6. RANŽIRNA VRSTA, RANG, KVANTILNI RANG IN KVANTILI

6.1. RANŽIRNA VRSTA, RANG IN KVANTILNI RANG

RANŽIRNA VRSTA so po vrednosti številske spremenljivke velikosti (od najmanjše do največje) urejeni podatki proučevane populacije.

RANG R enote pove mesto (zaporedno številko glede na urejenost), ki pripada enoti v okviru celotne populacije. Rang pokaže mesto enote v populaciji šele, če ga primerjamo z obsegom populacije N. Rang je lastnost enote – spremenljivka.

PRIMER:
Če smučar v smuku doseže tretji čas med tremi tekmovalci, je na zadnjem mestu, če pa doseže tretji čas med tridesetimi tekmovalci, je njegov čas v primerjavi z ostalimi tekmovalci zelo dober, saj ga uvrsti v prvo desetino tekmovalcev.

Kadar ima več enot isto vrednost spremenljivke, uporabimo namesto ranga vezani (povprečni) rang $\overline{R}$, s čimer se izognemo problemu vrstnega reda zapisa enot enake velikosti in stopničasti sliki rang grafikona.

PRIMER:

Imamo danih devet vrednosti neke številske spremenljivke 2, 2.5, 3, 3, 5.5, 6, 6, 6, 7.1. Razvrstimo jih v ranžirno vrsto in jim določimo rang in vezani rang.

y	R	$\overline{R}$
2	1	1
2,5	2	2
3	3	$\frac{3+4}{2} = 3{,}5$
3	4	$\frac{3+4}{2} = 3{,}5$
5,5	5	**5**
6	6	$\frac{6+7+8}{3} = 7$
6	7	$\frac{6+7+8}{3} = 7$
6	8	$\frac{6+7+8}{3} = 7$
7,1	9	**9**

Vpliv velikosti populacije izločimo iz izračuna ranga tako, da namesto ranga R računamo **KVANTILNI RANG P**.
Kvantilni rang pove, na katerem delu celotnega ranžirnega razmika leži določena enota oziroma koliki del celote ima **manjše, kvečjemu enake vrednosti** kakor je dana vrednost.
Pri izračunavanju rangov spremenimo diskretni (celoštevilski) rang R v **zveznega**, ki ga označimo z $\mathbf{R_P}$, tako, da celoštevilski vrednosti pripišemo enotin razmik. Najmanjša vrednost ranga $\mathbf{R_P}$ je tako 0,5, največja pa N+0,5. Vrednost kvantilnega ranga je pri najmanjši vrednosti ranga (0,5) enaka 0, pri največji vrednosti ranga (N+0,5) pa 1.

	ZAČETNA (NAJNIŽJA) VREDNOST	KONČNA (NAJVIŠJA) VREDNOST
RANG R (diskretna številska spremenljivka)	1	N
RANG $\mathbf{R_P}$ (zvezna številska spremenljivka)	0,5	N + 0,5
KVANTILNI RANG P (zvezna številska spremenljivka)	0	1

Povezava med rangom in kvantilnim rangom:

$$\boxed{R_P = N \cdot P + 0{,}5} \quad \text{in} \quad \boxed{P = \frac{R_P - 0{,}5}{N}}$$

Prednost kvantilnega ranga pred rangom je, da že sam zase (ne da bi navajali obseg populacije) prikaže mesto določene enote v populaciji.

PRIMER:

Ranžirna vrsta desetih evropskih držav po številu študentov na 10 000 prebivalcev v letu 1997 (vir: Slovenija v številkah 1999, str. 68-71, podatki nekoliko prirejeni):

DRŽAVA	ŠT. ŠTUDENTOV NA 10 000 PREB.	RANG R_P	KVANTILNI RANG P
		0,5	0
Hrvaška	192	1	0,05
Madžarska	193	2	0,15
Slovenija	231	3	0,25
Nemčija	263	4	0,35
Švedska	297	5	0,45
Italija	314		
Velika Britanija	314	7	0,65
Grčija	314		
Irska	362	9	0,85
Španija	402	10	0,95
		10,5	1

$$\boxed{P = \frac{R_P - 0{,}5}{N} = \frac{R_P - 0{,}5}{10}}$$

6.1.1. GRAFIČNO PRIKAZOVANJE RANŽIRNIH VRST

Ranžirno vrsto prikažemo s prirejenim linijskim grafikonom, ki ga imenujemo **RANG GRAFIKON**: **na abscisno os** nanesemo **vrednosti spremenljivke**, za **ordinato** pa uporabimo dve merski lestvici, eno za **vrednosti ranga**, drugo pa za **vrednosti kvantilnega ranga** (začetek = 0 skale kvantilnega ranga je pri vrednosti ranga 0,5, konec = 1 pa pri vrednosti ranga N+0,5).

Možna odčitavanja iz rang grafikona:

- Katera po rangu oziroma kolikšen del enot populacije ima vrednost spremenljivke manjšo, kvečjemu enako neki dani vrednosti. (Za dani y iščemo P_y)

- Na podlagi skale za vrednosti kvantilnih rangov lahko razberemo, katera je tista vrednost (označimo to vrednost z y_P) spremenljivke, od katere ima določeni delež populacije (označimo ta delež s P, npr. polovica enot) manjšo, kvečjemu enako vrednost spremenljivke od vrednosti y_P. (Za dani P iščemo y_P)

V obeh primerih **predpostavimo linearno spreminjanje vrednosti in zveznega ranga** med danimi zaporednimi točkami (ki jih dobimo iz ranžirne vrste).

6.1.2. IZRAČUNAVANJE KVANTILOV IN KVANTILNIH RANGOV IZ POSAMEZNIH PODATKOV

A. Podan je y, iščemo njemu ustrezen rang R_y in kvantilni rang P_y

Dano imamo vrednost spremenljivke y (med najmanjšo in največjo vrednostjo med vrednostmi v ranžirni vrsti) in iščemo njej ustrezno vrednost **ranga R_y** in **kvantilnega ranga P_y** . Rang in kvantilni rang torej odražata značilnost posamezne enote, zato sta statistični **spremenljivki**.

Zopet **predpostavimo linearno spreminjanje vrednosti ranga med danimi zaporednimi točkami**. Glede na dano vrednost y poiščemo v rang grafikonu dve zaporedni točki, med katerima leži iskana vrednost ranga in ju označimo s $T_{-1}(y_{-1},R_{-1})$ in $T_0(y_0,R_0)$. Iskano vrednost dobimo iz enačbe premice skozi ti dve točki

$$\boxed{R_y = R_{-1} + \frac{(y - y_{-1})}{y_0 - y_{-1}} \cdot (R_0 - R_{-1})}$$

Kadar imajo vse enote različne vrednosti, upoštevamo, da je razlika med zaporednima rangoma 1 in zato se nam obrazec nekoliko poenostavi v

$$\boxed{R_y = R_{-1} + \frac{y - y_{-1}}{y_0 - y_{-1}}}$$

Navadno izračunamo tudi kvantilni rang

$$\boxed{P_y = \frac{R_y - 0{,}5}{N}}$$

PRIMER:

Izračunajmo na osnovi podatkov o številu študentov na 10 000 prebivalcev v 10 evropskih državah na katero mesto bi se uvrstila Portugalska, če je v letu 1997 imela 306 študentov na 10 000 prebivalcev.

Postopek računanja:

1. V **ranžirni vrsti** poiščemo, **med kateri vrednosti bi** padla Portugalska:
   $\mathbf{y_{-1} < y \leq y_0}$
   med Švedsko: $y_{-1} = 297$ in Italijo: $y_0 = 314$
2. **Poiščemo** državama **ustrezna ranga**:
   $R_{-1} = 5$ in $R_0 = 7$
3. **Izračunamo rang** za Portugalsko iz obrazca, ki smo ga dobili **z linearno interpolacijo**:
   $\mathbf{R_y = R_{-1} + (R_0 - R_{-1}) * (y - y_{-1})/(y_0 - y_{-1})}$
   $= 5 + (7 – 5) * (306 – 297) / (314 – 297) = 6{,}06$
4. Iz ranga izračunamo še ustrezni **kvantilni rang**:
   $\mathbf{P_y = (R_y – 0{,}5) / N} = (6{,}06 – 0{,}5) / 10 = 0{,}556$.

   Iz kvantilnega ranga P_y vidimo, da ima 55,6 % izbranih držav manjše, kvečjemu enako število študentov na 10 000 prebivalcev kot Portugalska.

Ker je rang vrednosti za Portugalsko enak 6,06 , ima 6,06 držav v populaciji manjše, kvečjemu enake vrednosti kot Portugalska in $N+1- R_P = 11-6{,}06 = 4{,}94$ držav ima vrednosti večje kot Portugalska.

B. Kvantilni rang P je podan, iščemo njemu ustrezno vrednost y_P

Dano imamo vrednost kvantilnega ranga P, iščemo pa vrednost spremenljivke, ki mu ustreza, torej y_P. Vrednost spremenljivke, ki ustreza danemu kvantilnemu rangu, imenujemo **KVANTIL**. Ker kvantil odraža značilnost celotne populacije (npr. vrednost $y_{0,5}$ je tista vrednost, od katere je polovica enot v populaciji manjša, polovica pa večja – to vrednost imenujemo mediana), predstavlja statistični **parameter**.

Predpostavimo linearno spreminjanje vrednosti spremenljivke med danimi zaporednimi točkami. Glede na dano vrednost P izračunamo njemu ustrezen rang R_P in poiščemo v rang grafikonu dve zaporedni točki, med katerima leži iskana vrednost spremenljivke, torej

$$\mathbf{R_{-1} < R_P \leq R_0}$$

Označimo ju s $T_{-1}(y_{-1},R_{-1})$ in $T_0(y_0,R_0)$.
Iskano vrednost dobimo iz enačbe premice skozi ti dve točki

$$\boxed{\mathbf{y_P = y_{-1} + \frac{(R_P - R_{-1})}{R_0 - R_{-1}} \cdot (y_0 - y_{-1})}}$$

Kadar imamo podan rang R_P (**pri vezanih rangih to ne velja!**), upoštevamo, da je razlika med zaporednima rangoma vedno 1 in zato se nam obrazec nekoliko poenostavi v

$$\boxed{\mathbf{y_P = y_{-1} + (y_0 - y_{-1}) \cdot (R_P - R_{-1})}}$$

Vsak kvantil y_P nam razdeli populacijo na dva dela: v prvem je delež enot populacije enak P, v drugem pa je preostali delež enot populacije, ki je enak 1-P.
(Ker predpostavljamo zveznost spremenljivke y, je vseeno, v kateri del štejemo enote s temi vrednostmi.)

Nekateri kvantili imajo celo posebna imena. Med njimi so najpomembnejši:

- **MEDIANA – M_e** ali **SREDIŠČNICA** ali **RAZPOLOVIŠČNICA** je kvantil, ki ustreza kvantilnemu rangu P = 0,5. Mediana je torej tista vrednost spremenljivke, ki razdeli populacijo glede na število enot na dva enaka dela.

- **KVARTILI – Q** so kvantili, ki razdelijo populacijo glede na število enot na štiri enake dele:

$$Q_1 = y_{P=0,25}\ ,\ Q_2 = y_{P=0,5} \text{ in } Q_3 = y_{P=0,75}$$

- **DECILI – D** so kvantili, ki razdelijo populacijo glede na število enot na deset enakih delov:

$$D_1 = y_{P=0,1}\ ,\ D_2 = y_{P=0,2}\ ,\ \dots\ ,\ D_9 = y_{P=0,9}$$

- **CENTILI – C** so kvantili, ki razdelijo populacijo glede na število enot na sto enakih delov:

$$C_1 = y_{P=0,01}\ ,\ C_2 = y_{P=0,02}\ ,\ \dots\ ,\ C_{99} = y_{P=0,99}$$

Veljajo enakosti: $\boxed{M_e = Q_2 = D_5 = C_{50}}$

PRIMER:
Izračunajmo kvantil, ki pripada kvantilnemu rangu 0,5 (mediano) za podatke o številu študentov na 10 000 prebivalcev iz prejšnjega primera.

Postopek računanja:
1. Podatke **uredimo v ranžirno vrsto**.
2. Ker imamo v ranžirni vrsti podane range, **izračunamo kvantilnemu rangu** 0,5 (kateremu ustreza mediana) **ustrezen rang**:
   $\mathbf{R = N * P + 0,5} = 10 * 0,5 + 0,5 = 5,5$
3. **Poiščemo, med katerima rangoma v ranžirni vrsti leži izračunani rang R**:
   $\mathbf{R_{-1} < R \leq R_0}$
   $R_{-1} = 5$ in $R_0 = 7$
4. **Poiščemo v ranžirni vrsti rangoma ustrezni vrednosti**:
   $y_{-1} = 297$ (Švedska) in $y_0 = 314$ (Italija, Velika Britanija in Grčija)
5. **Izračunamo mediano** iz obrazca, ki smo ga dobili **z linearno interpolacijo**:

$$Me = y_{0,5} = \mathbf{y_{-1} + (y_0 - y_{-1}) * (R - R_{-1}) / (R_0 - R_{-1})} =$$
$$= 297 + (314 - 297) * (5,5 - 5)/(7 - 5) = 301,25$$

Polovica izbranih držav ima torej število študentov na 10 000 prebivalcev manjše od 301,25, preostala polovica držav pa ima večje število študentov na 10 000 prebivalcev.

OPOMBA:
Če gledamo na podatke kot na diskretna števila, pa izračunamo iz posameznih podatkov mediano glede na sodost ali lihost velikosti populacije: če je N sodo število, vzamemo za mediano aritmetično sredino med podatkoma na mestu N/2 in (N/2) + 1; če pa je N liho število, pa vzamemo za mediano srednji podatek glede na urejenost. V našem primeru bi bila mediana aritmetična sredina med podatkoma 297 in 314, torej 305,5.

Po istem postopku bi lahko izračunali vrednosti vseh treh kvartilov

$$\mathbf{Q_1 = y_{0,25} = y_0(R = R_0 = 3) = 231}$$

$$\mathbf{Q_2 = Me = 301{,}25}$$

$$\mathbf{Q_3 = y_{0,75} = y_0(R = 8) = 338},$$

devetih decilov (N=10):

P	y_{-1}	Y_0	$D_{10*P} = y_P$
0,1	192	193	192,5
0,2	193	231	212
0,3	231	263	247
0,4	263	297	280
0,5	297	314	301,25
0,6	297	314	309,75
0,7	314	362	326
0,8	314	362	350
0,9	362	402	382

in sploh katerikoli kvantil.

6.2. IZRAČUNAVANJE KVANTILOV IN KVANTILNIH RANGOV IZ FREKVENČNIH PORAZDELITEV

Ranžirne vrste so primerne za prikaz majhnih populacij. Za velike populacije pa je urejanje prezamudno in v takih primerih uporabimo za prikaz podatkov frekvenčne porazdelitve. Tudi v frekvenčni porazdelitvi so vrednosti urejene po velikosti, le da je ranžiranje izvedeno med razredi, ne pa znotraj njih.

Bistvena razlika med ranžirno vrsto in frekvenčno porazdelitvijo je, da pri frekvenčni porazdelitvi ne poznamo dejanskih vrednosti, zato **predpostavljamo, da so vrednosti znotraj vsakega razreda enakomerno porazdeljene**. Ker ne poznamo dejanskih vrednosti, so vse iz porazdelitve izračunane vrednosti le **približki**.

Povezava med rangom enote in kumulativno frekvenco (poznamo rang zgornje meje k-tega razreda):

$$\boxed{F_k = R_{y_{k,z}}}$$

Kvantilni rang izračunamo po obrazcu

$$\boxed{P_{y_{k,z}} = \frac{R_{y_{k,z}} - 0{,}5}{N} = \frac{F_k - 0{,}5}{N} = F_k^{\circ} - \frac{0{,}5}{N} \approx F_k^{\circ}}$$

Pri veliki populaciji (N velik), je zadnji člen zanemarljivo majhen in zato ne igra pomembne vloge v rezultatu.

A. Podan je y, iščemo njemu ustrezen rang R_y in kvantilni rang P_y

Poznamo vrednost spremenljivke y in iščemo njej ustrezen rang R_y in kvantilni rang P_y.
Denimo, da leži iskana vrednost med zaporednima točkama $T_0(y_0,R_0)$ in $T_1(y_1,R_1)$.
Upoštevamo

- $y_0 = y_{-1,z} = y_{0,s}$, $y_1 = y_{0,z}$ in $y_{0,s} - y_{0,z} = i_0$
- $R_0 = F_{-1}$, $R_1 = F_0$ in $R_1 - R_0 = F_0 - F_{-1} = f_0$

  $F_{-1} < R_P \leq F_0$

Razred s frekvenco f_0 imenujemo **kvantilni razred**.

Rang in kvantilni rang izračunamo po obrazcih

$$\boxed{R_y = F_{-1} + \frac{f_0}{i_0} \cdot (y - y_{0,s})}$$

in

$$\boxed{P_y = \frac{R_y - 0{,}5}{N}}$$

Pogosto izražamo kvantilni rang v odstotkih in v tem primeru nam P_y pove odstotek enot, ki imajo manjše, kvečjemu enake vrednosti od izbrane vrednosti y.

B. Kvantilni rang P je podan, iščemo njemu ustrezno vrednost y_P

Za dano vrednost kvantilnega ranga P iščemo kvantil, t.j. ustrezno vrednost spremenljivke y_P. Kot pri frekvenčnih porazdelitveh predpostavljamo enakomerno porazdelitev enot znotraj razredov, tudi pri iskanju ustreznih vrednosti in kvantilov predpostavljamo linearno spreminjanje vrednosti.

Denimo, da leži iskana vrednost med zaporednima točkama $T_0(y_0,R_0)$ in $T_1(y_1,R_1)$.
Upoštevamo

- $y_0 = y_{-1,z} = y_{0,s}$, $y_1 = y_{0,z}$ in $y_{0,s} - y_{0,z} = i_0$
- $R_0 = F_{-1}$, $R_1 = F_0$ in $R_1 - R_0 = F_0 - F_{-1} = f_0$

  $F_{-1} < R_P \le F_0$

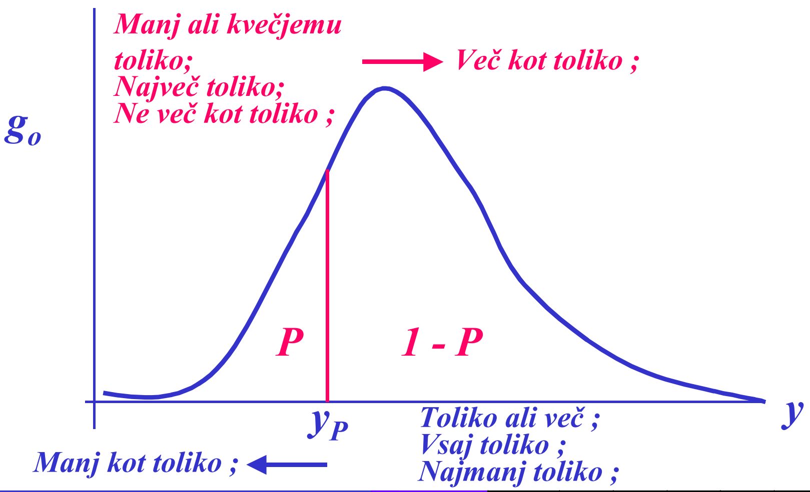
  Razred s frekvenco f_0 imenujemo **kvantilni razred**.

in dobimo obrazec za izračun kvantila

$$\boxed{y_P = y_{0,s} + \frac{i_0}{f_0} \cdot (R_P - F_{-1})}$$

UNIVERZA V LJUBLJANI
EKONOMSKA FAKULTETA

Vsak kvantil vedno razdeli populacijo glede na število enot na dva dela.



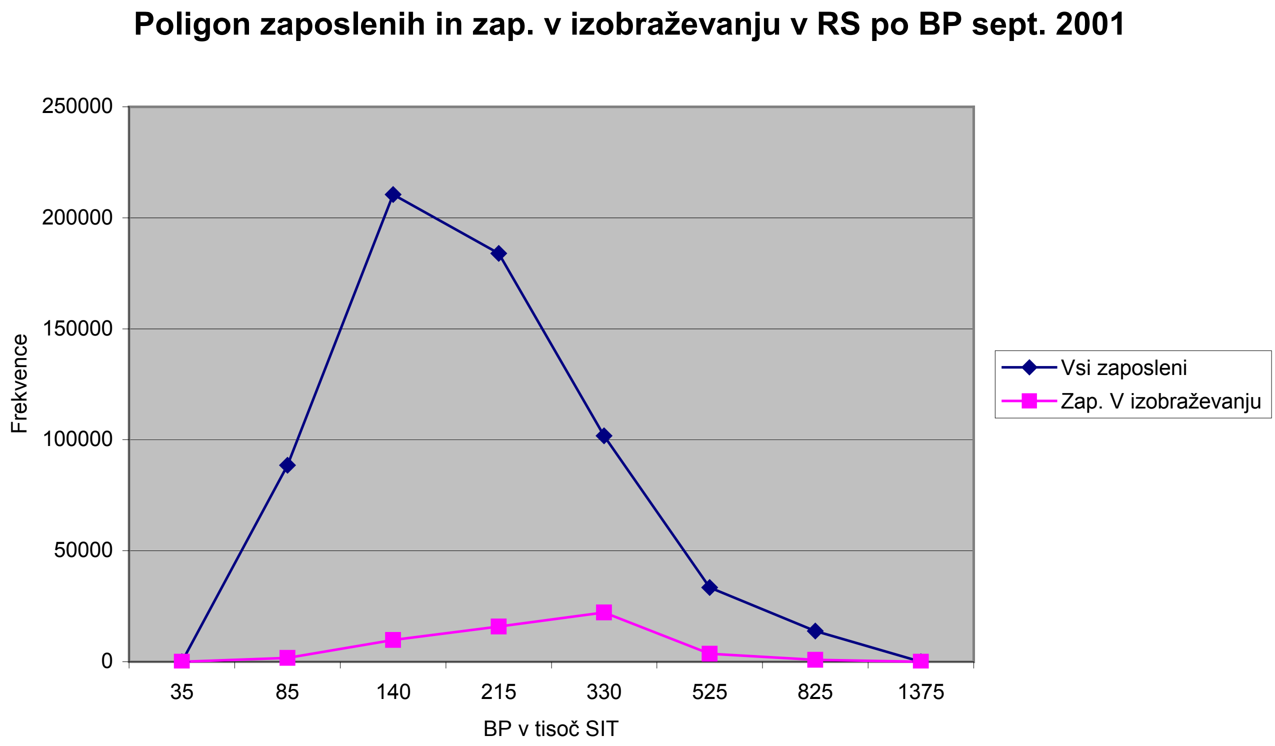
PRIMER 1:

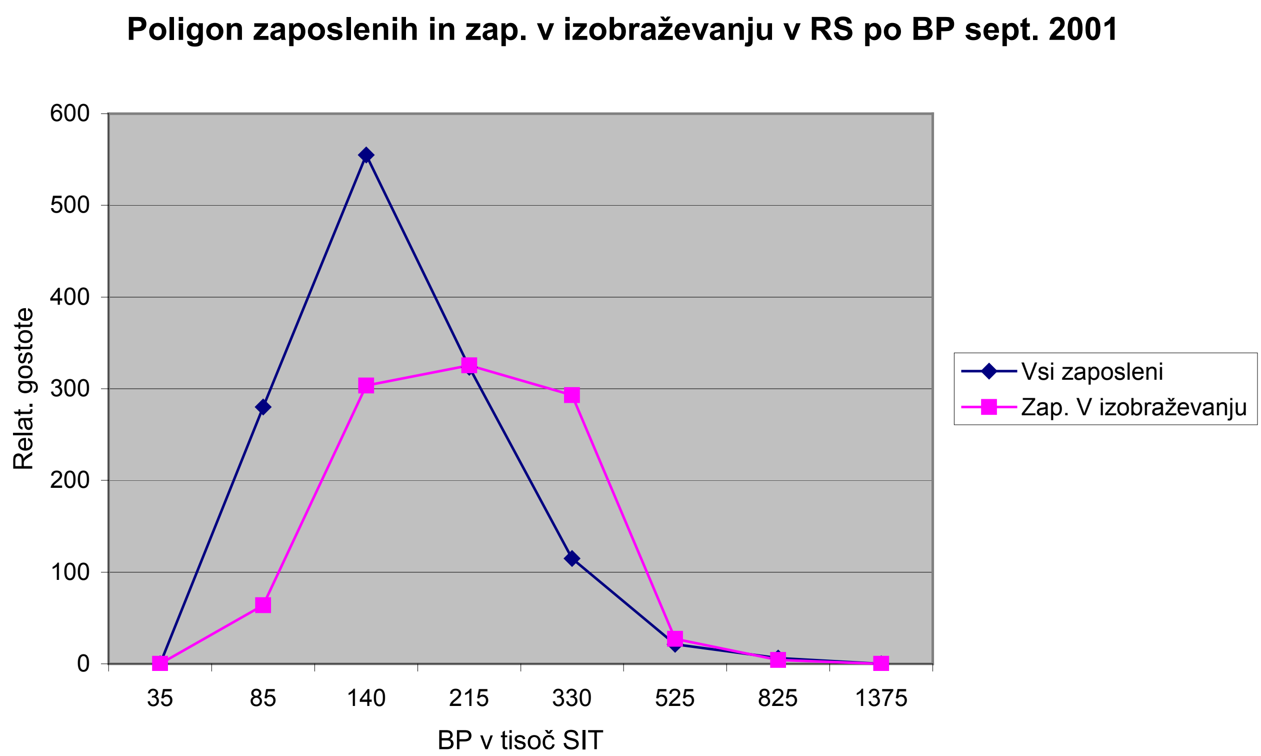
Porazdelitev zaposlenih v RS in zaposlenih v izobraževanju v RS po višini bruto plače (BP) septembra 2001
(vir: Statistične informacije št. 22, 28. 2. 2002)

		VSI ZAPOSLENI V RS			ZAPOSLENI V IZOBRAŽEVANJU V RS		
BP v 1000 SIT	**k**	**f_k**	**F_k**	**F_k %**	**f_k**	**F_k**	**F_k %**
nad 60 do 110	1	88 510	88 510	14,0	1 729	1 729	3,2
nad 110 do 170	2	210 528	299 038	47,3	9 834	11 563	21,4
nad 170 do 260	3	183 975	483 013	76,4	15 831	27 394	50,7
nad 260 do 400	4	101 787	584 800	92,5	22 153	49 547	91,7
nad 400 do 650	5	33 507	618 307	97,8	3 674	53 221	98,5
nad 650 do 1000	6	13 908	632 215	100	810	54 031	100
K =	6	632 215			54 031		

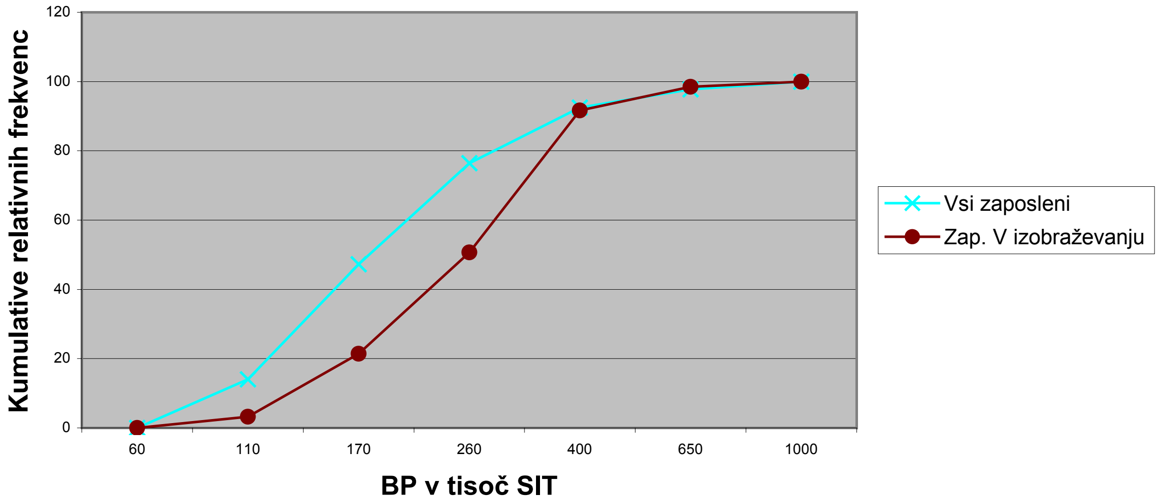
a) Kolikšen del vseh zaposlenih v RS je imalo septembra 2001 BP kvečjemu 100 000 SIT?
b) Kolikšen del vseh zaposlenih in zaposlenih v izobraževanju v RS je imelo septembra 2001 BP višjo od 650 000 SIT?

c) Izračunajte in razložite mediano BP vseh zaposlenih in zaposlenih v izobraževanju v RS septembra 2001!
d) Vsaj kolikšno BP je imalo septembra 2001 tri četrtine vseh zaposlenih v RS?


Poligon zaposlenih in zap. v izobraževanju v RS po BP sept. 2001
250000
200000
150000
100000
50000
0
Frekvence
35
85
140
215
330
525
825
1375
BP v tisoč SIT
Vsi zaposleni
Zap. V izobraževanju


Poligon zaposlenih in zap. v izobraževanju v RS po BP sept. 2001
600
500
400
300
200
100
0
Relat. gostote
35
85
140
215
330
525
825
1375
BP v tisoč SIT
Vsi zaposleni
Zap. V izobraževanju

Ogiva zaposlenih in zap. v izobraževanju v RS po BP sept. 2001



7. SREDNJE VREDNOSTI

Vrednosti spremenljivke homogene populacije se v splošnem goste okrog nekega središča – **srednje vrednosti** (**mere centralne tendence**), ki jo zaradi tega opredelimo kot značilnost populacije (**statistični parameter**). Na gibanje posameznih vrednosti spremenljivke okoli takega središča vplivajo posamezni vplivi, ki niso bili vključeni med opredeljujoče pogoje populacije.

Ogledali si bomo naslednje srednje vrednosti:

1. **SREDINSKI VREDNOSTI (določeni z lego vrednosti v populaciji)**
   - **MEDIANA Me** ali **SREDIŠČNICA**
   - **MODUS Mo** ali **GOSTIŠČNICA**
2. **POVPREČJA (izračunana iz vrednosti številskih spremenljivk)**
   - **ARITMETIČNA SREDINA $\overline{Y}$** ali **POVPREČJE**
   - **HARMONIČNA SREDINA H_y**
     (uporaba: izračunavanje povprečij relativnih števil)
   - **GEOMETRIJSKA SREDINA G_y**
     (uporaba: izračunavanje povprečnih vrednosti kazalcev dinamike pojavov)

7.1. MEDIANA Me ali SREDIŠČNICA ali RAZPOLOVIŠČNICA

Mediana je vrednost (kvantil), ki ustreza kvantilnemu rangu P = 0,5:

$$\boxed{\mathbf{Me} = \mathbf{y}_{\mathbf{P=0,5}}}$$

Mediana je tista vrednost spremenljivke, od katere ima polovica enot v populaciji manjše vrednosti in polovica večje.

DISKRETNE VREDNOSTI
Na osnovi ranžirne vrste izračunamo mediano po obrazcih (predpostavimo, da imamo vrednosti označene po velikostnem redu, torej $\mathbf{y}_1 \le \mathbf{y}_2 \le \ldots \le \mathbf{y}_N$):

$\mathbf{N = 2 \cdot i}$	$\mathbf{N = 2 \cdot i + 1}$
$\mathbf{Me} = \dfrac{\mathbf{y}_i + \mathbf{y}_{i+1}}{\mathbf{2}}$	$\mathbf{Me} = \mathbf{y}_{i+1}$

ZVEZNE VREDNOSTI
Ker pa navadno tudi diskretne spremenljivke za potrebe računanja spremenimo v zvezne, pogosteje računamo mediano kot kvantil, ki pripada kvantilnemu rangu 0,5.

PRIMERI:

Izračunaj mediano iz dane ranžirne vrste:

a) **31 36 $\boxed{53}$ 55 67**
(VREDNOSTI SO UREJENE PO VELIKOSTI !)
N = 5 => i = 2 => Me = 53
(2 enoti imata manjše vrednosti od mediane, 2 enoti pa imata večje vrednosti od mediane)

b) **31 53 $\boxed{53}$ 55 67**
N = 5 => i = 2 => Me = 53
(2 enoti imata manjše ali enake vrednosti od mediane, 2 enoti pa imata večje vrednosti od mediane)

c) **31 36 $\boxed{53}$ 53 67**
N = 5 => i = 2 => Me = 53
(2 enoti imata manjše vrednosti od mediane, 2 enoti pa imata večje ali enake vrednosti od mediane)

d) **31 36 45 □ 53 55 67**

$$N = 6 \Rightarrow i = 3 \Rightarrow Me = \frac{45+53}{2} = 49$$

(3 enote imajo manjše in 3 večje vrednosti kot mediana)

e) **31 36 53 □ 53 55 67**

$$N = 6 \Rightarrow i = 3 \Rightarrow Me = \frac{53+53}{2} = 53$$

(3 enote imajo manjše ali enake in 3 večje ali enake vrednosti kot mediana – mediana razdeli populacijo glede na število enot in ne glede na vrednosti!)

PREDNOSTI MEDIANE:

- lahko razumljiva srednja vrednost

- za določanje mediane ni potrebno poznati vseh vrednosti (posebej ugodno, če sta prvi in zadnji razred odprta), pač pa zadošča poznati vrednosti za tiste enote, ki ležijo okoli sredine v ranžirni vrsti

- $\sum_{i=1}^{N} |y_i - c| = \min$ pri $c = Me$

POMANJKLJIVOSTI:

- preveč neobčutljiva za spremembe vrednosti (vrednost mediane se spremeni le, če so spremembe vrednosti spremenljivk take, da vrednosti preidejo iz ene polovice v drugo)

- za asimetrične ali polimodalne porazdelitve je mediana vrednost, ki je različna od večine vrednosti v populaciji

7.2. MODUS Mo ali GOSTIŠČNICA

Modus je najpogostejša vrednost spremenljivke y oziroma vrednost, okrog katere se goste vrednosti spremenljivke. Smiselno jo je ugotavljati le, če se določena vrednost pojavi pogosto ali pa za obsežne populacije. Obsežne populacije predstavimo s frekvenčnimi porazdelitvami in opazimo lahko, da modus leži v modusnem razredu.

PREDNOSTI MODUSA:

- modus lahko določamo za številske in **imenske spremenljivke**

- modus dobimo iz osnovnih podatkov s preštevanjem (računanje ni potrebno)

- je neobčutljiv za spremembe vrednosti posameznih enot vse dokler gostitev na nekem drugem mestu ne prekorači stopnje gostitve v modusu (ni odvisen od vrednosti, ki za populacijo niso tipične)

POMANJKLJIVOSTI:

- premalo občutljiv za spreminjanje posameznih vrednosti (neobčutljivost na spremnninjanje vrednosti je torej dobra, lahko pa tudi slaba lastnost modusa)

- pri bimodalnih in polimodalnih populacijah imamo več lokalnih modusov in v tem primeru ni vedno najbolj primerno vzeti največjega med njimi za (edino) mero gostitve populacije. Določanje modusa je lahko vprašljivo tudi pri zaokroževanju vrednosti.

DOLOČANJE MODUSA NA PODLAGI FREKVENČNIH PORAZDELITEV

Frekvenčne porazdelitve navadno prikazujemo s histogrami. Iz histograma dobimo oceno za modus tako, da pri izračunu upoštevamo frekvenco f_0 v modusnem razredu in tudi frekvenci v sosednjih razdredih f_{-1} in f_{+1}. Pri tem morajo imeti **razredi enako širino**, da frekvenčna porazdelitev izraža zakonitost gostitve pojava. Pri izračunu predpostavimo, da ima frekvenčna krivulja v okolici modusa obliko parabole druge stopnje, ki doseže svojo največjo točko prav v modusu. Parabola, ki gre skozi točke $T_{-1}(y_{-1}, f_{-1})$, $T_0(y_0, f_0)$ in $T_1(y_{+1}, f_{+1})$, ima maksimum v točki z absciso

$$\mathbf{Mo} = \mathbf{y}_{0,s} + \mathbf{i}_0 \cdot \frac{\mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_{-1}}{2\mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_{-1} - \mathbf{f}_{+1}}$$

Z i_0 smo označili širino modusnega razreda in z $y_{0,s}$ njegovo spodnjo mejo.
Grafično dobimo absciso s presečiščem daljic med točkama $T(y_{0,s}, f_{-1})$ in $T(y_{0,z}, f_0)$ ter točkama $T(y_{0,s}, f_0)$ in $T(y_{0,z}, f_{+1})$.

Kadar **širine razredov niso enake, zamenjamo v obrazcu frekvence z gostotami:**

$$\mathbf{Mo} = \mathbf{y}_{0,s} + \mathbf{i}_0 \cdot \frac{\mathbf{g}_0 - \mathbf{g}_{-1}}{2\mathbf{g}_0 - \mathbf{g}_{-1} - \mathbf{g}_{+1}}$$

PRIMER:

V nekem košarkaškem klubu so dobili naslednjo frekvenčno porazdelitev višin njihovih igralcev:

Višina v cm	f_k
od 190 do pod 195	3
od 195 do pod 200	13
od 200 do pod 205	20
od 205 do pod 210	2

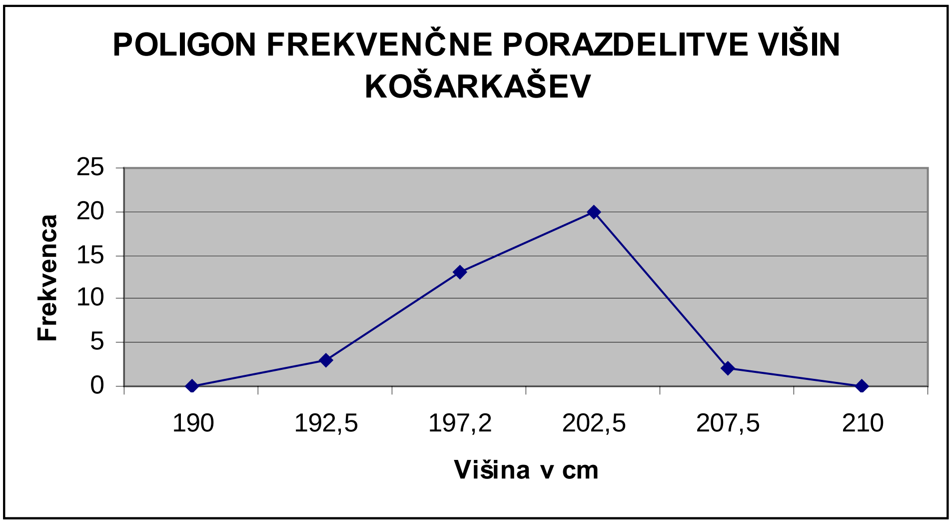
Na podlagi te porazdelitve izračunajte modus!

Modusni razred je 3. razred, zato je:

$y_{0,s} = 200$
$y_{0,z} = 205$
$f_{-1} = 13$
$f_0 = 20$
$f_{+1} = 2$

$$Mo = y_{0,s} + i_0 \cdot \frac{f_0 - f_{-1}}{2f_0 - f_{-1} - f_{+1}} = 200 + 5 \cdot \frac{20 - 13}{2 \cdot 20 - 13 - 2} =$$

$$= 200 + 1{,}4 = 201{,}4$$



Iz poligona bi lahko dobili prvi približek za modus – sredino modusnega razreda. Ta vrednost pa je modus le, če je porazdelitev simetrična. Ker je v našem primeru porazdelitev asimetrična v levo, sklepamo, da se enote gostijo nekoliko bolj levo od sredine. To vrednost pa izračunamo na osnovi histograma.

7.3. ARITMETIČNA SREDINA

Je najpogosteje uporabljena srednja vrednost, ki pa jo lahko izračunamo **samo za številske spremenljivke**. Aritmetična sredina ali povprečje $\overline{Y}$ (označena tudi z M ali μ) pove, **kakšno vrednost bi imela posamezna enota, če bi vsoto vrednosti enot Y enakomerno razdelili po enotah v populaciji**.

7.3.1. LASTNOSTI ARITMETIČNE SREDINE

1. Vrednost spremenljivke pri posamezni enoti y_i lahko razdelimo na dva dela: na vrednost $\overline{Y}$ (pojasnjena sestavina), ki je enaka pri vseh enotah in je rezultat splošnih vplivov, ki izhajajo iz opredeljujočih pogojev populacije, in na del ε_i (nepojasnjena sestavina), ki je rezultat posameznih vplivov na enoto.

$$y_i = \overline{Y} + \varepsilon_i$$

V splošnem je lahko vsota posameznih vplivov pozitivna, negativna ali 0, pri določitvi povprečne vrednosti pa postavimo zahtevo, da je ta vsota enaka 0.

$$\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i = 0$$

Pri tej predpostavki je torej

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N}.$$

2. Vsota odklonov za spremenljivko y od aritmetične sredine je enaka nič.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \overline{Y}) = 0.}$$

3. Aritmetična sredina za linearno kombinacijo številskih spremenljivk y_j s konstantami a_0 in a_j , j = 1,...p, je enaka linearni kombinaciji njihovih aritmetičnih sredin.

$$\boxed{y = a_0 + \sum_{j=1}^{p} a_j \cdot y_j}$$

$$\boxed{\overline{Y} = a_0 + \sum_{j=1}^{p} a_j \cdot \overline{Y}_j}$$

4. Vsota kvadriranih odklonov vrednosti za spremenljivko y od konstante A je najmanjša, če je konstanta enaka aritmetični sredini.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N}(y_i - c)^2 = \min \quad \text{če je } c = \overline{Y}}$$

Ta lastnost je zelo pomembna, saj je iz kvadratov odklonov od aritmetične sredine izpeljan poseben parameter – VARIANCA.

7.3.2. IZRAČUNAVANJE ARITMETIČNE SREDINE

7.3.2.1. Aritmetična sredina iz posamičnih podatkov

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N}$$

7.3.2.2. Aritmetična sredina iz podatkov, urejenih v neštevilske statistične vrste

(skupine so narejene za poljubno spremenljivko, imamo pa podano informacijo za številsko spremenljivko, za katero računamo aritmetično sredino)

2.a) Poleg števila enot imamo pri vsaki skupini podano tudi vsoto vrednosti številske spremenljivke, katere povprečje računamo:

Skupina	Število enot – f_k	Total skupine za številsko sprem. - Y_k
1	f_1	Y_1
2	f_2	Y_2
...	...	...
K	f_K	Y_K
	N	Y

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{k=1}^{K} Y_k}{\sum_{k=1}^{K} f_k}$$

2.b) Poleg števila enot imamo pri vsaki skupini podano tudi povprečno vrednost (glede na enote v vsaki posamezni skupini) številske spremenljivke, katere povprečje računamo:

Skupina	Število enot – f_k	Povprečje skupine za številsko sprem. - $\overline{Y}_k$
1	f_1	$\overline{Y}_1$
2	f_2	$\overline{Y}_2$
...	...	...
K	f_K	$\overline{Y}_K$

Sumarno ali skupno aritmetično sredino izračunamo po obrazcu

$$\boxed{\overline{Y} = \frac{\sum_{k=1}^{K} f_k \cdot \overline{Y}_k}{\sum_{k=1}^{K} f_k}}$$

Ker smo povprečjem skupin dodali določene uteži ali ponderje, imenujemo tako dobljeno aritmetično sredino tudi **TEHTANA ali URAVNOTEŽENA ali PONDERIRANA** aritmetična sredina.

Kadar imamo namesto frekvenc podane relativne frekvence, uporabimo obrazec

$$\boxed{\overline{Y} = \sum_{k=1}^{K} f_k^{\circ} \cdot \overline{Y}_k,}$$

pri podanih strukturnih odstotkih pa izračunamo povprečje kot

$$\boxed{\overline{Y} = \frac{\sum_{k=1}^{K} f_k\% \cdot \overline{Y}_k}{100}}$$

7.3.2.3. Aritmetična sredina iz frekvenčnih porazdelitev
(razredi so narejeni za številsko spremenljivko, za katero računamo aritmetično sredino)

Na podlagi frekvenčne porazdelitve v splošnem ne moremo izračunati dejanske aritmetične sredine, ker za posamezen razred ne poznamo dejanske povprečne vrednosti. Zato v tem primeru dobimo le približek za aritmetično sredino. V izračunu vzamemo za približek povprečne vrednosti spremenljivke za vsak razred kar sredino razreda , saj je le-ta vzeta kot predstavnik enot v razredu. Upoštevamo torej približek

$$f_k \cdot y_k \cong Y_k,$$

v katerem smo z y_k (kot vedno v frekvenčnih porazdelitvah) označili sredino k-tega razreda. Pri tej predpostavki dobimo naslednji obrazec za izračun aritmetične sredine

$$\boxed{\overline{Y} = \frac{\sum_{k=1}^{K} f_k \cdot \overline{Y}_k}{\sum_{k=1}^{K} f_k} \cong \frac{\sum_{k=1}^{K} f_k \cdot y_k}{\sum_{k=1}^{K} f_k} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{K} f_k \cdot y_k}$$

Kadar nastopajo v porazdelitvi odprti razredi, lahko izračunamo približek za aritmetično sredino le, če imamo za odprte razrede podane skupne vsote vrednosti v teh razredih.

Prednost aritmetične sredine pred mediano in modusom je, da jo lahko izračunamo iz delnih aritmetičnih sredin (za mediano in modus moramo delne populacije združiti v celoto in iz te izračunati mediano ali modus).

Kadar le ena ali nekaj vrednosti spremenljivke bistveno odstopa od ostalih vrednosti, smemo predpostaviti, da so odstopajoče vrednosti netipične za populacijo in jih zato ne upoštevamo pri izračunu povprečja – v tem primeru govorimo o **MODIFICIRANI ARITMETIČNI SREDINI**.

ODNOS MED MEDIANO, MODUSOM IN ARITMETIČNO SREDINO ZA UNIMODALNE PORAZDELITVE

Za **simetrične porazdelitve** velja:

$$\boxed{\mathrm{Me} = \mathrm{Mo} = \overline{\mathrm{Y}}}$$

Za porazdelitve, **asimetrične v desno**, veljajo neenakosti:

$$\boxed{\mathrm{Mo} < \mathrm{Me} < \overline{\mathrm{Y}}}$$

Za porazdelitve, **asimetrične v levo** (negativna asimetrija), veljajo neenakosti:

$$\boxed{\overline{\mathrm{Y}} < \mathrm{Me} < \mathrm{Mo}}$$

Za unimodalne in ne preveč asimetrične porazdelitve velja zveza:

$$\boxed{\overline{\mathrm{Y}} - \mathrm{Mo} \cong 3 \cdot (\overline{\mathrm{Y}} - \mathrm{Me})}$$

7.4. HARMONIČNA SREDINA

HARMONIČNA SREDINA je definirana kot recipročna vrednost aritmetične sredine reciprokov posameznih osnovnih podatkov (smiselno jo je računati le, če **nobena od vrednosti ni nič**):

$$\boxed{H_y = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{y_i}} = \frac{1}{\overline{Y_{\frac{1}{y}}}}}$$

Kadar imamo podatke razvrščene v skupinah in poznamo harmonične sredine skupin in število enot v skupinah, izračunamo harmonično sredino za številsko spremenljivko y kot **tehtano (uravnoteženo, ponderirano) harmonično sredino** harmoničnih sredin skupin H_k, v kateri so uteži števila enot v skupinah f_k:

$$\boxed{H_y = \frac{\sum_{k=1}^{K} f_k}{\sum_{k=1}^{K} \frac{f_k}{H_k}}}$$

VELJA:

$$\boxed{H_y \leq \overline{Y}}$$

in

$$H_y = \overline{Y} \Leftrightarrow y_i = y_j \forall i, j = 1, \ldots, N$$

UPORABA:

a) Harmonično sredino uporabimo takrat, kadar se vrednosti populacije porazdeljujejo asimetrično, porazdelitev recipročnih vrednosti pa je simetrična.
b) Včasih s harmonično sredino računamo povprečja iz relativnih števil (predvsem koeficientov in struktur).

POVPREČJA IZ RELATIVNIH ŠTEVIL
(sestav in statističnih koeficientov)

Relativna števila so v splošnem kvocienti primerjanih količin.

Če z R_k označimo razmerje dveh absolutnih podatkov Y_k in X_k, potem lahko obrazec

$$R_k = \frac{Y_k}{X_k}$$

pišemo tudi v obliki (če poznamo relativno število R_k in primerjalni podatek X_k)

$$Y_k = R_k \cdot X_k$$

ali pa (če poznamo relativno število R_k in primerjani podatek Y_k)

$$X_k = \frac{Y_k}{R_k}$$

Glede na te zveze računamo povprečna (skupna, sumarna) relativna števila R na tri načine, odvisno od tega, s katerimi podatki razpolagamo:

A. Če **poznamo v skupinah k delni vsoti vrednosti (subtotala) Y_k in X_k** za obe spremenljivki, izračunamo povprečno (skupno, sumarno) relativno število R z obrazcem

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{k=1}^{K} \mathbf{Y}_k}{\sum_{k=1}^{K} \mathbf{X}_k}$$

PRIMER:
Število aktivnega prebivalstva in registrirane brezposelne osebe v R Sloveniji na dan 31.12.1999 po spolu (vir: Statistične informacije, št. 53, 14. marec 2000):

Spol	k	Aktivno prebivalstvo X_k	Brezposelne osebe Y_k
Ženske	1	403 015	57 903
Moški	2	477 506	56 445
Skupaj		880 521	114 348

Izračunati želimo stopnjo registrirane nezaposlenosti, ki je po definiciji razmerje med številom registrirano brezposlenih oseb in številom aktivnih prebivalcev, izraženo v odstotkih.

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{k=1}^{K} \mathbf{Y}_k}{\sum_{k=1}^{K} \mathbf{X}_k} \cdot \mathbf{100} = \frac{\mathbf{114348}}{\mathbf{880521}} \cdot \mathbf{100} = \mathbf{12{,}986\%}$$

B. Če **poznamo v skupinah delne vsote vrednosti za spremenljivko x in relativna števila skupin R_k**, izračunamo (sumarno) relativno število za populacijo z obrazcem za **tehtano aritmetično sredino (TAS)**

$$\boxed{\mathbf{R} = \frac{\sum_{k=1}^{K} \mathbf{X_k} \cdot \mathbf{R_k}}{\sum_{k=1}^{K} \mathbf{X_k}}}$$

Kadar so uteži $\mathbf{X_k}$ po vseh skupinah k=1, …, K, **enake**, se **R** izraža kot navadna aritmetična sredina relativnih števil $\mathbf{R_k}$ po skupinah k.

Glede na način, kako so podane sestave uteži $\mathbf{X_k}$ po skupinah, osnovni obrazec preoblikujemo v:

$$\boxed{\mathbf{R} = \frac{\sum_{k=1}^{K} \mathbf{X_k\%} \cdot \mathbf{R_k}}{\mathbf{100}}}$$

če so **uteži $\mathbf{X_k}$** izražene relativno v strukturnih odstotkih $X_k\%$, oziroma v

$$\boxed{\mathbf{R} = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{X_k^{\circ}} \cdot \mathbf{R_k}}$$

če so **uteži $\mathbf{X_k}$** izražene relativno v strukturnih deležih.

PRIMER:
Število aktivnega prebivalstva in stopnje registrirane nezaposlenosti v R Sloveniji na dan 31.12.1999 po spolu (vir: Statistične informacije, št. 53, 14. marec 2000):

Spol	k	Stopnja registrirane nezaposlenosti R_k	Aktivno prebivalstvo X_k
Ženske	1	14,4	403 015
Moški	2	11,8	477 506
Skupaj			

(Opozorilo: skupna stopnja registrirane nezaposlenosti ni enaka vsoti niti aritmetični sredini stopenj po skupinah.)

Izračunati želimo stopnjo registrirane nezaposlenosti, ki je po definiciji razmerje med številom registrirano brezposlenih oseb in številom aktivnih prebivalcev, izraženo v odstotkih.

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{k=1}^{K} \mathbf{X_k} \cdot \mathbf{R_k}}{\sum_{k=1}^{K} \mathbf{X_k}} = \frac{\mathbf{14{,}4 \cdot 403015 + 11{,}8 \cdot 477506}}{\mathbf{880521}} = \mathbf{12{,}99\%}$$

D. Če **poznamo v skupinah vsote vrednosti za spremenljivko y in relativna števila skupin R_k**, izračunamo (sumarno) relativno število za populacijo z obrazcem za **tehtano harmonično sredino (THS)**

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{k=1}^{K} \mathbf{Y_k}}{\sum_{k=1}^{K} \frac{\mathbf{Y_k}}{\mathbf{R_k}}}$$

Če so **uteži Y_k** izražene v strukturnih odstotkih $Y_k\%$ ali strukturnih deležih , obrazec preoblikujemo v

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{100}}{\sum_{k=1}^{K} \frac{\mathbf{Y_k\%}}{\mathbf{R_k}}}$$

oziroma

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{1}}{\sum_{k=1}^{K} \frac{\mathbf{Y_k^{\circ}}}{\mathbf{R_k}}}$$

PRIMER:
Stopnje registrirane nezaposlenosti in odstotek brezposlenih v R Sloveniji na dan 31.12.1999 po spolu (vir: Statistične informacije, št. 53, 14. marec 2000):

Spol	k	Stopnja registrirane nezaposlenosti R_k	Odstotek brezposelnih $Y_k\%$
Ženske	1	14,4	50,64
Moški	2	11,8	49,36
Skupaj			100,00

Izračunati želimo stopnjo registrirane nezaposlenosti, ki je po definiciji razmerje med številom registrirano brezposlenih oseb in številom aktivnih prebivalcev, izraženo v odstotkih.

$$\mathbf{R} = \frac{100}{\sum_{k=1}^{K} \frac{Y_k\,\%}{R_k}} = \frac{100}{\frac{50,64}{14,4} + \frac{49,36}{11,8}} = 12,987\%$$

STANDARDIZIRANA POVPREČJA

Bistvena pomanjkljivost sumarnih povprečij, ki jih izračunamo iz povprečij po skupinah, je, da niso odvisna samo od teh števil, pač pa so **odvisna tudi od sestave ustreznih uteži** (strukturnih deležev).
Posledica te odvisnosti je, da je neposredna primerjava sumarnih srednjih vrednosti in sumarnih relativnih števil med različnimi populacijami ali med isto populacijo v različnih časovnih obdobjih zelo vprašljiva. Za takšno primerjavo **moramo izločiti vpliv različne sestave uteži**. To naredimo tako, da izračunamo sumarno srednjo vrednost ali sumarno relativno število za več populacij **pri enaki sestavi uteži**.

Standardna sestava, ki jo vzamemo za osnovo za izračunavanje sumarnih relativnih števil, mora biti taka, da čim bolje ustreza pravim sestavam za posamezne populacije, ki jih med seboj primerjamo. Standardna sestava je zato včasih **povprečna sestava iz vseh populacij**, ki jih primerjamo, včasih pa **idealna sestava**, ki je pogojena z analizo pojava, včasih pa za standardno sestavo vzamemo kar **sestavo ene od populacij, ki jih primerjamo**.

7.5. GEOMETRIJSKA SREDINA

GEOMETRIJSKA SREDINA iz N vrednosti $y_1, y_2, \ldots, y_N$ je N-ti koren produkta vseh N vrednosti (smiselno jo je računati le, kadar so vse vrednosti za strogo pozitivne)

$$G = \sqrt[N]{y_1 \cdot y_2 \cdots y_N}$$

Tehtano geometrijsko sredino izračunamo po obrazcu

$$G = \sqrt[\sum w_k]{y_1^{w_1} \cdot y_2^{w_2} \cdots y_K^{w_K}}$$

Ker je geometrijske sredine težko računati, si pomagamo z logaritmiranjem

$$\log G = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \log(y_i)$$

in

$$\log G = \frac{1}{\sum w_k} \sum_{i=1}^{K} w_k \cdot \log(y_i)$$

VELJAJO NEENAKOSTI:

$$H_y \leq G_y \leq \overline{Y}$$

UPORABA:

1. Izračunavanje povprečnih (skupnih) vrednosti indeksov.

PRIMER:
Povečanju cen za 100% (indeks je 200) smiselno ne ustreza znižanje cen za 100%, ker bi bila v tem primeru cena nič, pač pa znižanje za 50% (indeks 50). Izravnava raznosmernih učinkov se pokaže pri geometrijski sredini, saj je geometrijska sredina indeksov 200 in 50

$$\sqrt{200 \cdot 50} = 100.$$

Ne pokaže pa se pri aritmetični sredini, saj je aritmetična sredina med 200 in 50 enaka 125.

Zato je za izračunavanje časovnih sredin iz posameznih indeksov bolj upravičena geometrijska kot aritmetična sredina.

2. Izračunavanje povprečnih vrednosti kazalcev časovne dinamike pojavov (povprečni koeficient dinamike, povprečni verižni indeks, povprečna stopnja rasti).

Predpostavka pri iskanju povprečnega koeficienta dinamike je, da le-ta zagotavlja **enakomerno gibanje pojava** od časovne enote do časovne enote, ki pripelje pojav **od vrednosti v prvem členu do vrednosti v zadnjem členu časovne vrste**, zato velja

$$Y_N = Y_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdots K_N$$

$$Y_N = Y_1 \cdot \overline{K} \cdot \overline{K} \cdots \overline{K} = Y_1 \cdot \overline{K}^{N-1}$$

Iz teh enakosti izpeljemo obrazce za izračun
POVPREČNEGA KOEFICIENTA DINAMIKE
glede na dane podatke:

A. Poznamo posamezne vrednosti koeficienta dinamike:

$$\boxed{\overline{K} = \sqrt[N-1]{K_2 \cdot K_3 \cdots K_N}}$$

PRIMER:
Ugotovi povprečni letni koeficient dinamike BDP R Slovenije v razdobju 1989-1994 na podlagi letnih koeficientov dinamike v tem razdobju.

Koeficienti dinamike BDP R Slovenije v letih **1989-1994** (izračunani iz podatkov po cenah iz leta 1990 - v Mrd SIT)

Leto	1989	1990	1991	1992	1993	1994
t	1	2	3	4	5	6
K_t	-	0,953	0,919	0,946	1,013	1,050

Vir: Pfajfar in Arh: STATISTIKA 1, str.134

$$_{89}\overline{K}_{94} = \sqrt[6-1]{K_{90} \cdot K_{91} \cdot K_{92} \cdot K_{93} \cdot K_{94}} =$$

$$= \sqrt[5]{0{,}953 \cdot 0{,}919 \cdot 0{,}946 \cdot 1{,}013 \cdot 1{,}05} = 0{,}975$$

BDP R Slovenije se je v razdobju 1989 – 1994 spreminjal z različnimi koeficienti dinamike, **v povprečju** pa je koeficient dinamike v tem razdobju znašal 0,975 **letno**. Če bi bilo spreminjanje vrednosti enakomerno, bi se v tem razdobju BDP vsako leto zmanjšal za 2,5 % (povprečna stopnja rasti je 100 krat povprečni koeficient dinamike minus 100, kar znese –2,5%). Povprečni verižni indeks za obravnavano razdobje 1989/1994 znaša 97,5.

B. Poznamo posamezne vrednosti pojava ali vsaj začetno in končno vrednost pojava za željeno razdobje:

$$\overline{K} = \sqrt[N-1]{\frac{Y_N}{Y_1}}$$

ali

$$\log(\overline{K}) = \frac{1}{N-1}(\log(Y_N) - \log(Y_1))$$

$$\overline{K} = 10^{\log(\overline{K})}$$

PRIMER:

Ugotovi povprečni letni koeficient dinamike BDP R Slovenije v razdobju 1989-1994 na podlagi podatkov o vrednosti BDP v Mrd SIT.

Vrednost BDP R Slovenije v letih 1989-1994 po cenah iz leta 1990 (v Mrd SIT)

Leto	1989	1990	1991	1992	1993	1994
t	1	2	3	4	5	6
BDP v Mrd SIT	206,4	196,8	180,8	171,1	173,3	182,0

Vir: Pfajfar in Arh: STATISTIKA 1,str.134

$$\log(\overline{K}) = \frac{1}{5}(\log(182) - \log(206{,}4)) = \frac{1}{5}(-0{,}055) = -0{,}011$$

$$\overline{K} = 10^{\log(\overline{K})} = 10^{-0{,}011} = 0{,}975$$

C. Poznamo indekse s stalno osnovo o za željeno razdobje:

$$\overline{K} = \sqrt[N-1]{\frac{I_{N/o}}{I_{1/o}}}$$

ali

$$\log(\overline{K}) = \frac{1}{N-1}\left(\log(I_{N/o}) - \log(I_{1/o})\right)$$

$$\overline{K} = 10^{\log(\overline{K})}$$

PRIMER:

Ugotovi povprečni letni koeficient dinamike BDP R Slovenije v razdobju 1989-1994 na podlagi indeksov s stalno osnovo v letu 1989.

Indeks BDP R Slovenije v letih 1989-1994 (1989=100)

Leto	1989	1990	1991	1992	1993	1994
t	1	2	3	4	5	6
$I_{t/89}$	100	95,3	87,6	82,9	84,0	88,2

Vir: Pfajfar in Arh: STATISTIKA 1,str.134

Povprečni letni koeficient dinamike BDP R Slovenije je v razdobju 1989-1994 znašal 0,975.

D. Če poznamo verižne indekse za željeno obdobje, poiščemo povprečni verižni indeks in povprečno stopnjo rasti po postopku:

1. Iz V_t izračunamo povprečni verižni indeks:

$$\boxed{\overline{V} = \sqrt[N-1]{V_2 \cdot V_3 \cdots V_N}}$$

2. Iz povprečnega verižnega indeksa izrazimo povprečno stopnjo rasti:

$$\boxed{\overline{S} = \overline{V} - 100}$$

PRIMER:

Ugotovi povprečni letni koeficient dinamike, povprečni verižni indeks in povprečno letno stopnjo rasti BDP R Slovenije v razdobju 1989-1994 na podlagi verižnih indeksov BDP.

Verižni indeksi za BDP R Slovenije v letih 1989-1994

Leto	1989	1990	1991	1992	1993	1994
t	1	2	3	4	5	6
V_t	-	95,3	91,9	94,6	101,3	105,0

Vir: Pfajfar in Arh: STATISTIKA 1,str.134

$$\mathbf{V = \sqrt[5]{95{,}3 \cdot 91{,}9 \cdot 94{,}6 \cdot 101{,}3 \cdot 105{,}0} = 97{,}5}$$

Povprečni verižni indeks BDP R Slovenije v razdobju 1989-1994 znaša 97,5.

$$\bar{S} = 97{,}5 - 100 = -2{,}5$$

Stopnje rasti BDP RS so bile v **razdobju 1989-1994** vsako leto različne**. Iz začetne ravni** v letu 1989 **na končno raven** v letu 1994 pa bi prišli tudi, če bi se BDP RS **vsako leto zmanjšal za 2,5% glede na tako izračunano raven v predhodnem letu**.

E. Če poznamo stopnje rasti za željeno obdobje, poiščemo povprečni verižni indeks in povprečno stopnjo rasti po postopku:

1. Iz S_t izračunamo K_t:

$$\boxed{K_t = \frac{S_t + 100}{100}}$$

2. Iz koeficientov rasti izračunamo povprečni koeficient rasti:

$$\boxed{\bar{K} = \sqrt[N-1]{K_2 \cdot K_3 \cdots K_N}}$$

3. Iz povprečnega koeficienta rasti izrazimo povprečno stopnjo rasti

$$\boxed{\bar{S} = \bar{K} \cdot 100 - 100}$$

in povprečni verižni indeks

$$\boxed{\overline{V} = \overline{S} + 100}$$

PRIMER:

Izračunaj povprečno letno stopnjo rasti BDP R Slovenije za razdobje 1989/1994 na podlagi danih letnih stopenj rasti.

Stopnje rasti BDP R Slovenije v letih 1989-1994

Leto	1989	1990	1991	1992	1993	1994
t	1	2	3	4	5	6
S_t	-	- 4,7	- 8,1	- 5,4	1,3	5,0

Vir: Pfajfar in Arh: STATISTIKA 1,str.134

$$\mathbf{K_t = 1 + \frac{S_t}{100}}$$

$\mathbf{K_2 = 0{,}953,\ K_3 = 0{,}919,\ K_4 = 0{,}946,\ K_5 = 1{,}013,\ K_6 = 1{,}050}$

$$\mathbf{\overline{K} = \sqrt[5]{0{,}953 \cdot 0{,}919 \cdot 0{,}946 \cdot 1{,}013 \cdot 1{,}05} = 0{,}975}$$

$$\mathbf{\overline{S} = 0{,}975 \cdot 100 - 100 = -2{,}5}$$

Povprečna letna stopnja rasti BDP R Slovenije v razdobju 1989-1994 znaša –2,5%. Letne stopnje rasti BDP v Sloveniji so bile v razdobju 1989/1994 različne, iz ravni BDP v letu 1989 pa bi prišli na raven v letu 1994 tudi, če bi se v tem razdobju BDP vsako leto zmanjšal za 2,5% glede na tako izračunano raven v prejšnjem letu.

F. Izračun začetne ravni pojava, če poznamo končno raven pojava in povprečno vrednost koeficienta dinamike:

$$\boxed{\mathbf{Y_1 = \frac{Y_N}{\overline{K}^{N-1}}}}$$

PRIMER:

Izračunaj BDP R Slovenije v letu 1989, če vemo, da je bila njegova vrednost v letu 1994 enaka 182 Mrd SIT (po cenah iz leta 1990) in je bila povprečna letna stopnja rasti za obdobje od leta 1989 do 1994 enaka –2,5!

$$\overline{K} = \frac{\overline{S} + 100}{100} = 0{,}975$$

$$Y_1 = \frac{Y_N}{\overline{K}^{N-1}} = \frac{182}{0{,}975^5} = 206{,}6$$

Vrednost BDP R Slovenije je v letu 1989 znašala 206,6 Mrd SIT (po cenah iz leta 1990).

G. Izračun potrebnih časovnih enot, da dosežemo željeno vrednost, če poznamo začetno raven in povprečno vrednost koeficienta dinamike:

$$N-1=\frac{\log\frac{Y_N}{Y_1}}{\log(\overline{K})}=\frac{\log(Y_N)-\log(Y_1)}{\log(\overline{K})}$$

PRIMER 1:

Ocenimo, katerega leta bi izvoz R Slovenije dosegel 7 Mrd USD,če je vrednost izvoza leta 1992 znašala 4182 Mio USD in predpostavljamo, da je v naslednjih letih izvoz naraščal po povprečni letni stopnji rasti 8 odstotkov.

$$N-1=\frac{\log(Y_N)-\log(Y_1)}{\log(\overline{K})}=\frac{\log(7000)-\log(4182)}{\log(1{,}08)}=$$

$$=6{,}69=6{,}69\text{let}$$

$$1992+6{,}69=1998{,}69$$

$$365\cdot 0{,}69=251{,}85$$

Ker so podatki o vrednosti izvoza intervalni in se nanašajo na časovno enoto enega leta, na podlagi privzete stopnje rasti izvoza od leta 1992 ocenjujemo, da bi vrednost izvoza dosegla 7 Mrd USD v letu s koncem v 252 dnevu leta 1999, torej v letu, ki se je končalo 9.septembra 1999, torej v letu od 10. septembra 1998 do 9. septembra 1999.

Preizkus:

Leto	t	Y_t v Mio SIT
1992	1	4182
1993	2	4182* 1,08 = 4516,56
1994	3	4516,56*1,08 = 4877,88
1995	4	5268,12
1996	5	5689,56
1997	6	6144,73
1998	7	6636,31
1999	8	7167,21

GRAFIČNI PRIKAZ

Grafično prikažemo spreminjanje pojava Y z **eksponentno krivuljo**, ki poteka skozi točki za začetno $(1, Y_1)$ in končno raven (N, Y_N):

$$\mathbf{Y_N = Y_1 \cdot \overline{K}^{N-1}}$$

Če z Y_t označimo vrednost, ki jo dobimo po obrazcu

$$\boxed{\mathbf{Y_t = Y_1 \cdot \overline{K}^{t-1},}}$$

potem se dobljene vrednosti v prvi $T(1, Y_1)$ $(t=1)$ in zadnji točki $T(N, Y_N)$ $(t=N)$ ujemata z zečetno in končno ravnjo pojava Y.