektor v smeri hitrosti, to je v smeri tangente na tir (glejte enačbo (20) in zgornjo sliko):

$$\vec{e}_t = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0). \tag{22}$$

Ker je $\vec{e}_t$ enotni vektor, je njegova velikost 1:

$$|\vec{e}_t| = e_t = (\vec{e}_t \cdot \vec{e}_t)^{\frac{1}{2}} = \left[(-\sin\varphi)^2 + \cos^2\varphi \right]^{\frac{1}{2}} = 1 .$$

S pomočjo definicije enotnega vektorja $\vec{e}_t$ zapišemo enačbo (19) v obliki:

$$\vec{v} = \omega r (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) = \omega r \vec{e}_t . \tag{23}$$

Definirajmo še enotni vektor v smeri osi z:

$$\vec{e}_z = (0,0,1) \tag{24}$$

in enotni vektor v smeri krajevnega vektorja $\vec{r}$ (glejte sliko):

$$\vec{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \tag{25}$$

kjer je:

$$e_z = (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

$$e_r = (\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r)^{\frac{1}{2}} = (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 .$$

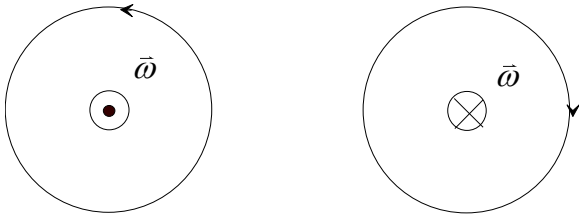
Če izrazimo enotni vektor v smeri vektorja hitrosti $\vec{v}$ (to je v smeri tangente na tir) kot (glejte še sliko):

$$\vec{e}_t = \vec{e}_z \times \vec{e}_r , \tag{26}$$

lahko zapišemo enačbo (23) v obliki:

$$\vec{v} = \omega r \vec{e}_t = \omega r (\vec{e}_z \times \vec{e}_r) = \omega \vec{e}_z \times r \vec{e}_r = \vec{\omega} \times \vec{r} , \tag{27}$$

kjer smo predpostavili, da vektor kotne hitrosti kaže v smeri ali nasprotni smeri osi z in je pravokoten na ravnino kroženja. Smer vektorja $\vec{\omega}$ določimo po pravilu desnosučnega vijaka:



$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

Izračunajmo še pospešek krožeče točkaste mase:

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}\,, \tag{28}$$

kjer smo definirali vektor kotnega pospeška:

$$\vec{\alpha}=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}. \tag{29}$$

Ker velja $\vec{\omega}=\left(0,0,\omega\right)$ je

$$\vec{\alpha}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(0,0,\omega\right)=\left(0,0,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)=\left(0,0,\alpha\right). \tag{30}$$

Vidimo torej, da vektor $\vec{\alpha}$ kaže v isto smer kot vektor kotne hitrosti $\vec{\omega}$. Zapišimo sedaj drugi člen v enačbi (28) malo drugače:

$$\vec{\omega}\times\vec{v}=\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)=\vec{\omega}\left(\vec{\omega}\cdot\vec{r}\right)-\vec{r}\left(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}\right)=0-\omega^2\vec{r}\,, \tag{31}$$

kjer smo upoštevali, da je skalarni produkt dveh pravokotnih vektorjev $\vec{\omega}$ in $\vec{r}$ enak nič. Z upoštevanjem enačbe (31) lahko enačbo (28) zapišemo v obliki:

$$\boxed{\vec{a}=\vec{\alpha}\times\vec{r}-\omega^2\,\vec{r}} \tag{32}$$

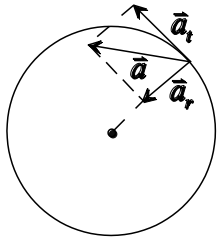
Definiramo tangentni pospešek

$$\vec{a}_t=\vec{\alpha}\times\vec{r}=\alpha\,\vec{e}_z\times r\,\vec{e}_r=\alpha\,r\left(\vec{e}_z\times\vec{e}_r\right)=\alpha\,r\,\vec{e}_t\ , \tag{33}$$

ki kaže v smeri tangente na tir, ter radialni pospešek

$$\vec{a}_r=-\omega^2\,\vec{r}\,, \tag{34}$$

ki kaže proti središču kroženja v nasprotni smeri od krajevnega vektorja $\vec{r}$. Radialni pospešek je različen od nič tudi v primeru, ko je $v=\left|\vec{v}\right|=\text{konst.}$



V splošnem je velikost celotnega pospeška

$$a=\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a_t^2+a_r^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\alpha^2 r^2+\omega^4 r^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{35}$$

- **Poseben primer:** enakomerno pospešeno kroženje

Osnovna predpostavka: kotni pospešek $\alpha=\alpha_0=\text{konst.}$, torej:

$$\alpha_0=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}\omega=\alpha_0\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega}\mathrm{d}\omega=\int_0^t\alpha_0\,\mathrm{d}t\text{, kjer je }\omega_0=\omega\left(t=0\right)$$

$$\omega-\omega_0=\alpha_0\,t$$

$$\boxed{\omega=\omega_0+\alpha_0\,t} \tag{36}$$

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}\varphi=\omega\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi}\mathrm{d}\varphi=\int_0^t\left(\omega_0+\alpha_0\,t\right)\mathrm{d}t\text{, kjer je }\varphi_0=\varphi\left(t=0\right)$$

$$\varphi-\varphi_0=\omega_0\,t+\alpha_0\frac{t^2}{2}$$

$$\boxed{\varphi=\omega_0\,t+\alpha_0\frac{t^2}{2}}, \tag{37}$$

kjer smo postavili $\varphi_0=0$.

- **Poseben primer:** enakomerno kroženje

Osnovna predpostavka: kotni pospešek $\alpha=0$

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=0\ \Rightarrow\ \boxed{\omega=\omega_0=\text{konst.}} \tag{38}$$

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\omega_0$$

$$\mathrm{d}\varphi=\omega_0\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi}\mathrm{d}\varphi=\int_0^t\omega_0\,\mathrm{d}t$$

$$\varphi-\varphi_0=\omega_0\,t\text{, kjer je }\varphi_0=\varphi\left(t=0\right)$$

$$\boxed{\varphi = \omega_0 t}\,, \tag{39}$$

če postavimo $\varphi_0 = 0$.

Izračunajmo čas enega obhoda (obhodni čas):

$$t_0 = \frac{2\pi r}{v_0} = \frac{2\pi r}{\omega_0 r} = \frac{2\pi}{\omega_0}\,, \tag{40}$$

od koder sledi:

$$\omega_0 = 2\pi \frac{1}{t_0} = 2\pi \upsilon_0\,, \tag{41}$$

kjer smo definirali frekvenco

$$\boxed{\upsilon_0 = \frac{1}{t_0}} \tag{42}$$

2. Newton-ovi zakoni

sir Isaac Newton
(1643 – 1727)

Telesa se gibljejo zaradi vpliva drugih teles na obravnavano telo. Vzrok gibanja torej običajno leži v interakciji med telesi. V okolici opazovanega telesa je navadno mnogo teles, kar naredi analizo gibanja teles težavno. To je najbrž tudi vzrok, da je šele sir Isaac Newton v drugi polovici 17. stoletja uspel dobro definirati temeljne zakone (sedaj jih imenujemo Newton-ovi zakoni) klasične dinamike (dynamis (gr.) = sila), ki jih je objavil v knjigi z naslovom Matematična načela naravoslovja. Tri Newton-ove zakone za analizo gibanja točkastih teles lahko opišemo z besedami:

I. Vsako telo vztraja v stanju mirovanja ali enakomernega gibanja po ravni črti, če ne deluje nanj nobena sila.
II. Sprememba gibanja telesa je sorazmerna sili, ki deluje na telo in ima smer te sile.
III. K vsaki sili (akciji) ostaja vedno nasprotno enaka sila (reakcija); ali drugače, če deluje prvo telo na drugo telo z neko silo, deluje drugo telo na prvo telo z enako veliko silo v nasprotni smeri.

K zgornjim Newton-ovim zakonom podajmo še definiciji sile in telesa:

Sila je količina, ki meri vpliv enega telesa na drugo telo.
Telo je vsak del snovi, ki ga lahko vsaj teoretično ločimo od okolice.

Drugi Newton-ov zakon izrazimo v matematični obliki kot:

$$\vec{F} = m\vec{a}\,, \tag{1}$$

oziroma

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\left(m\vec{v}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{G}}{\mathrm{d}t}\,, \tag{2}$$

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA

Autore *J S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheſeos Profeſſore *Lucaſiano*, & Societatis Regalis Sodali.

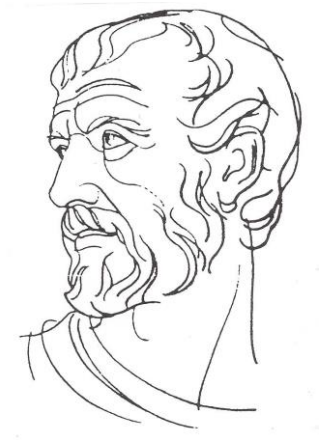
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater*. Proſtant Venales apud *Sam. Smith* ad inſignia Principis *Walliæ* in Cœmiterio D. *Pauli*, alioſq; nonnullos Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

kjer je m (vztrajnostna) masa točkastega telesa, ki meri vztrajnost telesa pri spremembi hitrosti telesa, $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ je pospešek točkastega telesa, $\vec{v}$ je hitrost točkastega telesa,

$$\vec{G} = m\vec{v}\,, \tag{3}$$

pa gibalna količina točkastega telesa. Enačbi (1) in (2) sta ekvivalentni, če je masa telesa konstantna. Masa opisuje množino snovi in je aditivna količina. Enota za maso je kilogram (kg). V klasični fiziki velja zakon o ohranitvi mase. Iz vsakdanjih izkušenj po občutku tudi vemo, da **masivnejšemu** telesu težje spremenimo hitrost kot manj masivnemu. Na primer, ping-pong žogici lažje spremenimo hitrost kot košarkarski žogi ali železniškemu vagonu. Pri obravnavi Newtonovih zakonov je treba poudariti, da je do časa renesanse namesto drugega Newtonovega zakona veljal **Aristotelov zakon gibanja**.



Aristotel
(384 – 322 pred n. št.)

Aristotel je delil gibanje teles na **naravna** in **vsiljena** gibanja. Naravna gibanja, takó je po Aristotelu na primer gibanje planetov, za vzdrževanje ne potrebuje nobene sile. Vsiljeno gibanje, na primer premikanje voza, pa vedno potrebuje za svoje vzdrževanje od nič različno zunanjo silo (zunanji vzrok). Aristotel kot primer navaja, da dva konja vlečeta voz hitreje kot en konj. Če pa niti eden konj ni vpležen v voz, se ta ne giblje. V skladu s tem razmišljanjem je Aristotel prišel do zaključka, da je vzdrževanje **enakomernega** gibanja (t.j. konstantne hitrosti) vedno potrebna sila. Aristotelov zakon gibanja bi lahko zato matematično izrazili kot

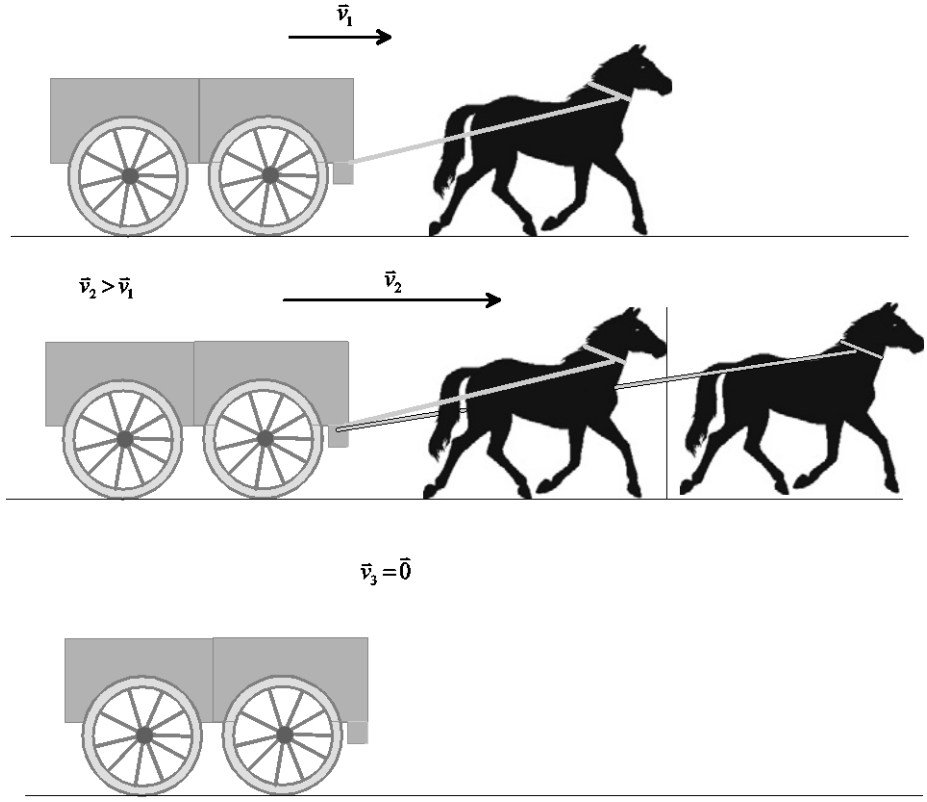
$$F \propto v \quad ,$$

oziroma

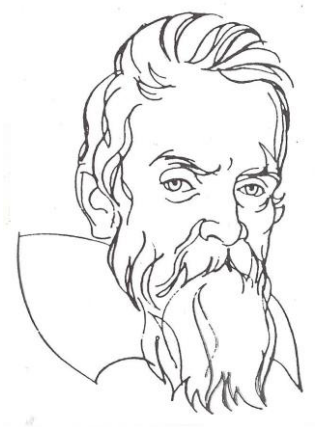
$$v \propto F \quad ,$$

to je hitrost je sorazmerna sili, kar seveda ni pravilno. Vidimo, da je Aristotel pozabil na sile upora in silo trenja. Za vzdrževanje enakomerne hitrosti telesa je namreč sila potrebna zato, da premaguje silo upora in silo trenja. Če sile upora in sile trenja ni (n.pr. pri gibanju telesa v vakuumu v brezteznem prostoru) za vzdrževanje konstantne hitrosti telesa, ki se giblje po ravni črti ni potrebna sila, kar je vsebina I. Newtonovega zakona.

Kako je razmišljal Aristotel?



Premik od Aristotelovega napačnega razmišljanja je naredil **Galileo Galilei**, ki je prišel do zaključka, da za vzdrževanje konstantne hitrosti telesa ni nujno potrebna tudi sila. Pač pa je sila potrebna, da telo ustavimo, to je za spremembo hitrosti.



Galileo Galilei
(1564 – 1642)

Galileo dejansko nikoli ni prišel do zaključka, da se telo v odsotnosti sil giblje s konstantno hitrostjo po ravni črti. Vsebino I. Newtonovega zakona je prvi formuliral francoski matematik in filozof **René Descartes** (1596 – 1650). Latinska varianta Descartesovega priimka (Cartezius) je dala ime kartezičnemu koordinatnemu sistemu, ki ima paroma pravokotne osi x, y in z.

René Descartes
(1596 – 1650)

Na osnovi povedanega lahko torej zaključimo, da v okviru Newtonovega opisa gibanje teles za vzdrževanje stalne hitrosti ni potrebna sila. Pač pa je sila potrebna za spremembo hitrosti, to je za pospešek (pojemek) telesa. Z drugimi besedami, vzrok za spremembo hitrosti imenujemo silo. Masivnejšemu telesu težje spremenimo hitrost, zato rečemo masi m v II. Newtonovem zakonu vztrajnostna masa. Sila je aditivna vektorska količina.

Sile med telesi so običajno centralne, to se pravi, da delujejo na zveznici, ki povezuje dve točkasti telesi. Primer centralnih sil je Coulombska elektrostatska sila, ki deluje med točkastima nabojema e_1 in e_2:

$$\vec{F} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \tag{4}$$

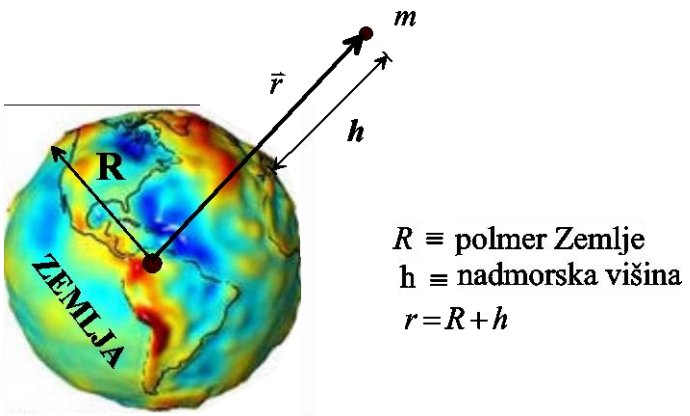
kjer je ε_0 influenčna konstanta, r pa razdalja med nabojema, ali pa gravitacijska privlačna sila med dvema točkastima masama m_1 in m_2 na razdalji r:

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \tag{5}$$

kjer je G gravitacijska konstanta. V primeru gravitacijske sile med Zemljo z maso M_Z in točkastim telesom z maso m je gravitacijska sila (glejte še Kladnik: Visokošolska fizika):

$$\vec{F}_g = -G\frac{M_Z m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \tag{6}$$

kjer je r razdalja od središča Zemlje do točkastega telesa.



Velikost gravitacijske privlačne sile, ki deluje na maso *m* lahko zapišemo tudi v obliki (glejte sliko):

$$F_g = G\frac{M_Z\, m}{r^2} = G\frac{M_Z\, m}{(R+h)^2} = mg \ , \tag{7}$$

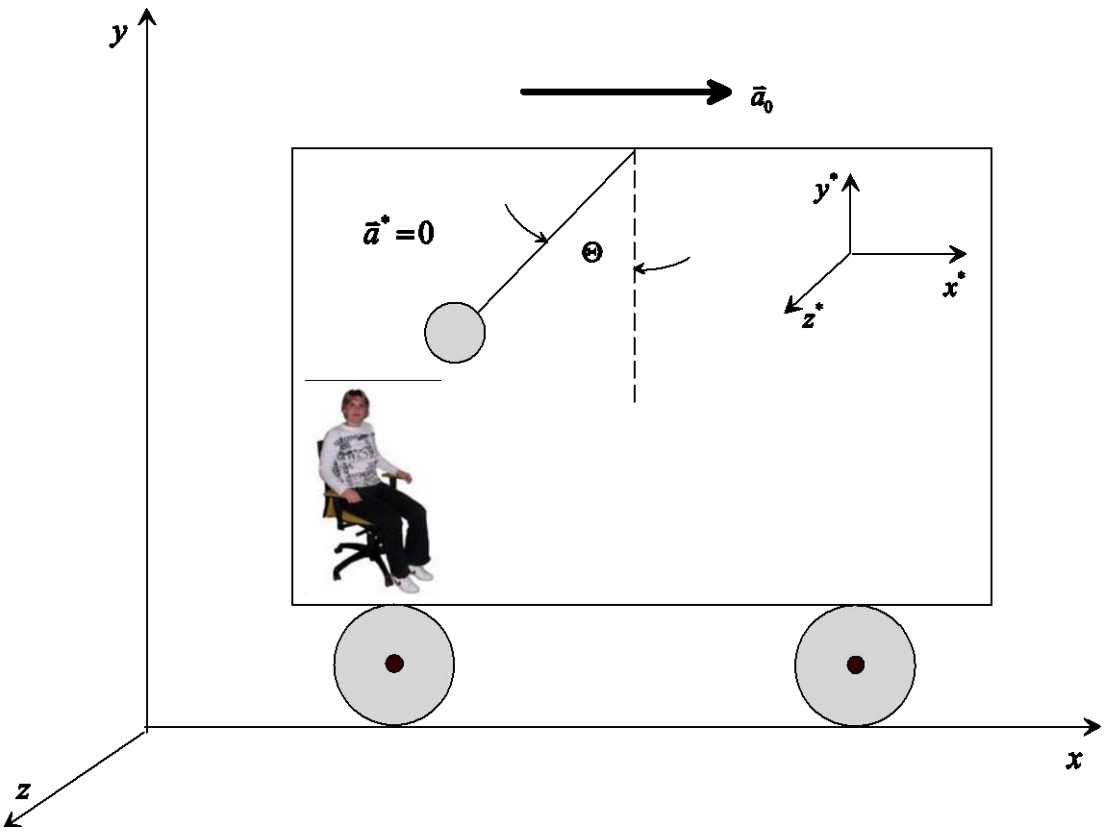
kjer smo gravitacijski pospešek *g* definirali kot:

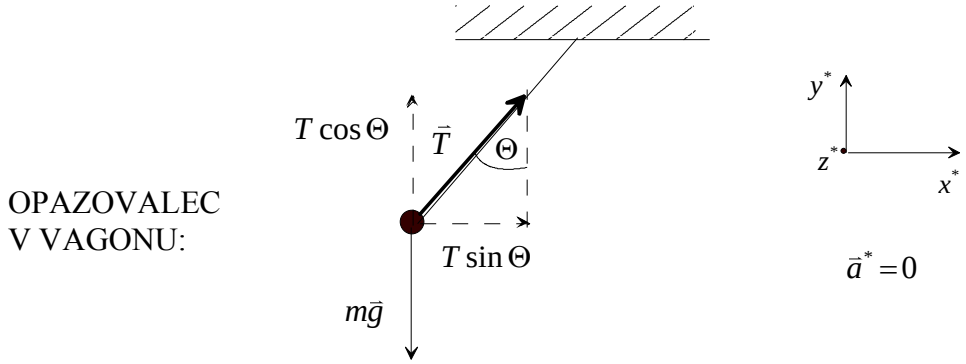
$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2} \ , \tag{8}$$

$$g_0 = G\frac{M_Z}{R^2} \simeq 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \tag{9}$$

pa je gravitacijski pospešek na nadmorski višini $h = 0$. Enakost gravitacijske mase, ki nastopa v gravitacijskem zakonu (enačba (5)) in vztrajnostne mase, ki nastopa v II. Newtonovem zakonu (enačba (1)) ni samoumevna. O tem so se znanstveniki prepričali šele z natančnimi poskusi.

Drugi Newtonov zakon velja le v tako imenovanih **inercialnih** sistemih, to je v nepospešenih sistemih. Za ilustracijo si poglejmo primer opazovalca v zaprtem vagonu, ki se giblje s pospeškom $\vec{a}_0$ v smeri x osi laboratorijskega (t.j. inercialnega) opazovalnega sistema in opazuje majhno kroglico, ki je z zelo lahko nitko pritrjena na strop vagona. V vagonu, to je v pospešenem (neinercialnem) sistemu, deluje v smeri x^*-osi na visečo kroglico sila $T\sin\Theta$, kljub temu pa je pospešek kroglice za opazovalca v vagonu $\vec{a}^* = 0$, **kar je v nasprotju z veljavnostjo II. Newtonovega zakona**. V pospešenem vagonu torej II. Newtonov zakon ne velja.



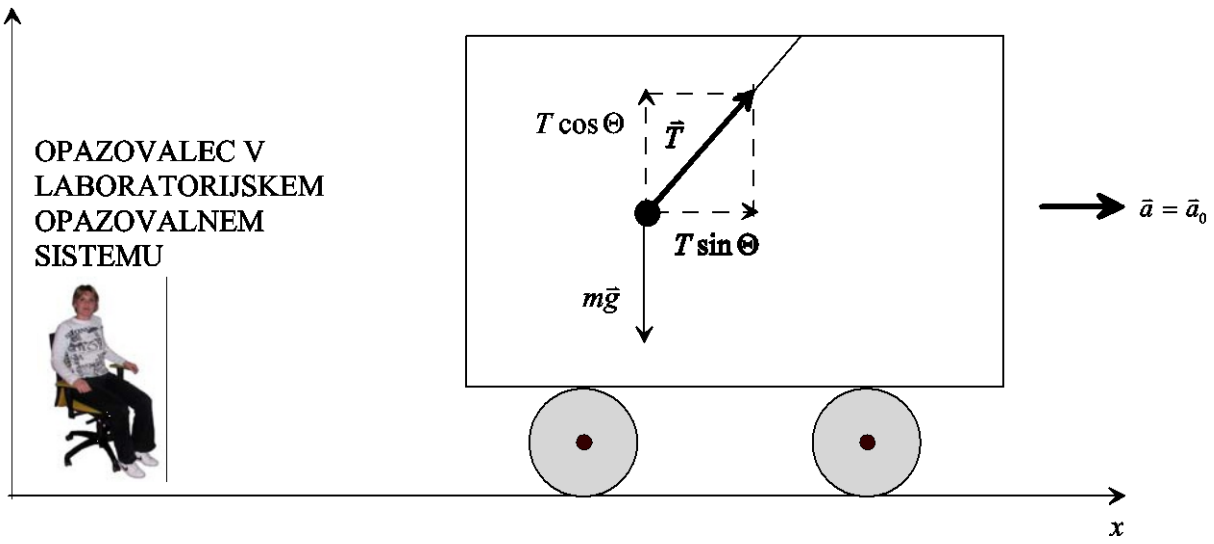


Drugi Newtonov zakon seveda velja za opazovalca v laboratorijskem inercialnem sistemu:

v smeri x osi: $T\sin\Theta = m a_0$, (10)

v smeri y osi: $T\cos\Theta = m g$, (11)

kjer je m masa na nitki viseče kroglice, g pa gravitacijski pospešek.



Če hočemo, da II. Newtonov zakon velja formalno tudi v vagonu, to je v pospešenem (neinercialnem) sistemu, moramo vpeljati tako imenovano sistemsko silo, ki je za zgornji primer enaka

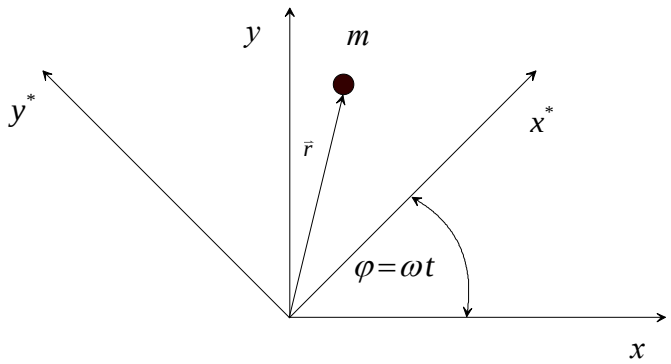
$$\vec{F}_S = -m\vec{a}_0 . \tag{12}$$

Z upoštevanjem sistemske sile (enačba (12)) tudi v vagonu formalno velja II. Newtonov zakon:

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_S = m\vec{a}^* = \vec{0} , \tag{13}$$

ki nam da za pospešek kroglice vrednost $\vec{a}^* = 0$, kar je v skladu z opažanji opazovalca v vagonu (gospodična, ki sedi na stolu v vagonu). Sistemska sila ne izhaja iz interakcij z drugimi telesi, pač pa iz pospeševanja opazovalnega sistema.

Vsem znana sistemska sila je **centrifugalna sila**, ki jo občutimo v enakomerno vrtečem se opazovalnem sistemu $\left(x^*, y^*, z^*\right)$



m = masa točkastega telesa
ω = kotna hitrost vrtenja opazovalnega sistema $\left(x^*, y^*, z^*\right)$

Za točkasto maso m, ki miruje v vrtečem opazovalnem sistemu, napišemo II. Newtonov zakon v **laboratorijskem** inercialnem opazovalnem sistemu $\left(x,\ y,\ z\right)$ v obliki:

$$\vec{F}_{cp} = -m\omega^2\vec{r}\,, \tag{14}$$

kjer je $\vec{F}_{cp}$ centripetalna sila, ki vleče maso *m* proti središču kroženja, $-\omega^2\vec{r}$ pa je radialni pospešek, ki je prav tako usmerjen proti središču kroženja.

V vrtečem, neinercialnem sistemu, na točkasto maso *m* prav tako deluje centripetalna sila $\vec{F}_{cp}$, vendar pa je pospešek mase enak nič, torej II. Newtonov zakon zopet ne velja, če ne vpeljemo sistemske sile $\vec{F}_{cf}$ tako, da je:

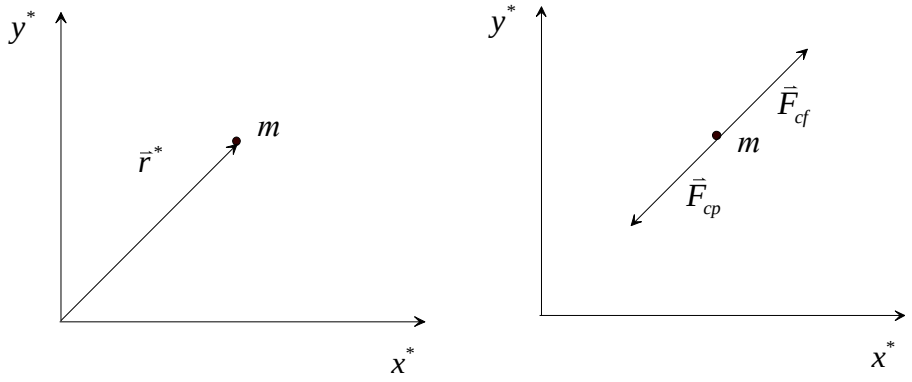
$$\vec{F}_{cp} + \vec{F}_{cf} = m\vec{a}^* = 0\,. \tag{15}$$

Iz enačb (14) in (15) sledi:

$$\vec{F}_{cf} = -\vec{F}_{cp} = m\omega^2\vec{r}\,. \tag{16}$$

Sistemska sila $\vec{F}_{cf}$, ki jo imenujemo centrifugalna sila, je usmerjena od središča kroženja v smeri krajevnega vektorja $\vec{r}^*$.

V vrtečem opazovalnem sistemu masa *m* miruje zato je $\vec{r}^*$ = konst. in $\vec{a}^* = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}^*}{\mathrm{d}t^2} = 0$

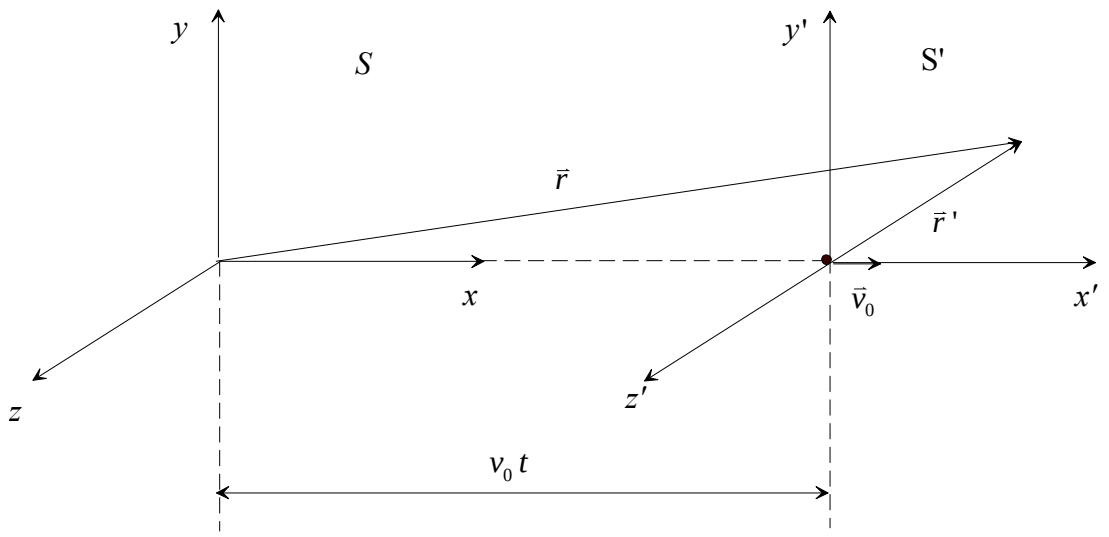


Poznana sistemska sila v vrtečem se neinecialnem sistemu je še **Coriolisova sila**, ki jo moramo upoštevati, če se masa *m* v vrtečem koordinatnem sistemu giblje tako, da se spreminja njena razdalja od izhodišča koordinatnega sistem $\left(x^*, y^*, z^*\right)$.

Na osnovi povedanega lahko definiramo **neinercialne** opazovalne sisteme kot opazovalne sisteme v katerih se opazovano telo, ki ni v interakciji z nobenim drugim telesom giblje pospešeno. **Inercialni** opazovalni sistem pa je definiran s prvim Newtonovim zakonom. Opazovalni sistem v katerem velja I. Newtonov zakon je torej **inercialni** opazovalni sistem. Vidimo torej, da je I. Newtonov zakon samostojni zakon, ki definira inercialni opazovalni sistem v katerem velja II. Newtonov zakon. Še enkrat je potrebno tudi opozoriti, da je tudi II. Newtonov zakon več kot definicija sile in mase. Glavna vsebina tega zakona je, da se vplivi zunanjih teles (ki jih opišemo s silami) odražajo v spremembi hitrosti telesa, ki jo opišemo s pospeškom $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$.

Invariantnost pospeška telesa merjena v različnih inercialnih opazovalnih sistemih nas navede tudi na sklep o invariantnosti sil glede na spremembo **inercialnega** opazovalnega sistema.

V zvezi s tem omenimo še **Galilejevo načelo**, ki pravi, da imajo zakoni klasične fizike enako obliko v vseh inercialnih sistemih. In pa ne pozabimo na **Galilejeve transformacije,** ki povezujejo koordinate krajevnega vektorja $\vec{r}=(x,y,z)$ in komponente hitrosti $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$ točkastega telesa izmerjene v dveh različnih inercialnih opazovalnih sistemih S in S'. Predpostavimo, da se koordinatne osi in izhodišči obeh sistemov ob času $t = 0$ pokrivajo, kjer so koordinatne osi paroma vzporedne. Izhodišče koordinatnega sistem S' se giblje s konstantno hitrostjo v_0 glede na izhodišče koordinatnega sistema S v smeri x-osi.



Galilejeve transformacije za koordinate (glejte sliko):

$$\vec{r}=\vec{r}\,'+\vec{v}_0\,t\,, \tag{17}$$

$$x=x'+v_0\,t\,, \tag{18}$$

$$y=y'\,, \tag{19}$$

$$z=z'\,, \tag{20}$$

$$t=t'\,.$$

Če enačbe (17) – (20) odvajamo po času dobimo:

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}\,'+\vec{v}_0\,, \tag{21}$$

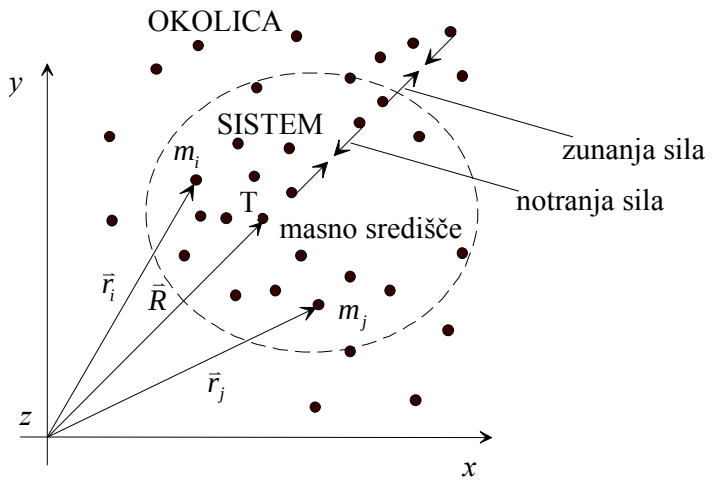
$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_x^{'}+v_0\,, \tag{22}$$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_y^{'}\,, \tag{23}$$

$$v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=v_z^{'}\,. \tag{24}$$

Newtonov zakon za sistem točkastih teles

V obliki $\vec{F}=\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$ (enačba (1)) **,** kjer je $\vec{F}=\sum_i \vec{F}_i$ rezultanta vseh zunanjih sil, velja II. Newtonov zakon za točkasto telo. V nadaljevanju bomo II. Newtonov zakon posplošili za sistem točkastih teles. Pri tem se moramo najprej odločiti, katera telesa štejemo k **sistemu** in katera k **okolici**. V skladu z izbiro (definicijo) sistema definiramo tudi **zunanje** in **notranje** sile.



Zapišimo II. Newtonov zakon za i-to točkasto maso v sistemu:

$$\sum_j \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i = m_i \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots N, \tag{25}$$

kjer so $\vec{F}_{ji}$ notranje sile med delci (n.pr. $\vec{F}_{23}$ je sila 2. delca na 3. delec v sistemu), $\vec{F}_i$ je rezultanta vseh zunanji sil na i-to točkasto maso v sistemu, N pa je število točkastih mas (delcev) v sistemu. Seštejemo vse enačbe (25):

$$\sum_j \vec{F}_{j1} + \vec{F}_1 = m_1 \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} ,$$

$$\sum_j \vec{F}_{j2} + \vec{F}_2 = m_2 \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_2}{\mathrm{d}t^2} ,$$

.

.

.

$$\sum_j \vec{F}_{jN} + \vec{F}_N = m_N \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_N}{\mathrm{d}t^2} ,$$

$$\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ji} + \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \left(m_i \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2} \right) \quad . \tag{26}$$

Prvi člen v enačbi (26) je enak vsoti vseh dvodelčnih sil $\left(\vec{F}_{ij}+\vec{F}_{ji}\right)$, ki pa je enaka nič, saj v skladu s III. Newtonovem zakonom o akciji in reakciji velja:

$$\vec{F}_{ij}+\vec{F}_{ji}=\vec{0}\,. \tag{27}$$

Enačbo (26) lahko tako zapišemo v obliki:

$$\sum_i \vec{F}_i=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\sum_i m_i\vec{r}_i\right). \tag{28}$$

Če definiramo krajevni vektor $\vec{R}$ do centra mase sistema (glejte še sliko) v obliki:

$$\vec{R}=\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}=\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{m}, \tag{29}$$

kjer je $m=\sum_i m_i$ celotna masa sistema, lahko enačbo (28) zapišemo kot:

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i=m\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2}}\ . \tag{30}$$

Enačba (30), to je II. Newtonov zakon za sistem točkastih teles, ima enako obliko kot II. Newtonov zakon za eno samo točkasto telo. Razlika je, da v II. Newtonovem zakonu za eno točkasto maso (enačba (1)) nastopa pospešek

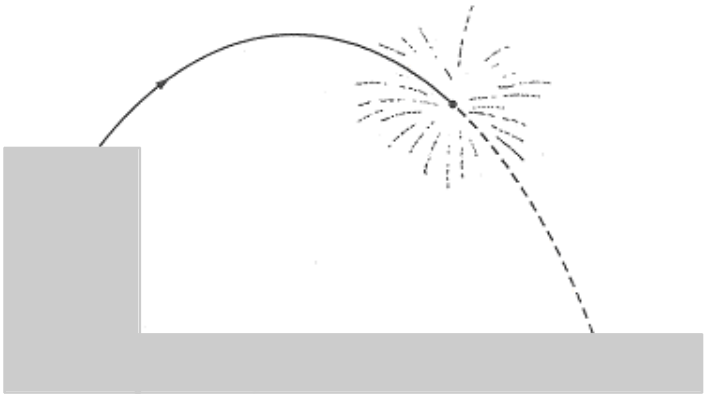
$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2},$$

kjer je $\vec{r}\left(t\right)$ krajevni vektor do točkaste mase *m*, v II Newtonovem zakonu za sistem točkastih mas (enačba (30)) pa nastopa pospešek masnega središča, ki mu pravimo tudi težišče (če je gravitacijski pospešek po celem sistemu enak):

$$\vec{a}_R=\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2} \tag{31}$$

V izpeljavi enačbe gibanja za sistem točkastih teles (enačba (30)) nismo nikjer predpostavili, da so razdalje med delci, ki sestavljajo sistem konstantne. Od koder sledi, da se na primer, po eksploziji rakete, masni center delcev eksplodirane rakete giblje v vakuumu po istem tiru, kot če raketa sploh ne bi eksplodirala. **(Razlaga:** sile, ki delujejo na delce med eksplozijo so notranje sile in zato v enačbi (30) ne nastopajo.)

Gibanje masnega centra rakete pred (polna črta) in po eksploziji (črtkana črta)

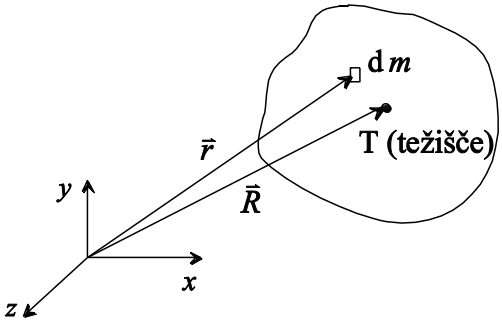


Enačbo (30) imenujemo tudi izrek o gibanju težišča za sistem točkastih mas.

Newtonov zakon za togo telo

Enačbo za gibanje težišča sistema točkastih mas (oziroma centra točkastih mas) razširimo na **togo telo** v katerem so razdalje med posameznimi deli telesa konstantne. V okviru kontinuumskega opisa lahko zato uvedemo gostoto togega telesa kot:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}, \tag{32}$$



kjer je $\mathrm{d}m$ infinitezimalno majhna masa dela togega telesa z volumnom $\mathrm{d}V$ do katerega kaže krajevni vektor $\vec{r}$. Za togo telo se izraz (29) za računanje lege težišča transformira v:

$$\vec{R} = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{m} = \frac{\int \vec{r}\,\rho\,\mathrm{d}V}{\int \rho\,\mathrm{d}V}, \tag{33}$$

kjer smo v enačbi (29) naredili naslednje transformacije:

$$\sum_i \rightarrow \int$$

$$m_i \rightarrow \mathrm{d}m$$

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}\ .$$

Če je gostota togega telesa konstantna preide enačba (33) v izraz:

$$\vec{R}=\frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}V}{\int \mathrm{d}V}=\frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}V}{V}\,, \tag{34}$$

kjer je V volumen togega telesa.

Ob upoštevanju enačbe (31) prepišemo enačbo (30) v obliko:

$$\boxed{\vec{F}=m\vec{a}_R=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_R}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}t^2}}\,, \tag{35}$$

kjer je $\vec{v}_R$ hitrost težišča togega telesa. Vidimo, da ima zakon gibanja za togo telo enako obliko kot ustrezen zakon gibanja za točkasto telo (enačba (1)). Enačbo (35) lahko predelamo tudi v obliko:

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{G}}{\mathrm{d}t}\,, \tag{36}$$

kjer je

$$\vec{G}=m\vec{v}_R\,, \tag{37}$$

gibalna količina togega telesa.

Iz enačbe (36) sledi:

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,\mathrm{d}t=\vec{G}\Big|_{\vec{G}_1}^{\vec{G}_2}=\vec{G}_2-\vec{G}_1=\Delta\vec{G}\,, \tag{38}$$

kjer je $\int \vec{F}\,\mathrm{d}t$ sunek rezultante zunanjih sil, $\vec{G}_1$ začetna gibalna količina togega telesa, $\vec{G}_2$ pa končna gibalna količina, to je gibalna količina po delovanju sunka sile $\int \vec{F}\,\mathrm{d}t$. Enačbo (38) imenujemo izrek o sunku sile. Sunek sile lahko torej določimo z meritvijo spremembe gibalne količine togega telesa (ali sistema togih teles).

Če je sunek rezultante zunanjih sil enak nič, se gibalna količina togega telesa ali sistema togih teles ohranja:

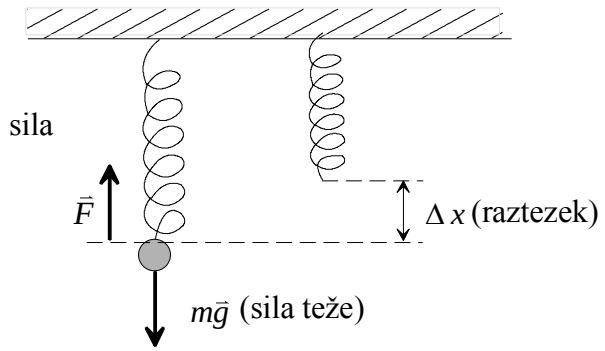
$$\Delta\vec{G}=0\,,$$

oziroma

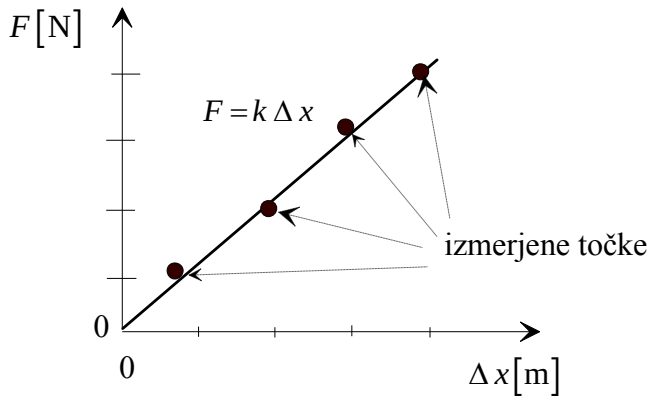
$$\vec{G}_1=\vec{G}_2\,, \tag{39}$$

kjer je $\vec{G}_1 = m\vec{v}_1$ začetna gibalna količina, $\vec{G}_2 = m\vec{v}_2$ pa končna gibalna količina. Enačbo (39) imenujemo tudi izrek o ohranitvi gibalne količine.

Sunek sile, oziroma sila ne spreminja le hitrosti telesa, ampak lahko telo tudi **deformira**. Tako lahko na primer deformacijo vijačne vzmeti izkoristimo za merjenje (določitev) sile teže, če poznamo konstanto vzmeti *k*.



V ravnovesju velja: $\vec{F} + m\vec{g} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{F} = -m\vec{g}$



Zgled: prosti pad togega telesa v zraku

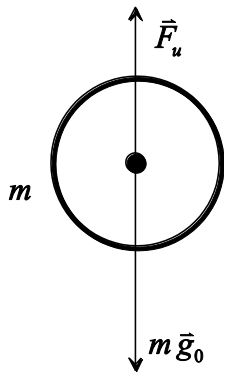
Pri prostem padu togega telesa v zraku poleg sile teže $m\vec{g}_0$ na togo telo v nasprotni smeri deluje še sila upora $\vec{F}_u$. Zapišimo Newtonov zakon za gibanje (padanje) togega telesa:

$$m g_0 - F_u = m a\,, \tag{40a}$$

od koder sledi pospešek togega telesa:

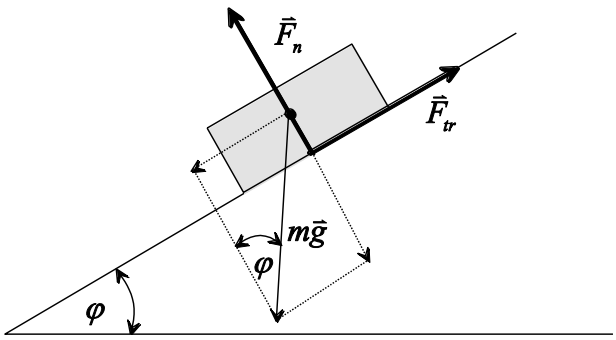
$$a = g_0 - \frac{F_u}{m}\,. \tag{40b}$$

Vidimo, da je pri enaki sili upora, ki je odvisna od velikosti, oblike in hitrosti telesa, pospešek *a* večji za večje mase telesa *m*.



Zgled: drsenja klade po klancu navzdol

$\vec{F}_n$ = normalna komponenta sile podlage
m = masa klade
φ = nagib klanca
$\vec{F}_{tr}$ = sila trenja
$m\vec{g}$ = sila teže



Zapišimo Newtonov zakon za gibanje težišča togega telesa (klade) vzdolž klanca:

$$mg\sin\varphi - F_{tr} = ma\,, \tag{41a}$$

kjer je a velikost pospeška težišča klade. Sila trenja F_{tr} je sorazmerna komponenti sile teže v smeri pravokotno na površino klanca $(m\,g\cos\varphi)$:

$$F_{tr} = k_t\, m\, g\cos\varphi\,, \tag{41b}$$

kjer je k_t koeficient trenja. Če združimo enačbi (41a) in (41b) dobimo:

$$mg\sin\varphi - k_t\, m\, g\cos\varphi = ma\,,$$

oziroma

$$a = g\left(\sin\varphi - k_t\cos\varphi\right). \tag{42}$$

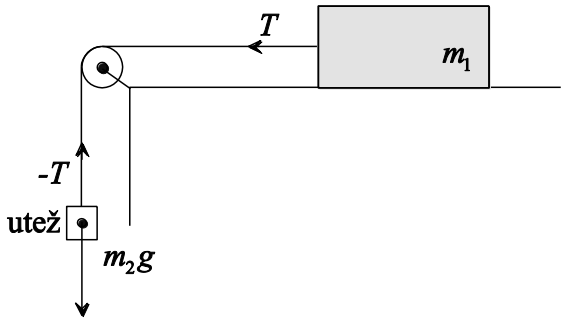
Klada začne drseti po klancu navzdol le, če je nagib zadosti velik. Mejni kot dobimo iz pogoja:

$$a = 0 = g\left(\sin\varphi_m - k_\ell\cos\varphi_m\right), \tag{43}$$

kjer je k_ℓ koeficient lepenja. Iz enačbe (43) sledi

$$tg\,\varphi_m = k_\ell\ . \tag{44}$$

Zgled: klada na zračni klopi



Klada z maso m_1 je z zelo lahko vrvico preko zelo lahkega vretena povezana z utežjo, ki ima maso m_2. Ker je klada na zračni blazini zanemarimo silo trenja. Zapišimo Newtonov zakon za gibanje togega telesa (enačba (35)) posebej za klado in posebej za utež:

$$T = m_1 a \,, \tag{45}$$

$$m_2 g - T = m_2 a \,. \tag{46}$$

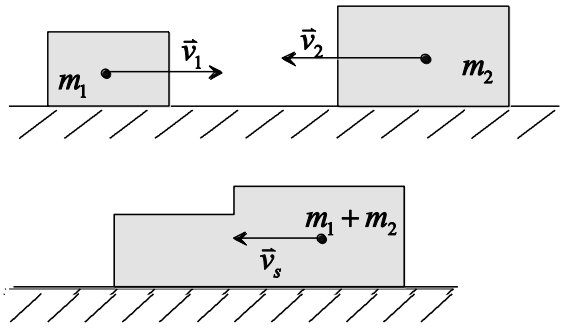
Iz enačb (45) in (46) sledi za velikost pospeška uteži:

$$a = \frac{m_2 g}{\left(m_1 + m_2\right)} \,. \tag{47}$$

Zgled: neprožen trk dveh vozičkov na zračni blazini

pred trkom:

po trku:



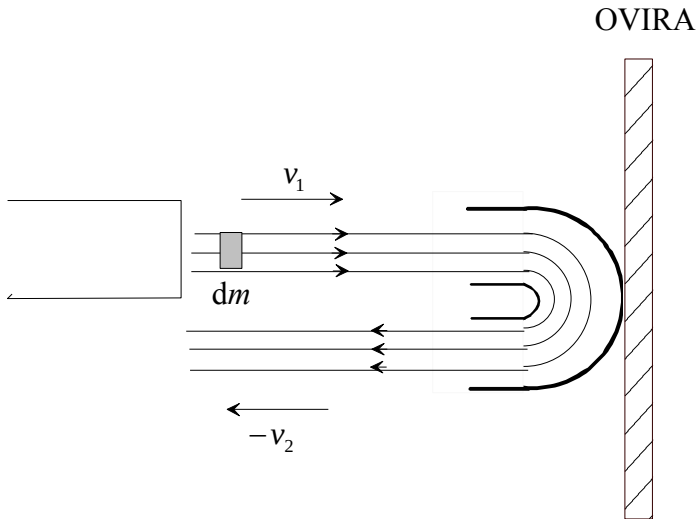
Če zanemarimo sunek zunanjih sil, se pri neprožnem trku dveh vozičkov (vozička se sprimeta) ohranja skupna gibalna količina:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \left(m_1 + m_2\right) \vec{v}_s \,, \tag{48}$$

kjer je $\vec{v}_1$ hitrost prvega vozička pred trkom, $\vec{v}_2$ hitrost drugega vozička pred trkom, $\vec{v}_s$ pa hitrost sprijetih vozičkov po trku. Iz enačbe (48) lahko izračunamo $\vec{v}_s$:

$$\vec{v}_s = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{\left(m_1 + m_2\right)} . \tag{49}$$

Zgled: sila curka vode na oviro



Sprememba gibalne količine dela curka vode z maso dm ob trku z oviro je enaka sunku sile ovire na maso dm:

$$F_0\,\mathrm{d}t = -\mathrm{d}m\,v_2 - \mathrm{d}m\,v_1 , \tag{48}$$

kjer je $F_0\,\mathrm{d}t$ sunek sile ovire na maso dm, $-\mathrm{d}m\,v_2$ končna gibalna količina mase dm po trku z oviro, $\mathrm{d}m\,v_1$ pa začetna gibalna količina pred trkom z oviro. Iz enačbe (48) sledi

$$F_0 = -\Phi_m\left(v_1 + v_2\right), \tag{49}$$

kjer je

$$\Phi_m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} , \tag{50}$$

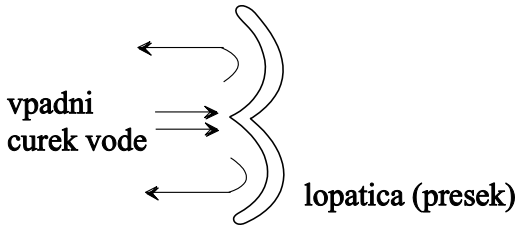
masni tok curka vode, ki pada na oviro. Sila curka vode na oviro F je v skladu s tretjim Newtonovim zakonom o akciji in reakciji nasprotno enaka sili ovire na curek vode F_0:

$$F = -F_0 = \Phi_m\left(v_1 + v_2\right). \tag{51}$$

Če se voda od ovire ne bi odbila in bi le spolzela navzdol (torej $v_2 \approx 0$), bi bila sila curka na oviro manjša:

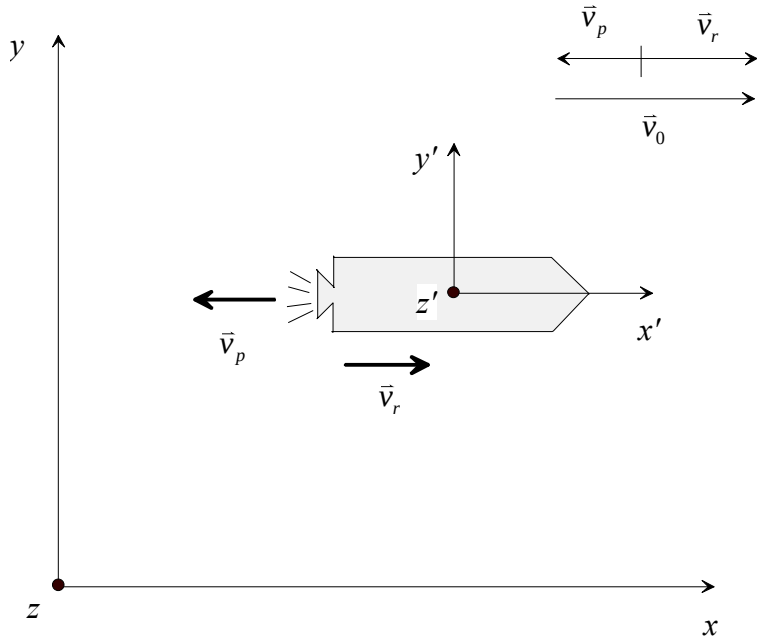
$$F \approx \Phi_m\, v_1 , \tag{52}$$

kot v prej opisanem primeru. Zato imajo lopatice turbin v hidroelektrarnah značilno obliko, da se curek vode od lopatice odbije.



Zgled: vozilo na reaktivni pogon (raketa)

Predpostavimo, da je raketa daleč stran od Zemlje in drugih nebesnih teles, tako da na gibanje rakete vpliva le sila curkov plinov, ki jih raketa izpušča. Definirajmo hitrost rakete $\left(\vec{v}_r\right)$ in hitrost iz rakete izhajajočih plinov $\left(\vec{v}_p\right)$ v inercialnem (nepospešenem) sistemu (x, y, z) daleč stran od Zemlje:



V inercialnem (nepospešenem) sistemu zapišemo izrek o sunku sile za majhno maso dm iz rakete izhajajočega plina:

$$F_0\,\mathrm{d}t = -\mathrm{d}m\,v_p - \mathrm{d}m\,v_r\,, \tag{53}$$

kjer je $\mathrm{d}m\,v_r$ gibalna količina mase goriva dm pred izhodom iz rakete (torej začetna gibalna količina), $-\mathrm{d}m\,v_p$ pa gibalna količina izhajajočega uplinjenega goriva (torej končna gibalna količina), $F_0\,\mathrm{d}t$ pa ustrezen sunek sile na maso dm. Iz enačbe (53) sledi:

$$F_0 = -\Phi_m\left(v_p + v_r\right), \tag{54}$$

kjer je

$$\Phi_m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}, \tag{55}$$

masni tok plinov, ki jih raketa izpušča. Po tretjem Newtonovem zakonu o akciji in reakciji je sila iz rakete izhajajočih plinov na raketo (F) nasprotno enaka sili F_0, torej:

$$F = -F_0 = \Phi_m v_0 \tag{56}$$

kjer je

$$v_0 = v_p + v_r, \tag{57}$$

hitrost izhajajočih plinov, ki jo izmeri opazovalec v raketi, to je v pospešenem opazovalnem sistemu (x', y', z') (glejte še sliko).

Zapišimo sedaj II. Newtonov zakon za gibanje težišča rakete v inercialnem sistemu (x, y, z):

$$F = \Phi_m v_0 = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \tag{58}$$

kjer je $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ pospešek rakete,

$$m = m_0 - \Phi_m t\ , \tag{59}$$

pa od časa odvisna masa rakete. Začetna masa rakete m_0 se namreč s časom zmanjšuje zaradi izhajajočih plinov. Če je celotna masa goriva enaka m_p, potem v času

$$t_0 = \frac{m_p}{\Phi_m}, \tag{60}$$

raketa porabi vso gorivo. Če združimo enačbi (58) in (59) dobimo enačbo gibanja v obliki:

$$\Phi_m v_0 = \left(m_0 - \Phi_m t\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{61}$$

Diferencialno enačbo (61) rešimo z integracijo:

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{v_0} = \int_0^t \frac{\Phi_\mathrm{m}}{\left(m_0 - \Phi_m t\right)}\mathrm{dt}\ , \tag{62}$$

kjer vzamemo, da je hitrost ob času nič enaka nič. Izvršeni integraciji v enačbi (62) nam podajata rešitev v obliki:

$$v = v_0 \ln\left[\frac{m_0}{m_0 - \Phi_m t}\right]. \tag{63}$$

Raketa doseže maksimalno hitrost ob času t_0, ko je porabljeno vso gorivo:

$$v_{\max} = v_0 \ln\left[\frac{m_0}{m_0 - \Phi_m t_0}\right] = v_0 \ln\left[\frac{1}{1 - \frac{\Phi_m t_0}{m_0}}\right].$$

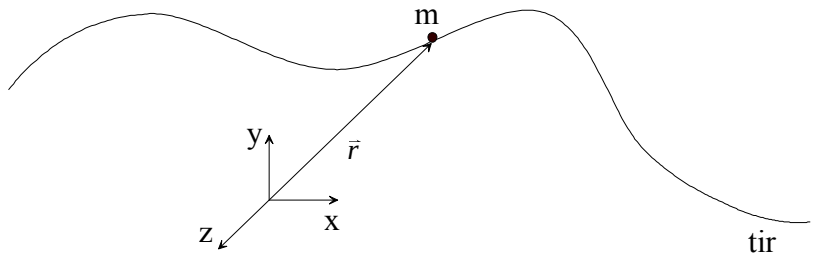
(64)

Če hočemo pri dani masi goriva m_p (enačba (60)) povečati maksimalno končno hitrost rakete, moramo narediti večstopenjsko raketo, kjer se masa rakete manjša tudi tako, da raketa sproti odmetava izpraznjene dele rezervoarja goriva in na ta način doseže večje pospeške.

3. Izrek o vrtilni količini

Točkasto telo

Krivo gibanje točkastega telesa z maso m opišemo s časovno odvisnim krajevnim vektorjem $\vec{r}(t)$, definiranim v kartezičnem koordinatnem sistemu $(x,\ y,\ z)$.



hitrost $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

pospešek $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

Zapišemo II. Newton-ov zakon za gibanje točkastega telesa:

$$m\vec{a} = \vec{F}\ , \tag{1}$$

kjer je $\vec{F}$ rezultanta vseh zunanjih sil, ki delujejo na točkasto telo. Enačbo (1) množimo vektorsko na obeh straneh enačaja s krajevnim vektorjem $\vec{r}$:

$$\vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}\ , \tag{2}$$

kjer je $\vec{M}$ rezultantni navor vseh zunanjih sil.

Člen ($\vec{r} \times m\vec{a}$) lahko zapišemo malce drugače:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times m\vec{a}\ , \tag{3}$$

kjer upoštevamo, da je vektorski produkt dveh vzporednih vektorjev $\vec{v} \times m\vec{v}$ enak nič. Torej ob upoštevanju enačbe (3) se enačba (2) transformira v:

$$\frac{\mathrm{d}\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right)}{\mathrm{d}t} = \vec{M}\ . \tag{4}$$

Definiramo vrtilno količino točkastega telesa:

$$\vec{\Gamma} = \vec{r} \times m\vec{v}\ . \tag{5}$$

Iz enačb (4) in (5) tako sledi izrek o vrtilni količini za točkasto telo:

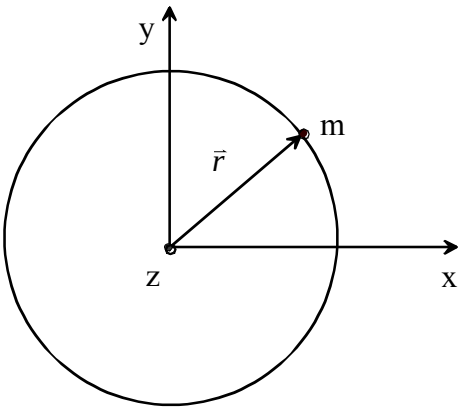
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{\Gamma}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}} \tag{6}$$

Enačbo (6) prepišemo v obliko:

$$\mathrm{d}\vec{\Gamma} = \vec{M}\mathrm{d}t \ ,$$

oziroma

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\,\mathrm{d}t = \vec{\Gamma}_2 - \vec{\Gamma}_1 = \Delta\vec{\Gamma} \ , \tag{7}$$



kjer je $\int \vec{M}\,\mathrm{d}t$ sunek navora, $\vec{\Gamma}_1$ začetna vrtilna količina, $\vec{\Gamma}_2$ končna vrtilna količina, $\Delta\vec{\Gamma}$ pa sprememba vrtilne količine.

Za enakomerno **krožečo točkasto maso**, kjer postavimo izhodišče koordinatnega sistema v središče krožnice (glejte sliko), kaže vektor vrtilne količine $\vec{\Gamma}$ v smeri (ali pa v nasprotni smeri) osi z. Velikost vrtilne točkaste mase m, ki kroži s kotno hitrostjo ω po krožnici s polmerom *r* je:

$$\Gamma = r\,m v = r\,m\omega r = m r^2 \omega \ , \tag{8}$$

kjer smo upoštevali $v = \omega r$. Kinetična energija krožeče točkaste mase pa je:

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 \ . \tag{9}$$

Če definiramo vztrajnostni moment krožeče točkaste mase kot

$$J = m r^2 \ , \tag{10}$$

lahko zapišemo enačbe (5), (6), (7) in (9) v obliki:

$$\vec{\Gamma} = J\,\vec{\omega}\,, \tag{11}$$

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{\Gamma}}{\mathrm{d}t} = J\,\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = J\,\vec{\alpha}\,, \tag{12}$$

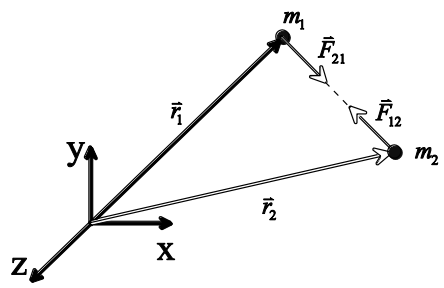
$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\,\mathrm{d}t = J\vec{\omega}_2 - J\vec{\omega}_1\,, \tag{13}$$

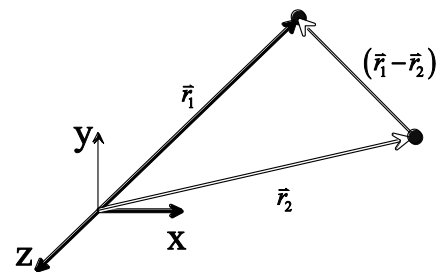
$$W_k = \frac{1}{2}\,J\,\omega^2\,, \tag{14}$$

kjer je $\vec{\alpha} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$ kotni pospešek.

Sistem točkastih mas

Za začetek pokažemo za sistem dveh točkastih delcev (glejte sliko), da je navor notranjih sil nič, če sile delujejo v smeri daljic, ki povezujejo posamezne točkaste mase.





Vsota navorov notranjih sil $\vec{F}_{12}$ in $\vec{F}_{21}$ je enaka:

$$\sum_i \vec{M}_i = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \left(-\vec{F}_{21}\right), \tag{15}$$

kjer smo upoštevali III. Newtonov zakon, t.j. $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}$. Enačbo (15) zapišemo v obliki:

$$\sum_i \vec{M}_i = \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \times \vec{F}_{21} = \vec{0}\,, \tag{16}$$

kjer smo upoštevali, da je vektorski produkt dveh vzporednih vektorjev $\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)$ in $\vec{F}_{21}$ nič. Posplošitev enačbe (16) za množico točkastih mas nas vodi do zaključka, da je navor vseh notranjih sil vedno nič, če so dvodelčne notranje sile centralne.

Na osnovi enačbe (5) zapišemo vrtilno količino množice točkastih mas kot:

$$\vec{\Gamma} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \,, \tag{17}$$

kjer teče indeks *i* po vseh točkovnih masah, ki sestavljajo sistem. V nadaljevanju enačbo (17) odvajamo po času na obeh straneh enačaja:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\vec{\Gamma}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i \vec{r}_i \times m_i\, \vec{v}_i\right) = \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} \times m_i\, \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \times m_i \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} = \\ &= \sum_i \vec{v}_i \times m_i\, \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \times m_i\, \vec{a}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i\, \vec{a}_i \end{aligned} \,, \tag{18}$$

kjer smo upoštevali, da je vektorski produkt vzporednih vektorjev $\vec{v}_i$ in $m_i \vec{v}_i$ enak nič. V nadaljevanju upoštevamo II. Newtonov zakon za posamezno točkasto maso (glejte še str. 21):

$$m_i\, \vec{a}_i = \sum_j \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i \,, \tag{19}$$

kjer je $\sum_j \vec{F}_{ji}$ vsota vseh notranjih sil, ki delujejo na maso m_i, $\vec{F}_i$ pa rezultanta vseh zunanjih sil, ki delujejo na maso m_i. Iz enačb (18) in (19) sledi:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\Gamma}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \left(\vec{r}_i \times \sum_j \vec{F}_{ji}\right) + \sum_i \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right) \,. \tag{20}$$

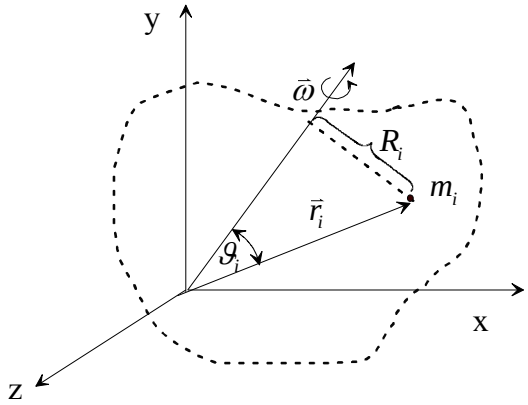
Ker smo prej pokazali, da je vsota vseh notranjih navorov $\sum_i \left(\vec{r}_i \times \sum_j \vec{F}_{ji}\right)$ enaka nič, lahko enačbo (20) zapišemo v obliki:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{\Gamma}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right) = \sum_i \vec{M}_i} \,, \tag{21}$$

kjer je $\sum_i \vec{M}_i$ vsota vseh zunanjih navorov, ki delujejo na sistem točkastih mas $m_1, m_2, m_3, \ldots$ Enačbo (21) imenujemo izrek o vrtilni količini za sistem točkastih mas.

Togo telo

- togo telo obravnavamo kot skupek točkastih mas m_i
- $\vec{\omega}$ je trenutna kotna hitrost v smeri osi okoli katere se vrtijo vsi deli telesa (vse točkaste mase) z enako kotno hitrostjo: $\vec{\omega}(\vec{r}_i)=\omega=\text{konst.}$
- koordinatno izhodišče je na osi vrtenja



$$\vec{\omega}=(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$$
$$\vec{r}_i=(x_i,y_i,z_i)$$
$$r_i^2=x_i^2+y_i^2+z_i^2$$

$$\vec{v}_i=\vec{\omega}\times\vec{r}_i$$
$$|\vec{v}_i|=\omega\underbrace{r_i\sin\vartheta_i}_{R_i}=\omega R_i$$

vrtilna količina sistema točkastih mas:

$$\vec{\Gamma}=\sum_i \vec{r}_i\times m_i\,\vec{v}_i \tag{22}$$

Izrek o vrtilni količini: $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\Gamma}}{\mathrm{d}t}=\sum_i \vec{M}_i\equiv\vec{M}$ (23)

Prehod iz sistema točkastih mas na togo telo: $\sum_i \rightarrow \int$, $m_i\rightarrow \mathrm{d}m$, $\vec{r}_i\rightarrow\vec{r}$, $\vec{v}_i\rightarrow\vec{v}$,

torej $\sum_i \vec{r}_i\, x\, m_i\vec{v}_i \rightarrow \int \vec{r}\times\vec{v}\,\mathrm{d}m$ (24)

Uporabimo zvezo:

$\vec{r}\times\vec{v}=\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=\vec{\omega}(\vec{r}\cdot\vec{r})-\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{\omega})$, od koder sledi:

$$\vec{\Gamma}=\int\vec{r}\times\vec{v}\,\mathrm{d}m=\int\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\,\mathrm{d}m=\int\vec{\omega}r^2\mathrm{d}m-\int\vec{r}\,(\vec{\omega}\cdot\vec{r})\,\mathrm{d}m \tag{25}$$

Ob upoštevanju:

$$\vec{r} = (x, y, z)$$
$$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_{y,} \omega_z)$$

$$r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = x^2 + y^2 + z^2$$
$$\vec{\omega} \cdot \vec{r} = \omega_x x + \omega_y y + \omega_z z$$

zapišemo vektorsko enačbo (25) po komponentah v obliki:

$$\Gamma_x = \omega_x \int r^2 \mathrm{d}m - \int x \left(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z \right) \mathrm{d}m \tag{26a}$$
$$\Gamma_y = \omega_y \int r^2 \mathrm{d}m - \int y \left(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z \right) \mathrm{d}m \tag{26b}$$
$$\Gamma_z = \omega_z \int r^2 \mathrm{d}m - \int z \left(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z \right) \mathrm{d}m \tag{26c}$$

Enačbe (26) preuredimo v obliko:

$$\Gamma_x = \omega_x \underbrace{\int \left(y^2 + z^2 \right) \mathrm{d}m}_{J_{xx}} - \omega_y \underbrace{\int xy \, \mathrm{d}m}_{D_{xy}} - \omega_z \underbrace{\int xz \, \mathrm{d}m}_{D_{xz}} \tag{27a}$$

$$\Gamma_y = -\omega_x \underbrace{\int xy \, \mathrm{d}m}_{D_{yx}} + \omega_y \underbrace{\int \left(x^2 + z^2 \right) \mathrm{d}m}_{J_{yy}} - \omega_z \underbrace{\int zy \, \mathrm{d}m}_{D_{yz}} \tag{27b}$$

$$\Gamma_z = -\omega_x \underbrace{\int zx \, \mathrm{d}m}_{D_{zx}} - \omega_y \underbrace{\int zy \, \mathrm{d}m}_{D_{zy}} + \omega_z \underbrace{\int \left(x^2 + y^2 \right) \mathrm{d}m}_{J_{zz}} \tag{27c}$$

Enačbe (27) ponovno zapišemo v vektorskem zapisu:

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \underline{J} \, \vec{\omega}} \ , \tag{28}$$

kjer je $\underline{J}$ vztrajnostni tenzor:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} J_{xx} & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{yx} & J_{yy} & -D_{yz} \\ -D_{zx} & -D_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \tag{29}$$

Zaključek:

Vektorja $\vec{\Gamma}$ in $\vec{\omega}$ v splošnem **nista** vzporedna.

Poimenovanje:

- J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} so **vztrajnostni momenti** okrog treh pravokotnih osi
- $D_{xy}, D_{xz}, D_{yz}, D_{yx}, D_{zx}, D_{zy}$ so **deviacijski momenti**

Torej:

$$J_{xx} = \int \left(y^2 + z^2 \right) \mathrm{d}m, \tag{30}$$
$$J_{yy} = \int \left(x^2 + z^2 \right) \mathrm{d}m, \tag{31}$$
$$J_{zz} = \int \left(x^2 + y^2 \right) \mathrm{d}m, \tag{32}$$

$$D_{xy} = \int xy \, \mathrm{d}m, \quad D_{xz} = \int xz \, \mathrm{d}m \tag{33}$$
$$D_{yx} = \int yx \, \mathrm{d}m, \quad D_{yz} = \int yz \, \mathrm{d}m \tag{34}$$
$$D_{zx} = \int zx \, \mathrm{d}m, \quad D_{zy} = \int yz \, \mathrm{d}m \tag{35}$$

Iz enačb (33) – (35) sledi:

$$D_{xy} = D_{yx} \ ,$$
$$D_{xz} = D_{zx} \ ,$$
$$D_{yz} = D_{zy} \ .$$

Vidimo, da je tenzor $\underline{J}$ simetričen.

Diagonalizacija tenzorja $\underline{J}$: $D_{ij} = 0$, koordinate osi so usmerjene vzdolž glavnih osi:

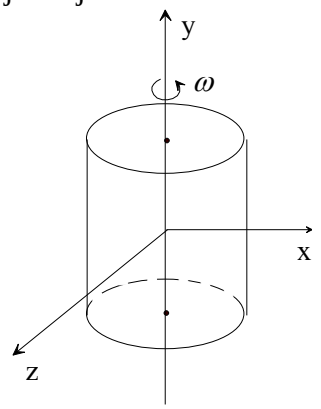
$$\underline{J} = \begin{vmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{vmatrix} \ , \quad J_x \equiv J_{xx} \, , J_y \equiv J_{yy} \, , \ J_z \equiv J_{zz} \tag{36}$$

Poseben primer: $\vec{\omega} = (0, \omega, 0)$ v sistemu glavnih osi ($\underline{J}$ je diagonaliziran),

torej velja:

$$\Gamma_y = J_y \, \omega \ ,$$

$\vec{\Gamma}$ in $\vec{\omega}$ sta vzporedna, torej velja :

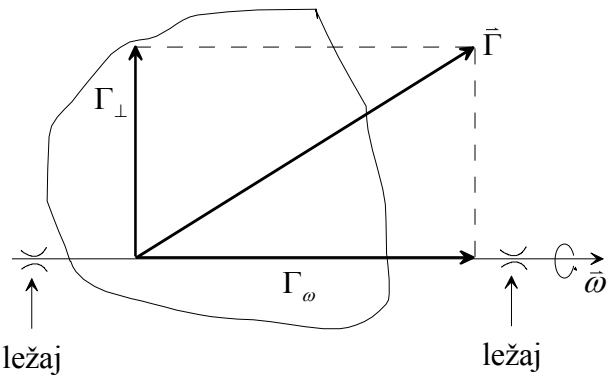


$$\Gamma_y = J_y\,\omega,$$

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma_y}{\mathrm{d}t} = M_y$$

$$J_y = \int \left(x^2 + z^2\right)\mathrm{d}m$$

Poseben primer: os vrtenja togega telesa je vpeta v ležaje (togo telo prisilimo z ležaji, da se vrti okoli nepremične osi):



Komponenta vektorja $\vec{\Gamma}$ v smeri kotne hitrosti $\vec{\omega}$:

$$\Gamma_\omega = \vec{\Gamma}\cdot\frac{\vec{\omega}}{\omega}\,, \tag{37}$$

kjer je $\frac{\vec{\omega}}{\omega}$ enotni vektor $\left(\left|\frac{\vec{\omega}}{\omega}\right| = 1\right)$. Z M_ω označimo komponento navora $\vec{M}$ v smeri vektorja kotne $\vec{\omega}$:

Velja:

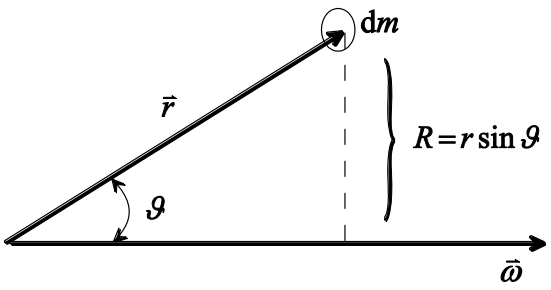
$$\Gamma_\omega = \frac{\vec{\omega}}{\omega}\cdot\int \vec{r}\times\vec{v}\,\mathrm{d}m = \frac{\vec{\omega}}{\omega}\cdot\int \vec{r}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)\mathrm{d}m = \frac{\vec{\omega}}{\omega}\cdot\left[\int r^2\vec{\omega}\,\mathrm{d}m - \int \vec{r}\left(\vec{r}\cdot\vec{\omega}\right)\mathrm{d}m\right] =$$

$$= \int\left(r^2\omega - \frac{\left(\vec{r}\cdot\vec{\omega}\right)^2}{\omega}\right)\mathrm{d}m = \int r^2\omega\left(1-\cos^2\vartheta\right)\mathrm{d}m = \int r^2\omega\sin^2\vartheta = \omega\int R^2\,\mathrm{d}m = \omega\,J_\omega\,,$$

kjer smo upoštevali:

$$\boxed{J_\omega = \int R^2\,\mathrm{d}m} \tag{38}$$

in $\vec{r}\cdot\vec{\omega} = r\,\omega\cos\vartheta,\;\; R = r\sin\vartheta$ (glejte še sliko).



Z upoštevanjem gornjega rezultata

$$\boxed{\Gamma_\omega = J_\omega\, \omega} \tag{39}$$

zapišemo:

$$M_\omega = \frac{\mathrm{d}\Gamma_\omega}{\mathrm{d}t} = J_\omega \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J_\omega\, \alpha, \tag{40a}$$

torej

$$\boxed{M_\omega = J_\omega \alpha} \tag{40b}$$

kjer je $\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ kotni pospešek.

Iz enačbe (40a) sledi:

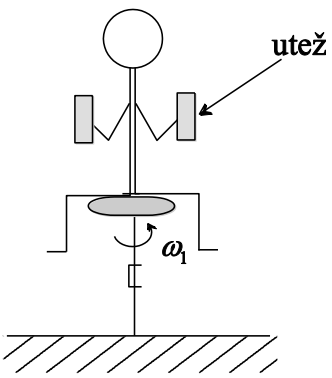
$$\int M_\omega\, \mathrm{d}t = \int_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} d\,\Gamma_\omega = \Gamma_2 - \Gamma_1 = \Delta\Gamma\,. \tag{41}$$

Če je torej sunek zunanjih navorov nič, iz enačbe (41) sledi, da se vrtilna količina vpetega togega telesa ohranja:

$$\boxed{\Gamma_2 = \Gamma_1} \tag{42}$$

Zgled: človek na vrtljivem stolu z utežmi v obeh rokah:

začetno stanje



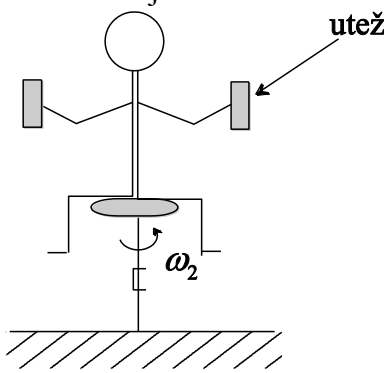
vztrajnostni moment: J_1

vrtilna količina:

$\Gamma_1 = J_1\, \omega_1$

$J_1 < J_2$

končno stanje



vztrajnostni moment: J_2

vrtilna količina: $\Gamma_2 = J_2\, \omega_2$

Ker je navor notranjih sil enak nič (glejte enačbo (16)) se vrtilna količina ohranja:

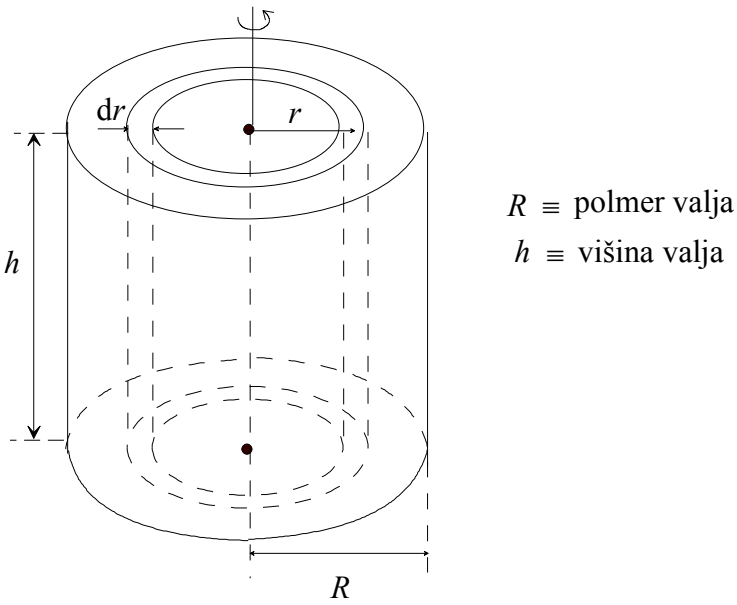
$$J_1\,\omega_1 = J_2\,\omega_2\,,$$

od koder sledi:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{J_1}{J_2} < \omega_1\,,$$

kjer smo upoštevali $J_1 < J_2$ (glejte sliko).

Zgled: vztrajnostni moment homogenega valja okrog geometrijske osi



$$J = \int r^2\,\mathrm{d}m = \int r^2 \rho\,\mathrm{d}V \quad , \tag{43a}$$

kjer je ρ gostota valja,

$$\mathrm{d}V = 2\pi\, r\,\mathrm{d}r\, h\,. \tag{43b}$$

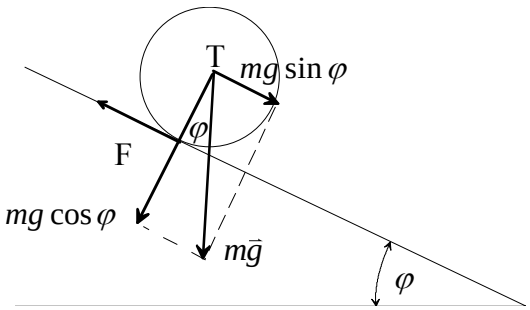
Iz enačb (43a) in (43b) sledi:

$$J = \int_0^R r^2 \rho\, 2\pi\, r\, h\,\mathrm{d}r = 2\pi\, h\rho \int_0^R r^3 \mathrm{d}r = 2\pi\, h\rho \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R = \pi R^4 \rho \frac{h}{2} = \frac{1}{2} m R^2 \quad , \tag{43}$$

kjer smo upoštevali, da je celotna masa valja $m = \pi R^2\, h\, \rho$.

Zgled: kotaljenje homogenega valja po klancu navzdol brez podrsavanja

Za os vrtenje izberemo geometrijsko os valja na kateri leži težišče valja.



T ≡ težišče valja
m ≡ masa valja
R ≡ polmer valja
F ≡ komponenta sile podlage vzdolž klanca
φ ≡ nagib klanca
$mg\sin\varphi$ ≡ komponenta sile teže $m\vec{g}$ vzdolž klanca
$mg\cos\varphi$ ≡ komponenta sile teže $m\vec{g}$ v smeri pravokotno na površino klanca

Zapišimo II. Newtonov zakon za gibanje težišča valja vzdolž klanca:

$$mg\sin\varphi - F = m a_T \ , \tag{44}$$

kjer je a_T pospešek težišča valja vzdolž klanca.

Izrek o vrtilni količini za vrtenje valja okrog geometrijske osi:

$$M = FR = J\alpha \ , \tag{45}$$

kjer je $J = \frac{1}{2} m R^2$ vztrajnostni moment valja okrog geometrijske osi, α pa kotni pospešek za vrtenje valja okrog geometrijske osi. Če se valj kotali brez podrsavanja je hitrost težišča valja

$$v_T = R\omega \ , \tag{46}$$

kjer je ω kotna hitrost vrtenje valja okrog geometrijske osi. Enačbo (46) odvajamo po času na obeh straneh enačaja in dobimo:

$$a_T = R\alpha \ . \tag{47}$$

Enačbe (44), (45) in (47) predstavljajo sistem treh enačb za tri neznanke F, a_T in α. Iz enačbe (47) izrazimo $\alpha = \frac{a_T}{R}$ in ga vstavimo v enačbo (45):

$$FR = \frac{1}{2} m R^2 \frac{a_T}{R} \ ,$$

od koder sledi:

$$F = \frac{1}{2} m a_T \,. \tag{48}$$

Gornji izraz za silo vstavimo v enačbo (44):

$$mg \sin\varphi - \frac{1}{2} m a_T = m a_T \,,$$

od koder lahko izračunamo pospešek težišča kotalečega se valja:

$$\boxed{a_T = \frac{2}{3} g \sin\varphi} \,. \tag{49}$$

Če vstavimo dobljeni izraz za pospešek a_T v enačbo (48), dobimo še izraz za komponento sile podlage vzdolž klanca:

$$\boxed{F = \frac{1}{3} m g \sin\varphi} \,. \tag{50}$$

Če hočemo, da se valj kotali brez podrsavanja mora biti sila F manjša od sile lepenja:

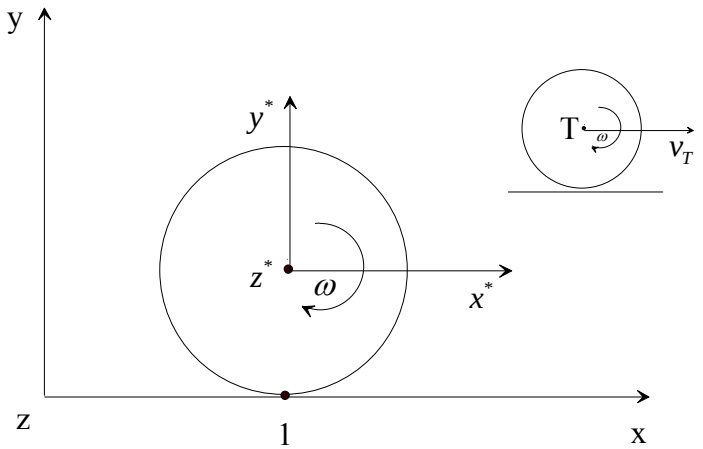
$$F = \frac{1}{3} m g \sin\varphi \; < F_\ell = m g \cos\varphi k_\ell \;,$$

od koder sledi pogoj za kotaljenje brez podrsavanja:

$$tg\,\varphi < 3 k_\ell \;, \tag{51}$$

kjer je k_ℓ koeficient lepenja, $m g \cos\varphi$ pa komponenta sile teže v smeri pravokotno na površino klanca (glejte še sliko).

Dokaz veljavnosti enačbe (46): $v = R\omega$



Obravnavamo kotaljenje homogenega valja po ravni podlagi **brez podrsavanja** v laboratorijskem opazovalnem sistemu (x, y, z) in težiščnem opazovalnem sistemu (x^*, y^*, z^*) z izhodiščem v težišču valja na njegovi geometrijski osi. Če zanemarimo deformacije na stiku med valjem in podlago, je lahko področje dotika valja s podlago daljica. Točka 1 na gornji sliki leži na tej daljici. Hitrost točke 1 v laboratorijskem sistemu.

$$v_1 = 0 \tag{52}$$

Hitrost točke 1 merjena v težiščnem sistemu pa je

$$v_1^* = -R\omega \quad , \tag{53}$$

kjer je R polmer preseka valja. Med hitrostima v_1 in v_1^* velja Galilejeva transformacija za hitrosti:

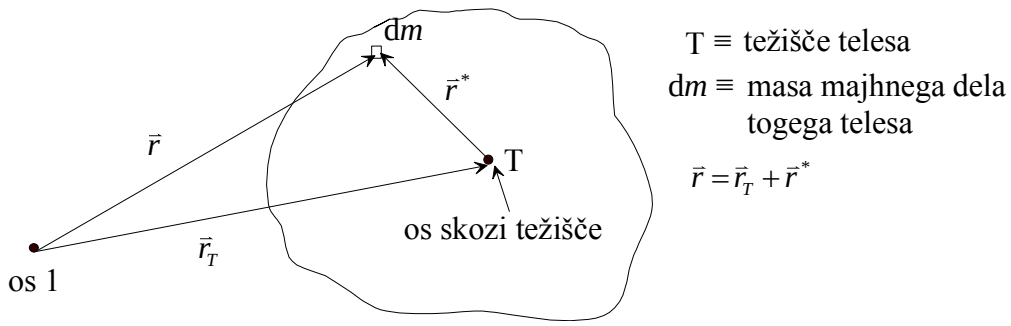
$$v_1 = v_1^* + v_T \, . \tag{54}$$

Iz enačb (52), (53) in (54) sledi:

$$v_T = -v_1^* = R\omega \, . \tag{46}$$

Steiner-jev izrek

Steinerjev izrek povezuje vztrajnostni moment togega telesa z maso m okoli dveh paralelnih osi, od katerih poteka ena skozi težišče telesa.



Vztrajnostni moment togega telesa okoli osi 1:

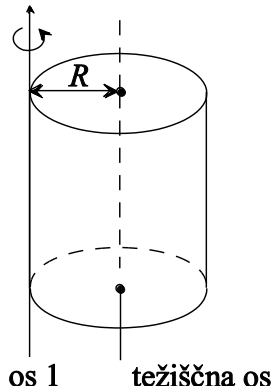
$$\begin{aligned} J_1 &= \int r^2 \mathrm{d}m = \int \vec{r} \cdot \vec{r} \, \mathrm{d}m = \int \left(\vec{r}_T + \vec{r}^*\right) \cdot \left(\vec{r}_T + \vec{r}^*\right) \mathrm{d}m = \\ &= \int r_T^2 \mathrm{d}m + 2\vec{r}_T \cdot \int \vec{r}^* \mathrm{d}m + \int r^{*2} \mathrm{d}m = m r_T^2 + J^* , \end{aligned} \tag{55}$$

kjer je $J^* = \int r^{*2} \mathrm{d}m$ vztrajnostni moment okoli težiščne osi, r_T pa razdalja med osjo 1 in težiščno osjo. V enačbi (55) smo upoštevali, da so koordinate težišča $\vec{r}_T^{\,*} = \left(x_T^*, y_T^*, z_T^*\right)$ v težiščnem sistemu enake nič:

$$\vec{r}_T^{\,*} = \frac{1}{m} \int \vec{r}^{\,*} \mathrm{d}m = 0\,, \tag{56}$$

kjer je m masa telesa.

Za ilustracijo izračunajmo vztrajnostni moment valja okoli osi, ki se dotika plašča valja.

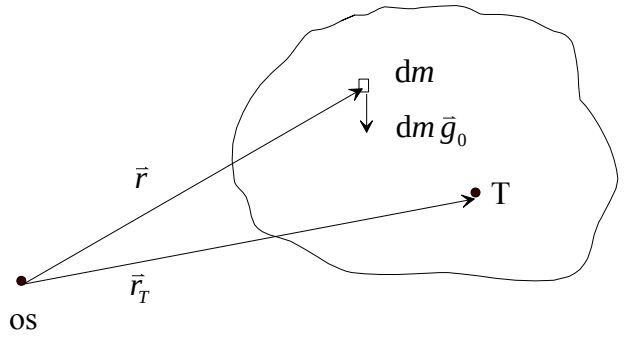


Velja: $J^* = \frac{1}{2} m R^2$ in $r_T = R$, torej:

$$J_1 = J^* + m r_T^2 = \frac{1}{2} m R^2 + m R^2 = \frac{3}{2} m R^2\,.$$

Navor sile teže telesa

Predpostavljamo, da je gravitacijski pospešek znotraj togega telesa konstanten, torej:
$g\left(\vec{r}\right) = \vec{g}_0 \cong 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ **,**



T ≡ težišče telesa
dm ≡ masa majhnega koščka togega telesa

rezultanta sile teže: $\vec{F}_g = \int \mathrm{d}m\, \vec{g}_0 = m\, \vec{g}_0$

navor sile teže:

$$\vec{M}_g = \int \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{F}_g = \int \vec{r} \times \mathrm{d}m\, \vec{g}_0 = \int \vec{r}\mathrm{d}m \times \vec{g}_0 = \left(\int \vec{r}\, \mathrm{d}m \right) \times \vec{g}_0 =$$

$$= m \frac{\int \vec{r}\, \mathrm{d}m}{m} \times \vec{g}_0 = m\, \vec{r}_T \times \vec{g}_0 = \vec{r}_T \times m\vec{g}_0 = \vec{r}_T \times \vec{F}_g \ ,$$

torej:

$$\boxed{\vec{M}_g = \vec{r}_T \times \vec{F}_g} \ . \tag{57}$$

V gornji izpeljavi smo upoštevali, da je krajevni vektor od osi do težišča $\vec{r}_T$ (glejte sliko) definiran kot (glejte še str. 33):

$$\vec{r}_T = \frac{1}{m} \int \vec{r}\, \mathrm{d}m \, .$$